OBZORY

2/2024 (53)

MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2024 ročník 53

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 2/2024 Volume 53

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Znám, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec

Editors in Chief: Jozef D o b o š (Mathematics and Computer Sciences)

International Editorial Board:

Anatolij D v u r e č e n s k i j (Slovakia)	Štefan L u b y (Slovakia)
Gábor G a l a m b o s (Hungary)	László N á n a i (Hungary)
Juraj H r o m k o v i č (Switzerland)	Adam P l o c k i (Poland)
Hans J o r d e n s (Netherland)	Zdeněk P ů l p á n (Czech republic)
Martin K a l i n a (Slovakia)	Ladislav Emanuel R o t h (USA)

Executive Editors: Štefan T k a č i k (Mathematics and Computer Sciences)
Aba T e l e k i (Physics)

Editorial Board:

Mathematics and Computer Sciences:

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Peter Maličký	Iveta Scholtzová
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Mariana Marčoková	Milan Turčáni
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Milan Matejdes	Peter Vrábel
Tomáš Lengyelfalusy	Martin Papčo		

Physics:

Jozef Beňuška	Stanislav Holec	Viera Lapitková	Vladimír Šebeň
Ivo Čáp	Anna Jankovýchová	Milan Noga	Boris Tomášik
Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó	Bohumil Vybíral

Reviewers:

Mathematics and Computer Sciences:

Ružena Blašková	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan
Radoslav Harman	Martin Papčo	Marián Trenkler
Mária Kmeťová	Iveta Scholtzová	Dušan Vallo

Physics:

Peter Demkanin	Peter Hanisko	Marián Kíreš	Arnold Pompoš
Jozef Hanč	Ján Klíma	Miroslava Ožvoldová	

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2024 (53)

VZDELÁVANIE V MATEMATIKE A INFORMATIKE

Fourierův odkaz dnešku

Alena Šolcová

Abstract [Fourier's Legacy for Today]: Fourier's name is primarily associated with the study of periodic phenomena in nature and technology. This outstanding French mathematician and physicist devoted himself to the description of heat conduction using partial differential equations, the solution of which he expressed in infinite series of trigonometric functions. Few people know that Fourier also excelled as an Egyptologist.

Key words: Jean B. Joseph Fourier, trigonometric functions, Fourier series, definition of function, Fourier transform, discret Fourier transform, fast Fourier transform (FFT), Cornelius Lanczos, egyptology.

Souhrn: Fourierovo jméno je spojeno především se studiem periodických dějů v přírodě i v technice. Tento vynikající francouzský matematik a fyzik se věnoval popisu vedení tepla pomocí parciálních diferenciálních rovnic, jejichž řešení vyjadřoval nekonečnými řadami trigonometrických funkcí. Málokdo ví, že Fourier vynikl též jako egyptolog.

Klíčová slova: Jean B. Joseph Fourier, trigonometrické funkce, Fourierovy řady, definice funkce, Fourierova transformace, diskrétní Fourierova transformace, rychlá Fourierova transformace, Cornelius Lanczos, egyptologie.

MESC: A30, E40, G60, I70, N40, P80, Q60, R30.

1 Stručně o životních osudech

Mládí a studium

Jean Baptiste Joseph Fourier se narodil 21. března 1768 v Auxerre v Burgundsku v rodině krejčího. Když se otec po smrti své první ženy znovu oženil, přibylo ke třem dětem z prvního manželství dalších 12 dětí. Joseph byl devátým dítětem z druhého manželství. Matka zemřela, když mu bylo devět let. O rok později Joseph zcela osiřel. Projevoval literární talent, vzdělával se v hudbě a jeho nadání vzbuzovalo naděje. Po studiu latiny a francouzštiny v rodném městě pokračoval ve studiu na královské vojenské škole tamtéž. Ve třinácti letech jej zaujala matematika. Během roku pro-

studoval šest svazků Bézoutova *Kurzu matematiky* [1]. V patnácti letech obdržel první cenu za práci o Bossutově *Méchanique en général*.

Obrázek 1. Jean Baptiste Fourier (1768 – 1830)

První matematické práce

V roce 1787 se Fourier rozhodl pro kněžskou dráhu a vstoupil do benediktinského kláštera sv. Benoîta na Loiře. Také se dále zabýval řešením úloh, jak o tom svědčí dopisy učiteli matematiky v Auxerre C. L. Bonardovi. V nich mj. píše:

Včera mi bylo 21 let, v tomto věku již byli Newton i Pascal nesmrtelní…

Povzbuzen svým učitelem poslal své pojednání o algebře tehdy významnému matematikovi Jeanu Montuclovi [2]. Brzy nato (1789) opustil klášter a odešel do Paříže, kde v Akademii vyslechli jeho přednášku o algebraických rovnicích. Pak učil v benediktinské koleji Královské vojenské školy v Auxerre, kde dříve studoval. Dlouho se nemohl se rozhodnout, zda zvolit dráhu kněze nebo se věnovat matematice.

---

[1] Étienne Bézout (1730 – 1783) se věnoval především algebře. Jeho *Cours de mathématique* vycházel postupně v letech 1764 – 1769.

[2] Jean Étienne Montucla (1725 – 1799) pod vlivem encyklopedistů (zejména d'Alemberta) se věnoval historii matematiky (v roce 1758 vydal dva svazky přehledného díla).

V revoluční době

Připomeňme, že atmosféra ve Francii byla na konci 18. století velmi vzrušená. Podlehl jí také Fourier. Podporoval představu rovnosti občanů a svobodné vlády bez králů a církve. V roce 1793 se stal členem místního revolučního výboru. Brzy byl znechucen násilnostmi vášnivých bojovníků o moc a chtěl se vzdát členství ve výboru. Revolucionáři se rozdělili do vzájemně proti sobě bojujících skupin. Fourier bránil jednu skupinu v Orléansu. V červenci 1794 byl za tuto svoji podporu uvězněn a hrozilo, že skončí pod gillotinou. Politické změny po popravě Robespierra mu přinesly svobodu.

V Paříži

Na konci roku 1794 se Fourier přihlásil ke studiu na l'École Normale v Paříži. Zde se setkal s Lagrangem, Laplacem a Mongem. Přitom vyučoval i na Collége de France. Brzy přešel na vznikající l'École Polytechnique, kterou vedli především Lazare Carnot a Gaspard Monge. Politická situace se změnila a Fourier byl po druhé uvězněn. V září 1795 začal opět vyučovat. V té době již měl pověst velmi dobrého přednášejícího. Roku 1897 převzal po Lagrangeovi přednášky z analýzy a mechaniky.

Expedice do Egypta

O rok později působil jako vědecký poradce při Napoleonově výpravě do Egypta. Expedice měla hned zpočátku velký úspěch. Francouzi dobyli Alexandrii a obsadili

Obrázek 2. Z Popisu Egypta, Antikvity, 2. vydání

deltu při ústí Nilu. Postup se ale zastavil již po měsíci, 1. srpna 1798, kdy byl Napoleon poražen britským viceadmirálem Horatiem Nelsonem. Fourier pak působil jako diplomat a organizátor vzdělávacích a vědeckých institucí v Egyptě. Přispěl k založení Káhirského institutu a byl jedním ze dvanácti členů jeho matematického oddělení (s Gaspardem Mongem, Étiennem-Louisem Malusem a Napoleonem Bonaparte). Stal se tajemníkem tohoto ústavu a pečoval o archeologické vykopávky. V roce 1799 vedl expedici archeologů do údolí Horního Nilu. Je též autorem rozsáhlého historického díla, které je dodnes důležitým pramenem egyptologů: *Popis Egypta* (*Description de l'Égypte*).

V Grenoblu

Po návratu do Francie chtěl pokračovat ve vědecké a učitelské dráze na l'École Polytechnique, ale na žádost samotného Napoleona se stal prefektem v departementu Isère. Zasloužil se přitom o stavbu silnice mezi Grenoblem a Turinem a dohlížel na vysušování bažin v okolí Bourgoinu. V Grenoblu se věnoval též matematice. V roce 1807 zde dokončil důležité pojednání *O šíření tepla v pevných tělesech*, výsledky tříleté práce, které 21. prosince 1807 přednesl v Paříži. Dnes je práce velmi ceněna, ale tehdy měli členové komise Lagrange, Laplace, Monge a Lacroix dvě vážné připomínky:

První se týkala rozvojů funkcí do tvaru nekonečných trigonometrických řad, dnes známých jako řady Fourierovy (viz např. [7], [9] nebo [16, s. 632 – 661]):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Fourier marně hledal úplný důkaz toho, že libovolná funkce může být vyjádřena výše uvedenou řadou. Nepodařilo se mu ani stanovit nutné podmínky, které musí být splněny. Ve svých úvahách spoléhal hlavně na geometrickou evidenci:

> *Nic se nám nejeví k důkazům pravdivosti vhodnější než geometrické konstrukce. (viz [5]).*

Druhá připomínka byla spojena s nespokojeností Jeana Bapt. Biota (1774 – 1862), že Fourier necitoval jeho práci o odvození rovnice přenosu tepla z roku 1804. Přes tyto výhrady Fourier obdržel v roce 1811 Velkou cenu Akademie (Grand prix) s poznámkou komise, že metoda integrace rovnic vyžaduje zobecnění a zpřesnění.

Vědecké diskuse v Akademii

Po pádu Napoleona se Fourier vrátil do Paříže a v roce 1817 byl zvolen do Akademie věd. Když zemřel Jean Baptiste Delambre (1749 – 1822), sekretář matematického od-

dělení Akademie, stal se jeho nástupcem. Zvítězil tak nad Jeanem Bapt. Biotem a astronomem Françoisem Aragem. Krátce potom vyšlo jeho slavné pojednání *Analytická teorie tepla* (*Théorie analytique de la chaleur*), které již dříve připravil k vydání Jean Bapt. Jos. Delambre. Posledních osm let života strávil Fourier obranou svého díla. Kromě Biota byl jeho soupeřem také Simeon Denis Poisson (1781 – 1840), žák Mongeův, který vytvořil alternativní teorii vedení tepla a nesouhlasil s některými Fourierovými postupy. Jean Bapt. Joseph Fourier zemřel v Paříži 16. května 1830 po pádu ze schodů. Hořká poslední léta jeho života jsou patrně dnes již zapomenuta a Fourierovo jméno žije v mnoha oblastech i v 21. století dále (viz např. [18], [4], [11]).

2 Fourierovo dědictví

Fourierovi se nepodařilo dokončit práci o algebraických rovnicích. Vydal ji až jeho žák Claude Louis Navier (1785 – 1836) roku 1831. Dílo obsahuje řadu původních myšlenek. Speciálně je zde důkaz Fourierovy věty o poloze kořenů algebraické rovnice.

Definice funkce

Fourierova práce otevřela znovu otázku, co je to vlastně funkce? V [5] Fourier říká, že: *„Funkci $f(x)$ reprezentuje posloupnost hodnot nebo ordinát, z nichž každá je libovolná…Nepředpokládejme, že jsou tyto ordináty podrobeny nějaké společné zákonitosti…“* (podle anglického překladu v [11], s. 949). Ve skutečnosti však Fourier uvažuje jen o funkcích s konečným počtem bodů nespojitosti na konečném intervalu. Změnil tak představu o definici „*funkce*“ z 18. století. Algebraické a elementární funkce nestačily dlouho představovat prototyp „*funkce*“ a již bylo potřeba zabývat se novým vymezením tohoto důležitého pojmu a studovat takové vlastnosti jako je spojitost, diferencovatelnost, integrovatelnost atd.

Fourierovy řady

V teorii Fourierových řad dnes hraje důležitou roli Lebesgueův integrál. Nejdůležitější výsledky v tomto ohledu publikoval sám H. Lebesgue v roce 1905. Podle Riemanna jsou Fourierovy koeficienty a_n a b_n spojité a integrovatelné funkce konvergující k nule pro n jdoucí k nekonečnu. Lebesgueovo zobecnění pak znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x = 0,$$

když $f(x)$ je libovolná lebesgueovsky integrovatelná funkce, ať už spojitá či nespojitá (viz [4], [7], [11], [13]).

Pojem Fourierových řad může být rozšířen i na komplexní koeficienty

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \text{ kde } \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \mathrm{d}x.$$

Fourierova transformace

Fourierovou transformací (nebo též obrazem) funkce $f(x)$ nazýváme integrál

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \mathrm{d}x.$$

Podle věty o jednoznačnosti (viz např. [9, s. 62]) existuje za určitých předpokladů k Fourierovu obrazu jediný vzor a je určen pomocí inverzní Fourierovy transformace funkce f:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \mathrm{d}t.$$

Srovnání Fourierových řad s Fourierovou transformací je uvedeno např. v [12, s. 67]. Fourierova transformace se používá k řešení diferenciálních rovnic (viz [16], [9]). Má mnoho společných vlastností s Laplaceovou transformací (viz [4]). Jejich porovnání najde čtenář přehledně v díle [12, s. 79 – 97].

Pro numerické zpracování obrazu se používá diskrétní dvojrozměrná Fourierova transformace tvaru:

$$G(m,n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} g(j,k) \mathrm{e}^{-2i\pi(m\frac{j}{N} + n\frac{k}{N})},$$

a k ní inverzní Fourierova transformace

$$g(j,k) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} G(m,n) \mathrm{e}^{-2i\pi(j\frac{m}{N} + k\frac{n}{N})},$$

kde N je přirozené číslo. Tyto transformace se uplatňují např. tam, kde potřebujeme z obrázku odstranit nějaký nežádoucí jev (moiré, čáry, šum).

Metoda rychlé Fourierovy transformace (FFT – Fast Fourier Transform) se objevuje v jedné z prvních prací Cornelia Lanczose[3] z numerické analýzy. Ten již na

[3] Cornelius Lanczos (1893 – 1974), přítel Alberta Einsteina, vynikající matematik a fyzik, který ovlivnil základy vědy 20. století. Jeho práce se týkají numerické analýzy, aplikované matematiky, kvantové mechaniky a obecné relativity.

počátku čtyřicátých let 20. století zavedl novou maticovou metodu pro výpočet Fourierových koeficientů (viz [3]), kterou o 25 let později znovu objevil John W. Tukey a nazval ji **Fast Fourier Transform Algorithm**. Její hlavní myšlenka byla publikována v [1]. Používá se např. v počítačové tomografii k rychlému výpočtu inverzního Radonova integrálu, což umožňuje v reálném čase sledovat pohybující se orgány (srdce, plíce) v lidském těle.

Další aplikace

Komprese dat u formátu JPEG se provádí tak, že se nejprve bitová mapa rozdělí na čtverečky 8 krát 8 pixelů. Na každý blok se aplikuje kosinová transformace

$$\mathcal{F}(u,v) = \frac{2d(u)d(v)}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} c_{mn} \cos\left(\frac{2m+1}{2N}\pi u\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2N}\pi v\right),$$

kde $u, v = 0, 1, \ldots, N-1, d(k) = 1/\sqrt{2}$ pro $k = 0$ a $d(k) = 1$ pro $k > 0$. Výsledný obraz je tedy lineární kombinací „kosinusovek“ (resp. jejich dvojrozměrných součinů) a v paměti počítače se uchovávají jen koeficienty c_{mn}. Z frekvenčního spektra můžeme odstranit ty frekvence, které lidské smysly nevnímají, protože koeficient je příliš malý, a ušetřit tak místo v paměti počítače (viz např. [2], [10]) bez ztráty na viditelné kvalitě obrázku.

Kromě klasické úlohy – studia vlastních kmitů struny nebo využití ve výpočetní technice se s Fourierovou transformací setkáváme např. též v krystalografii při popisu složitých systémů, těles a molekul nebo v elektrotechnice při studiu elektrických obvodů (viz [12, s. 120 – 126]).

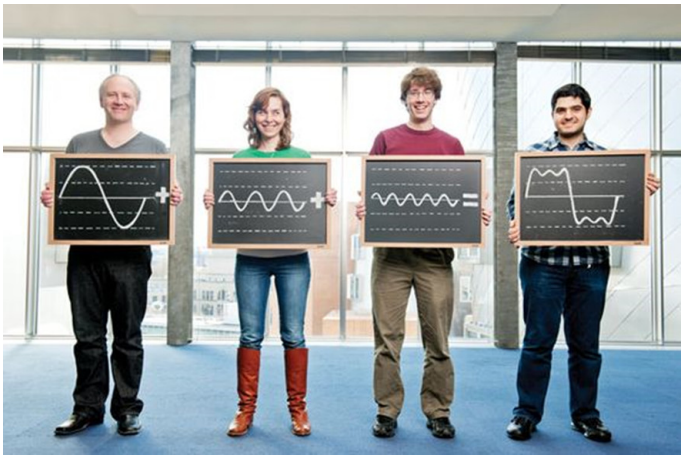
V práci [6, s. 23 – 25] je použita Fourierova transformace k důkazu toho, že pro každou vektorovou solenoidální funkci v ve dvou proměnných (tj. funkci, jejíž divergence je nulová) existuje proudová funkce φ určená jednoznačně až na konstantu taková, že

$$\operatorname{curl} \varphi = (\partial_2 \varphi, -\partial_1 \varphi) = v.$$

Obrácené tvrzení je zřejmé, neboť

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \varphi = 0.$$

Fourierovy řady se používají i při řešení úloh, které se na první pohled netýkají periodických jevů, např. rozpoznávání tvarů předmětů pomocí tzv. Fourierových deskriptorů (viz [17]) nebo dimenzionální redukce, která umožňuje převést řešení trojrozměrné okrajové úlohy na osově symetrické oblasti na řešení posloupnosti dvojrozměrných úloh, které se pak řeší metodou konečných prvků (viz [8], [12, s. 254]). Na mnohé další aplikace v elektrotechnice, mechanice a geofyzice upozorňují např. díla [2], [3], [5].



Obrázek 3. Ukázka Fourierovy transformace

3 Závěr

Zkoumání vlastností Fourierových řad přispělo nejen k rozvoji numerické matematiky, ale i čisté matematiky. Věnovala se mu další generace matematiků 19. století, např. Augustin-Louis Cauchy, Johann Peter Lejeune Dirichlet, Bernhard Riemann. Problém jednoznačnosti trigonometrických a Fourierových řad zaujal Georga Cantora natolik, že jej v roce 1872 dovedl k prvním úvahám o vznikající teorii množin.

Literatura – References

[1] Cooley, J. W., Tukey, J. W.: *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comp. 19, 1965, 297 – 301.

[2] Čížek, V.: *Diskrétní Fourierova transformace a její použití*. SNTL, Praha, 1981.

[3] Danielson, G. C., Lanczos, C.: *Some improvements in practical Fourier analysis and their application to X-ray scattering from liquids*. J. Franklin Inst. 233, 1942, 365 – 380.

[4] Edwards, R. E.: *Fourier series. A modern introduction*. 2 vol., Springer-Verlag, New York, 1979, 1982.

[5] Fourier, J. B. J.: *Théorie analytique de la chaleur*. Didot Paris, 1822.

[6] Girault, V., Raviart P. A.: *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*. Springer, Berlin, 1979.

[7] Hardy, G. M., Rogosinski, W.W.: *Fourierovy řady*. SNTL/Alfa, Praha, 1971.

[8] Heinrich, B.: *The Fourier-finite-element method for Poisson's equation in axisymmetric domain with edges*. SIAM J. Numer. Anal., 33, 1996, 1885 – 1911.

[9] Herrmann, L.: *Fourierovy řady*. Vydavatelství ČVUT Praha, 2002.

[10] Hlaváč, V., Sedláček, M.: *Zpracování signálů obrazů*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2000.
[11] Kline, M.: *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press, New York, 1972.
[12] Koukal, S., Křížek, M., Potůček, R.: *Fourierovy trigonometrické řady a metoda konečných prvků v komplexním oboru*. Academia, Praha, 2002.
[13] Lebesgue, H.: *Leçcons sur les séries Trigonométriques*. Paris, 1906.
[14] Mercier, B., Raguel, G.: *Résolution d'un problème aux limites dans un ouvert axisymétrique par éléments finis en r, z et séries de Fourier en θ*. RAIRO Anal. Numér. 16, 1982, 405 – 461.
[15] Pírko, Z., Veit, J.: *Laplaceova transformace*. SNTL, Praha, 1970.
[16] Rektorys, K.: *Přehled užité matematiky I*. Prometheus, Praha, 1995.
[17] Zahn, C. T., Roskies, R. Z.: *Fourier descriptors for plane closed curves*. IEEE Trans. Comput., C-21, 2002, 269 – 281.
[18] `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Fourier.html`.

Adresa autora:

Katedra aplikované matematiky, Fakulta informačních technologií ČVUT v Praze, Thákurova 9,
160 00 Praha 6, Česká republika
e-mail: `alena.solcova@fit.cvut.cz`

Zadania úloh 74. ročníka Matematickej olympiády

Kategória A

Úloha A-I-1. (*Patrik Bak*) Nech pre reálne čísla a a b majú výrazy $a^2 + b$ a $b^2 + a$ rovnakú hodnotu. Aká najmenšia môže táto hodnota byť?

Úloha A-I-2. (*Martin Panák, Josef Tkadlec*) Hracie kocky (rovnaké veľkosťou aj rozmiestnením čísel) k sebe prikladáme bočnými stenami tak, aby boli uložené do tvaru štvorca ľubovoľnej veľkosti a aby vždy na dvoch priliehajúcich bočných stenách boli rovnaké čísla. Koľko najviac rôznych čísel sa môže vyskytnúť na horných stenách kociek?

Úloha A-I-3. (*Patrik Bak*) Nájdite najväčší počet rôznych prirodzených čísel so súčtom 2024 takých, že každé z nich okrem najmenšieho je násobkom súčtu všetkých od neho menších.

Úloha A-I-4. (*Tomáš Bárta*) Nech ABC je taký trojuholník, že $|AB| = 13$, $|BC| = 14$, $|CA| = 15$. Jeho posunutím o vektor dĺžky 1 vznikne trojuholník $A'B'C'$. Určte najmenší možný obsah prieniku trojuholníkov ABC a $A'B'C'$.

Úloha A-I-5. (*Morteza Saghafian*) Samo nastúpil na prízemí nekonečne vysokého mrakodrapu do zvláštneho výťahu. Sú v ňom tlačidlá 0, 1, 2 a tak ďalej. Po prvom stlačení tlačidla pôjde výťah nahor a po každom ďalšom pôjde vždy opačným smerom ako naposledy, pričom po stlačení tlačidla k sa posunie vždy o 2^k poschodí. Navyše každé ďalšie stlačené tlačidlo musí mať menšie číslo ako to predošlé. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné n sa Samo môže dostať na n. poschodie práve dvoma rôznymi postupmi.

Úloha A-I-6. (*Michal Janík*) Označme J, K, L postupne stredy kružníc pripísaných stranám BC, CA, AB trojuholníka ABC. Priesečníky výšok trojuholníkov JBC, KCA, LAB označme postupne X, Y, Z. Dokážte, že trojuholníky ABC a XYZ sú zhodné.

Kategória B

Úloha B-I-1. (*Patrik Bak*) Z cifier 1 až 9 vytvoríme 9-ciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi. Potom každú jeho dvojicu po sebe idúcich cifier interpretujeme ako dvojciferné číslo a vezmeme jeho najmenší prvočíselný deliteľ. Môžeme tak získať práve dve rôzne prvočísla? Ak áno, určte všetky také dvojice prvočísel.

Úloha B-I-2. (*Patrik Bak, Anastasia Bredichina*) Nech ABC je trojuholník taký, že $|\sphericalangle BAC| = 45°$. K stranám AB a AC sú zvonku pripísané pravouhlé rovnoramenné trojuholníky ABP a ACQ s preponami AB, resp. AC. Označme R stred úsečky PQ. Dokážte, že dĺžka úsečky AR je polovica polomeru kružnice opísanej trojuholníku ABC.

Úloha B-I-3. (*Pavel Calábek, Jaroslav Švrček*) Pre ktoré kladné prirodzené čísla n sa dá rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky n rozrezať na zhodné konvexné dieliky tvorené z

a) 2,
b) 3

rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky 1?

Úloha B-I-4. (*Josef Tkadlec*)

a) Nájdite príklad dvojciferného prirodzeného čísla n takého, že číslo $1/n$ má vo svojom najkratšom desatinnom zápise za desatinnou čiarkou práve dve cifry.
b) Dokážte, že pre každé dve kladné prirodzené čísla k a l existujú práve dve kladné racionálne čísla, ktoré majú vo svojom najkratšom desatinnom zápise za desatinnou čiarkou práve k cifier a ich prevrátené hodnoty práve l cifier.

Úloha B-I-5. (*Patrik Bak*) Označme k kružnicu opísanú ostrouhlému trojuholníku ABC. Nech jej obraz v súmernosti podľa priamky BC pretína polpriamky opačné k polpriamkam BA a CA v bodoch D, resp. E rôznych od B, resp. C. Nech sa úsečky CD a BE sa pretínajú na kružnici k. Určte všetky možné veľkosti uhla BAC.

Úloha B-I-6. (*Patrik Bak*) Nech x, y, z sú kladné reálne čísla také, že $xy \geq 2$, $zx \geq 3$, $yz \geq 6$. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $13x^2 + 10y^2 + 5z^2$?

Kategória C

Úloha C-I-1. (*Josef Tkadlec*) Obdĺžnikový list papiera s rôznymi rozmermi a a b preložíme tak, že jeden z jeho rohov splynie s protiľahlým. Dokážte, že obsah vzniknutého päťuholníka je z intervalu $\left(\frac{1}{2}ab, \frac{3}{4}ab\right)$.

Úloha C-I-2. (*Jaromír Šimša*) Nech a a b sú prirodzené čísla také, že $a > b$, $a + b$ je deliteľné 9 a $a - b$ je deliteľné 11.

a) Určte najmenšiu možnú hodnotu čísla $a + b$.

b) Dokážte, že čísla $a + 10b$ a $b + 10a$ sú deliteľné 99.

Úloha C-I-3. (*Josef Tkadlec*) Ktoré obdĺžniky $a \times b$, pričom $a \leq b$, sa dajú rozdeliť na štvorce 1×1 pomocou práve 110 úsečiek jednotkovej dĺžky?

Úloha C-I-4. (*Ján Mazák*) Šachovnicovo ofarbenú tabuľku 4×4 s čiernym ľavým horným políčkom vypĺňame jednotkami a nulami. V každom štvorci 2×2, ktorý má čierne ľavé horné políčko, sú 2 nuly a 2 jednotky. Koľkými rôznymi spôsobmi je možné tabuľku vyplniť?

Úloha C-I-5. (*Jaroslav Švrček*) Nech P a Q sú postupne stredy strán BC a AC trojuholníka ABC. Nech rovnobežka s AC prechádzajúca stredom K úsečky PQ pretína priamku BQ v bode L a priamka PL pretína úsečku AC v bode M. Dokážte, že M je stred úsečky AQ.

Úloha C-I-6. (*Mária Dományová, Patrik Bak*) Štvorciferné číslo $\overline{abcd}$ s nenulovými ciframi nazveme *zrkadliteľné* práve vtedy, keď pripočítaním 9-násobku nejakého trojciferného čísla zapísaného pomocou troch rovnakých cifier vznikne číslo $\overline{dcba}$. Koľko zrkadliteľných čísel existuje?

Za Slovenskú komisiu Matematickej olympiády spracoval Stanislav Krajči
e-mail: stanislav.krajci@upjs.sk

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2023 (52)

História Slovenskej matematickej olympiády
Slovenská matematická olympiáda v období 2009-2020[1]

Peter Novotný

Abstract: An internal perspective on the Mathematical Olympiad from 2009 to 2010 in a country that was one of the founding countries (Czechoslovakia) of the International Mathematical Olympiad

Keywords: Mathematical Olympiad, history, talented youth

Súhrn: Vnútorný pohľad na Matematickú olympiádu v rokoch 2009 až 2010 v krajine, ktorá bola jednou z troch zakladajúcich členov Medzinárodnej matematickej olympiády.

Kľúčové slová: Matematická olympiáda, história, talentovaná mládež

MESC: M50

Za predsedu SKMO som bol vymenovaný 7. júla 2009 a môj nástupca bol vymenovaný 9. novembra 2020, teda na tomto poste som strávil viac ako 11 rokov.

Môj prvý kontakt s MO však nastal oveľa skôr. Mohol by som povedať, že hneď pri mojom narodení, keďže MO hrala dôležitú úlohu v mojej rodine už predtým – otec aj strýko boli účastníci Medzinárodnej matematickej olympiády (budem pre jej označenie ďalej používať zaužívanú medzinárodnú skratku IMO, napriek tomu, že slovenská skratka je MMO). V rodinnej tradícii som pokračoval, takže som sa poctivo zúčastňoval jednotlivých kategórií MO od ZŠ. Vyvrcholením mojej kariéry ako účastníka MO bola účasť na dvoch IMO a prvé miesto v celoštátnom kole MO.

Slovenskí žiaci so záujmom o matematiku majú to šťastie, že okrem MO je u nás dlhá a pevne zakorenená tradícia matematických korešpondenčných seminárov. Vďaka nim sa majú možnosť stretávať nie len na jednodňových súťažiach, ale viackrát ročne na táboroch, sústredeniach či výletoch, čím sa buduje skvelá komunita s trvalými priateľstvami a vzťahmi. Dôsledkom toho bolo, že už na strednej škole som sa popri riešení MO aktívne začal venovať aj organizovaniu seminára SEZAM pre žiakov ZŠ a neskôr na vysokej škole organizovaniu stredoškolského seminára

[1] Mgr. Peter Novotný, PhD., bol predsedom Slovenskej komisie matematickej olympiády v rokoch 2009 – 2020.

SKMS (neskôr KMS). I keď sa v manažérskych pozíciách necítim komfortne, silný vzťah k seminárom ma donútil prekonať túto osobnú bariéru a tak som sa v roku 2000 ocitol v pozícii hlavného vedúceho spomenutých korešpondenčných seminárov. Vybavovanie chát a autobusov na sústredenia, organizovanie stretnutí vedúcich, výber úloh, kopírovanie zadaní a riešení, príprava programu a prednášok, atď. sa tak počas celého vysokoškolského štúdia v rokoch 2000 – 2004 stali mojím poslaním.

Výber družstva na IMO a jeho prípravu mali v tom období na starosti práve vedúci korešpondenčných seminárov, príležitostne som sa tak začal zapájať aj do organizácie MO – ako lektor na výberovom a prípravnom sústredení. Zároveň sa v roku 2001 stal predsedom SKMO doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc. a predsedom krajskej komisie MO v Žilinskom kraji sa stal jeho kolega a môj otec doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc. Keďže o mojich aktivitách mali dobrý prehľad, v r. 2004 som dostal ponuku stať sa členom SKMO, ktorú som prijal.

Hneď po mojom vstupe do SKMO som sa stal aj členom úlohovej komisie MO, ktorá má na starosti výber úloh do jednotlivých kôl a v rámci toho aj hlavným editorom prípravy finálnych verzií slovenských zadaní a riešení. Prevzal som tiež úlohu hlavného organizátora výberových a prípravných sústredení pred IMO. V rokoch 2005 – 2009 som bol členom slovenskej delegácie na IMO. S Vojtechom Bálintom, ktorý bol v pozícii vedúceho slovenského družstva, som sa ako pozorovateľ zúčastňoval zasadnutí medzinárodnej jury. Počas chvíľ, ktoré som s ním takto strávil, ma začal „psychicky“ pripravovať na to, že by som po ňom mohol prebrať pozíciu predsedu SKMO. Stalo sa tak v r. 2009. Môj mandát predsedu začal oficiálne plynúť tesne pred IMO v r. 2009, na ktoré som ešte cestoval ako pozorovateľ. Obálku s menovaním za predsedu poslanú z ministerstva som si však našiel v pošte až po návrate z IMO.

Prvou úlohou predsedu po nástupe do funkcie je navrhnutie nového zloženia SKMO. Keďže nie som zástancom revolučných zmien a dávam prednosť menej radikálnej evolúcii, zloženie SKMO sa po mojom nástupe zmenilo len mierne. Počas celého môjho predsedníctva bol v úlohe podpredsedu SKMO predošlý predseda a ak sa menili nejakí predsedovia krajských komisií (ktorí sú súčasťou SKMO), bolo to zvyčajne na žiadosť predošlého krajského predsedu aj s odporúčaním, kto po ňom úlohu prevezme. Celkovo sa na začiatku a počas môjho mandátu udiali v zložení SKMO tieto zmeny (tituly uvádzam v čase zmeny, i keď viacerí uvedení už dnes majú vyššie tituly):

Ročník zmeny	Pôvodní členovia	Noví členovia
2009/2010	RNDr. Zuzana Frková doc. RNDr. Tomáš Madaras, PhD. doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc.	Mgr. Martin Kollár, PhD. doc. RNDr. Stanislav Krajči, PhD. Mgr. Štefan Gyürki, PhD. RNDr. Róbert Hajduk, PhD. doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD. doc. RNDr. Roman Soták, PhD.
2010/2011	Ing. Tomáš Lučenič (tajomn.)	PhDr. Peter Barát (tajomn.)
2011/2012	Mgr. Milan Demko, PhD. PaedDr. Anna Pobešková	Mgr. Ján Brajerčík, PhD.
2012/2013	PhDr. Peter Barát (tajomn.)	Mgr. Mária Gajarová (tajomn.)
2013/2014	doc. RNDr. Mária Lucká, CSc.	doc. RNDr. Dušan Holý, CSc. doc. Mgr. Ivan Cimrák, Dr.
2014/2015	Mgr. Mária Gajarová (tajomn.) doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc.	Mgr. Anna Sládeková (tajomn.)
2015/2016	RNDr. Soňa Pavlíková, CSc. Mgr. Anna Sládeková (tajomn.)	Mgr. Mária Bendová Ing. Milan Buch (tajomn.)
2016/2017	doc. RNDr. Dušan Holý, CSc. Ing. Milan Buch (tajomn.)	RNDr. Karol Gajdoš Mgr. Lucia Priščáková (tajomn.)
2018/2019	Mgr. Lucia Priščáková (tajomn.)	Barbora Knaperková (tajomn.)
2019/2020	RNDr. Róbert Hajduk, PhD.	

Bohužiaľ, prácu v komisii dvoch členov, Pavla Novotného a Róberta Hajduka, ukončilo ich úmrtie.

Ako z tabuľky vidno podľa poznámky v zátvorkách, tajomník z Iuventy (dnes už NIVAM), ktorý z titulu svojej funkcie tiež je členom SKMO, sa menil veľmi často.

Spomenúť musím aj členov, ktorí boli v SKMO počas celého môjho pôsobenia, a teda v predošlom zozname chýbajú:

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
RNDr. Monika Dillingerová, PhD.
prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.
RNDr. Ing. František Kardoš, PhD.
doc. RNDr. Ján Mazák, PhD.
RNDr. Eva Oravcová
Mgr. Martin Potočný
RNDr. Oliver Ralík
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.

Popri SKMO je zriadená ešte jedna komisia – úlohová. Tá má za úlohu prípravu zadaní a riešení všetkých kôl MO. Po rozdelení Československa v r. 1993 sa

zástupcovia oboch krajín v úlohovej komisii dohodli, že budú pokračovať v spoločnom výbere úloh aj naďalej a tento stav trvá dodnes, pretože benefity spoločného výberu vysoko prevyšujú nevýhody (jediná nevýhoda, ktorá mi napadá, je nutnosť synchronizovať termíny súťaže v oboch krajinách). Úlohová komisia má dve sekcie – jednu pre kategórie A, B, C a jednu pre kategórie Z5 – Z9. V r. 2009 pred mojím nástupom do funkcie malo Slovensko nasledovné zastúpenie:

Kategórie A, B, C:	doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc. Mgr. Tomáš Jurík doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc. Mgr. Peter Novotný, PhD. Mgr. Ján Mazák
Kategórie Z5 – Z9:	PaedDr. Svetlana Bednářová, PhD. RNDr. Monika Dillingerová, PhD. Mgr. Miroslava Smitková

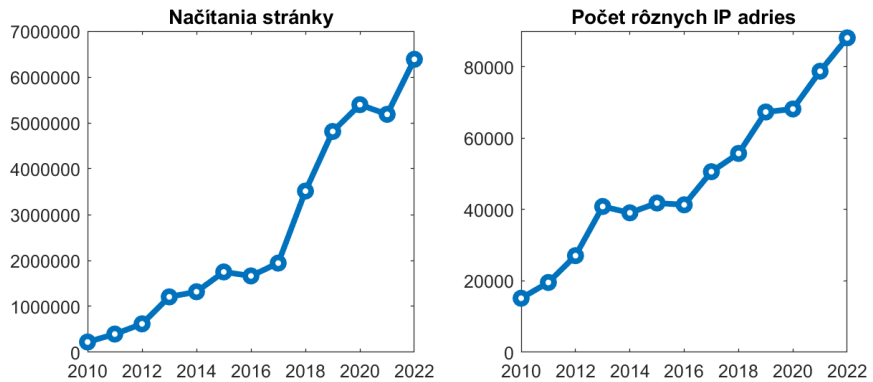
Najmä v sekcii pre základné školy situácia nebola priaznivá, keďže nie všetky členky sa mohli zasadnutí pravidelne zúčastňovať. Dal som si preto za úlohu rozšíriť komisiu o ďalších členov. Nových členov som oslovil medzi ľuďmi, ktorých som osobne poznal ako vedúcich korešpondenčného seminára SEZAM. V komisii v sekcii pre kategórie Z5 – Z9 tak postupne začali pracovať Mgr. Veronika Bachratá, Mgr. Erika Trojáková (od r. 2012 moja manželka – Erika Novotná), Alžbeta Bohiniková a Katarína Jasenčáková. V stredoškolskej sekcii rady doplnili Patrik Bak a Martin Melicher. (Aj v tomto odseku platí poznámka o tituloch v čase nástupu do komisie – dnes už sú mnohé iné).

Všetky úlohy zadávané v MO sú nové, nie sú preberané z iných súťaží. Každá úloha má pri sebe uvedeného aj autora – teda človeka, ktorý zadanie vymyslel. Česko a Slovensko majú pomer počtu obyvateľov približne 2 : 1 a podobné je to aj so zastúpením členov v úlohovej komisii. I keď nemám k dispozícii úplne kompletné dáta, porovnal som aspoň tie, ktoré mám. Vyšlo mi, že v r. 1994 – 2008 bol pomer úloh majúcich autora zo Slovenska približne 28%, zatiaľ čo v r. 2009 – 2020 to bolo približne 32%. To už pomerne dobre zodpovedá uvedenému pomeru 2 : 1. Dá sa teda povedať, že vďaka rozšíreniu počtu členov počas môjho predsedníctva sa podiel slovenských úloh v súťaži dostal na „spravodlivú“ úroveň. Celý tento výpočet a sprievodnú úvahu treba brať samozrejme s rezervou, je to myslené skôr pre pobavenie, i keď dáta som sa snažil pozbierať správne. V úlohovej komisii sme sa nikdy nepretekali, ktorý autor či ktorá krajina bude mať viac úloh.

Jedna z vecí, ktorá pred r. 2009 našej MO chýbala, bola oficiálna internetová stránka. Iuventa/NIVAM na svojich stránkach síce má sekciu venovanú

predmetovým olympiádam, kde sa dajú nájsť základné informácie o súťažiach a archívne dokumenty z predošlých rokov, no na formu a obsah týchto stránok nemá SKMO priamy vplyv. Mojím cieľom bolo preto vytvoriť jednoduchú stránku s prehľadnou navigáciou, kde sa dajú pohodlne zverejniť a následne rýchlo zobraziť akékoľvek zadania, riešenia, termíny či poradia MO a príslušných medzinárodných podujatí z predošlých či aktuálnych ročníkov, prípadne vyhľadať kontakty na jednotlivé regionálne komisie MO. Našťastie tvorba webových stránok patrila v tom čase medzi moje záľuby. Nebolo preto treba investovať do programátorov či administrátorov a aj vďaka tomu sa stránku už v decembri 2009 podarilo spustiť. Jej adresa je skmo.sk.

Nie som vyštudovaný informatik ani profesionálny dizajnér webu, takže stránka nepoužíva žiadne špeciálne technológie ani framework a profesionálny tvorca stránok by sa možno nad ňou chytal za hlavu. Napriek tomu sa stránka pomerne rýchlo začala tešiť obľube. Ak si dáte na Slovensku vyhľadať na internete (v najpopulárnejšom vyhľadávači) frázu „Matematická olympiáda“, zrejme stránku skmo.sk dostanete ako prvú v ponuke. Dokonca aj pri vyhľadaní skratky „MO“ je na prvom mieste – pred stránkou Ministerstva obrany. Stránka zaznamenáva návštevnosť a od jej spustenia do marca 2023 je evidovaných viac ako 36 miliónov načítaní (počítané načítanie ľubovoľnej sekcie či stiahnutie dokumentu) z viac ako 500 tisíc rôznych IP adries.



***Obr.1**: Návštevnosť stránky skmo.sk v rokoch 2010-2022*

Grafy na obrázku č.1 ukazujú, ako návštevnosť rástla v jednotlivých rokoch. Na ľavom grafe je celkový počet načítaní po jednotlivých rokoch, na pravom grafe počet rôznych IP adries, z ktorých bola stránka v daný rok aspoň raz načítaná.

Vo funkcii som sa nestihol ani poriadne ohriať a hneď v roku 2010 ma čakala jedna z najnáročnejších úloh počas celého funkčného obdobia – organizácia

Stredoeurópskej matematickej olympiády (ďalej budem opäť používať medzinárodnú skratku MEMO). Súťaž MEMO mala svoj prvý ročník v r. 2007 na podnet Rakúska a Poľska, ktoré chceli rozšíriť svoj bilaterálny formát dovtedy konanej súťaže na viac krajín. I keď ich predstava bola pôvodne o niečo komornejšia, napokon sa celkový počet krajín, ktoré sa do novej súťaže zapojili a zaviazali sa tiež súťaž pravidelne organizovať, ustálil na čísle 10. Slovensko sa zúčastňovalo od prvého ročníka, ktorý sa konal v rakúskom Eisenstadte (okrem nás a iniciátorov Rakúska a Poľska sa ho zúčastnili ešte Česko, Chorvátsko, Slovinsko a Švajčiarsko, neskôr sa pridali Maďarsko, Nemecko a Litva). Vtedy sme sa zaviazali, že zorganizujeme 4. ročník.

Hlavná myšlienka založenia MEMO bola dať šancu zúčastniť sa na medzinárodnej súťaži aj ďalším žiakom okrem šestice, ktorá cestuje na IMO. Slovensko tak na MEMO posiela vždy šesticu, ktorá je disjunktná so šesticou súťažiacich na IMO. Navyše máme pravidlo, že cestovať na MEMO môžu len žiaci, ktorí ešte nematurovali – teda ďalší rok ešte budú môcť riešiť MO. Formát súťaže sa líši od IMO – vyhoveli sme rakúskej a poľskej požiadavke, aby súťaž mala podobný formát ako ich stretnutia pred r. 2007, preto je súčasťou MEMO aj súťaž družstiev a súťaž jednotlivcov má len jeden súťažný deň so štyrmi úlohami. Avšak iné parametre sú podobné ako na IMO (náročnosť úloh, koordinácia súťažných riešení, výber úloh na súťaž).

I keď som mal isté skúsenosti z organizovania sústredení korešpondenčných seminárov a tiež česko-poľsko-slovenských stretnutí družstiev IMO, nikdy predtým som medzinárodné podujatie takého formátu neorganizoval. Zúčastnil som sa však prvých troch ročníkov MEMO – prvého a tretieho ako vedúci slovenského družstva, na druhom ročníku v Olomouci som pracoval ako koordinátor. Vďaka tomu som mal dobrú predstavu o každom aspekte podujatia a spätne môžem povedať, že sa ho podarilo zorganizovať na dobrej úrovni. Konalo sa v septembri 2010 v Strečne a podrobný report o ňom je napr. v ročenke 59. ročníka MO, ktorá sa dá stiahnuť na našej stránke (presný link je https://skmo.sk/dokument.php?id=2158).

Na konci môjho predsedníctva – v roku 2020 – sme mali na Slovensku MEMO opäť organizovať. Pandémia ochorenie COVID-19 však znemožnila jeho prezenčnú formu a tak sa bude MEMO na Slovensku konať znova práve tento rok – v auguste 2023, opäť v Strečne. I keď už nie som predsedom SKMO, rozhodol som sa vzhľadom na moje skúsenosti s organizáciou v r. 2010 byť predsedom organizačného výboru tohto podujatia.

V roku 2012 vznikla ešte jedna menšia medzinárodná súťaž pre ešte mladších žiakov – česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov (CPSJ). Iniciátorom bolo Poľsko, ktoré sa od r. 2001 zúčastňuje na česko-poľsko-slovenskom (CPS) stretnutí družstiev IMO a tak sme si s nimi vybudovali trvalé kontakty. Samotné CPS má za úlohu hlavne pripraviť žiakov na IMO a tak aj súťažný formát je totožný s IMO (dva

súťažné dni po tri úlohy). Pri CPSJ je cieľ iný – zapojiť už riešiteľov kategórie C (teda prvákov na stredných školách) do medzinárodných aktivít a motivovať tak ešte viac do ďalších rokov.

Od roku 2016 sa zmenil formát vyššie spomenutého CPS. Dovtedy sa podujatie s periódou 3 roky konalo na striedačku v jednotlivých krajinách. Naposledy sa tak v r. 2015 konalo na Slovensku vo Fačkovskom sedle. Nasledujúci rok malo mať na starosti Česko. Jeho zástupca v úlohovej komisii MO Michal Rolínek v tom čase pôsobil na IST Austria pri Viedni a podarilo sa mu vybaviť, aby sa podujatie konalo tam. Po výbornej obojstrannej skúsenosti sa odvtedy CPS konáva na IST Austria pravidelne každý rok (s výnimkou pandémie) a zúčastňuje sa ho aj rakúske družstvo.

Spomeniem ešte jednu medzinárodnú súťaž, ktorá vznikla počas môjho predsedníctva a ktorej sa zúčastňujeme: Európska dievčenská matematická olympiáda (EGMO). Prvý ročník sa konal v r. 2012, ale Slovensko sa zúčastňuje až od r. 2019. Súťaž je určená pre štvorice stredoškoláčok z európskych krajín, ale zúčastňujú sa jej neoficiálne aj mnohé mimoeurópske krajiny. Do istej miery sa jedná o kontroverznú súťaž, keďže jej existencia pozitívne diskriminuje jedno pohlavie (neexistuje podobná súťaž pre chlapcov). To je aj dôvod, prečo sme v SKMO otáľali, či sa vôbec do niečoho takého zapojiť. Súťaž je však veľmi populárna, v r. 2018 sme boli jedna z posledných krajín Európy, ktorá sa nezúčastnila.

V ďalších odsekoch sa pokúsim vyhodnotiť úspešnosť našich žiakov na IMO. Na verejnosti sa ako kritérium úspešnosti najčastejšie spomínajú počty a druhy prinesených medailí. Pred nezainteresovanými čitateľmi znie dobre informácia, že naši žiaci priviezli z IMO napr. 1 striebornú a 3 bronzové medaily, pretože si predstavia, že strieborná medaila znamená druhé a bronzová tretie miesto. Po obrátení informácie na pravú mieru, teda vysvetlení, že zlatú medailu získava približne 1/12 všetkých súťažiacich, striebornú 1/6 a bronzovú 1/4 (teda nejakú medailu získa približne polovica všetkých účastníkov) už výsledok nevyzerá až tak úžasne, veď skončiť v prvej polovici štartového poľa zvyčajne nebýva dôvodom na bujarú oslavu. Pokúsim sa preto teraz analyzovať úspešnosť Slovenska na IMO o niečo podrobnejšie.

Kritérium úspešnosti založím na číselnej hodnote počtu prinesených jednotlivých medailí za viacročné obdobie. Každá krajina posiela ma IMO svojich šesť potenciálne najlepších študentov. Krajiny s väčším počtom obyvateľov majú prirodzene väčšiu šancu mať medzi najlepšou šesticou lepších súťažiacich. Budem preto sledovať počet medailí predelený počtom obyvateľov danej krajiny. Inými slovami, budem sledovať, koľko kusov medailí na určitý počet obyvateľov vedia súťažiaci priniesť. Toto kritérium sa stane nespravodlivým v prípade, že v niektorých rokoch je krajina natoľko veľká/silná, že by dokázala priviezť aj viac ako 6 medailí danej kvality. Pri takých krajinách preto budú mať výpovednú hodnotu len porovnania s kvalitnejšími (napr. len zlatými) medailami, alebo ani s tými.

Začnem porovnaním za celkové obdobie rokov 1993 – 2022, teda od vzniku SR. Tabuľka č.1 uvádza priemerný počet medailí na 10 miliónov obyvateľov, ktoré krajina z jednej IMO priviezla.

Zlaté medaily	
Bulharsko	1,865
Singapur	1,368
Maďarsko	1,284
Macao	1,129
Srbsko	1,126
Severná Kórea	0,800
Izrael	0,774
Rumunsko	0,704
Mongolsko	0,686
Taiwan	0,625
Hongkong	0,608
Južná Kórea	0,592
Moldavsko	0,577
Bielorusko	0,511
Chorvátsko	0,478
Austrália	0,362
Kazachstan	0,343
Gruzínsko	0,340
Kanada	0,339
Slovensko	**0,310**
Ukrajina	0,306
Rusko	0,248
Vietnam	0,224
Česko	0,223
Irán	0,222
Nórsko	0,205
Poľsko	0,201
Holandsko	0,176
Slovinsko	0,159
Thajsko	0,158

Zlaté a strieborné medaily	
Lichtenštajnsko	20,736
Singapur	5,606
Bulharsko	5,460
Mongolsko	3,932
Macao	3,891
Maďarsko	3,871
Srbsko	3,712
Moldavsko	3,395
Hongkong	3,336
Arménsko	3,257
Izrael	3,198
Čierna Hora	3,020
Slovensko	**2,782**
Luxembursko	2,660
Chorvátsko	2,630
Bielorusko	2,478
Estónsko	2,472
Gruzínsko	2,301
Rumunsko	2,085
Taiwan	2,035
Severná Kórea	1,966
Lotyšsko	1,717
Česko	1,409
Austrália	1,365
Severné Maced.	1,307
Slovinsko	1,297
Island	1,229
Kazachstan	1,203
Južná Kórea	1,104
Litva	1,038

Všetky medaily	
Lichtenštajnsko	105,675
Macao	25,806
Luxembursko	14,810
Mongolsko	12,124
Estónsko	10,831
Arménsko	10,588
Singapur	10,370
Island	10,056
Moldavsko	9,856
Severné Maced.	9,190
Chorvátsko	8,931
Gruzínsko	8,592
Slovinsko	7,866
Slovensko	**7,843**
Lotyšsko	7,800
Bulharsko	7,223
Hongkong	7,115
Izrael	6,967
Litva	6,762
Srbsko	6,632
Bosna a Herceg.	5,968
Cyprus	5,961
Maďarsko	5,648
Bielorusko	5,236
Čierna Hora	5,028
Nový Zéland	5,013
Česko	3,781
Švajčiarsko	3,057
Nórsko	2,999
Turkmenistan	2,922

***Tab. 1**: Priemerný počet medailí na 10 miliónov obyvateľov v rokoch 1993-2022.*

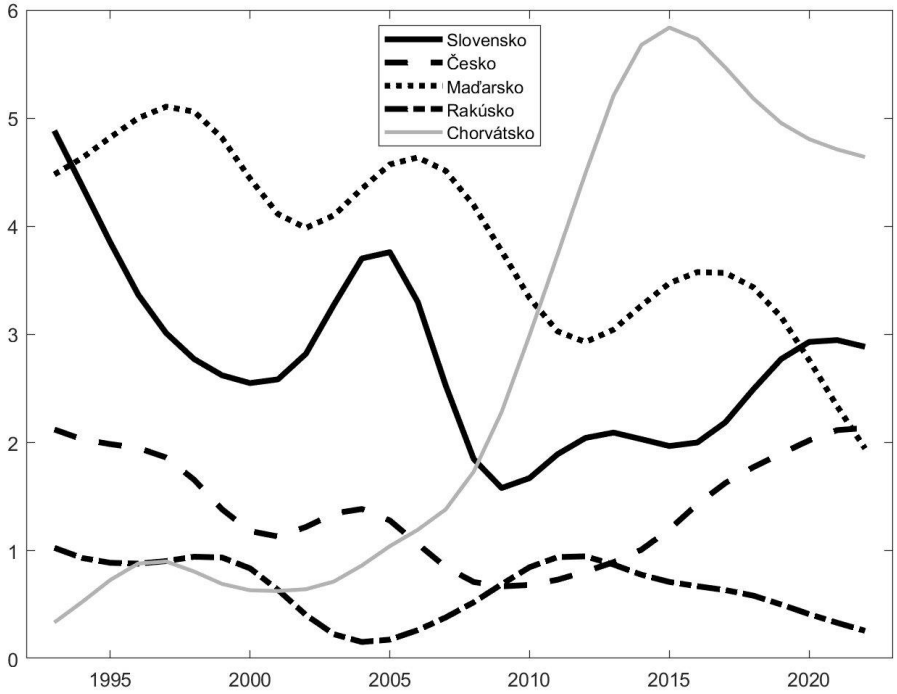
Uvedených je vždy 30 krajín s najvyššou hodnotou daného ukazovateľa. Dá sa povedať, že Slovensko si vzhľadom na takúto štatistku vedie pomerne dobre. V tretej tabuľke už aj Slovensko je „poškodené“ tým, že niektoré roky sme získali plný počet 6 medailí (konkrétne 7-krát z 30 účastí) a teda keby sme mali možnosť poslať na IMO viac súťažiacich, zrejme by sme doniesli o niečo viac medailí.

Použitá metrika je pomerne „citlivá“ pri príliš malej krajine/príliš malom počte obyvateľov. Skrátka, ak sa náhodou nájde v malej krajine študent, ktorý získa jedinú medailu za túto krajinu za celých 30 rokov, ukazovateľ prudko vyskočí. Dali by sa

nájsť aj mnohé ďalšie výhrady voči takémuto porovnávaniu krajín, ale rozhodne sa jedná o zaujímavú a málokedy prezentovanú štatistiku.

Uvedené tabuľky porovnávajú jednotlivé krajiny celkovo za dlhé obdobie, ale nezachytávajú žiadny trend, ako sa zvolený ukazovateľ vyvíjal v čase. To môže byť užitočné pri sledovaní, či sa krajina dlhodobo skôr zlepšuje alebo zhoršuje. Namiesto priemeru za celé dlhé obdobie teda budeme počítať priemer za kratšie obdobie okolo sledovaného roku, pričom hodnoty v okolí +/−5 rokov spriemerujeme váženým priemerom používajúcim ako váhy tzv. gaussovské okno. Tým vyhladíme príliš veľké skoky, ktoré by sme dostali, keby sme ukazovateľ pozorovali po jednotlivých rokoch. Keďže nás zaujíma Slovensko, ktoré je príliš malé na častý výskyt zlatých medailí, ale zároveň má potenciál mávať občas viac ako 6 všetkých medailí, zameriame sa na získané aspoň strieborné medaily, teda sledujeme, koľko študentov sa umiestnilo v prvej štvrtine poradia. Pripomínam, že inak sa jedná o rovnaký ukazovateľ ako v skorších tabuľkách, teda získaný počet medailí na jednej IMO prepočítaný na 10 miliónov obyvateľov. Výsledok je znázornený v grafe nižšie. Pre zaujímavosť sú v ňom zobrazené aj porovnateľne veľké krajiny z nášho regiónu, pre ktoré by mala byť výpovedná tá istá štatistika. Zdá sa, že trend od r. 2009 je pre Slovensko povzbudivý.

Pred záverom priznám, v čom som počas môjho predsedníctva zlyhal. V minulosti sme po každom roku vydávali ročenku MO, teda knižku, v ktorej boli všetky zadania a riešenia úloh z daného ročníka súťaže a tiež reporty z jednotlivých medzinárodných súťaží a sústredení. Od 51. ročníka MO, teda od školského roku 2001/2002, som bol hlavným editorom týchto ročeniek. Ako predseda som túto činnosť naďalej vykonával až do 63. ročníka (2013/2014). No po tomto období už ročenky prestali vychádzať. Dôvodom je, že ministerstvo (cez Iuventu) zrušilo možnosť financovať tlač ročeniek z rozpočtu MO. Na niekoľko ročníkov sa ešte podarilo získať grant na ich tlač, ale popri predsedovaní mi už nezostala ďalšia energia na zháňanie ďalších grantov ani na prípadné vytvorenie ročeniek aspoň v elektronickej forme.



Graf 1: *Počet strieborných a zlatých medailí na jednej IMO prepočítaný na 10 miliónov obyvateľov.*

Predsedníctvo som v r. 2020 odovzdal prof. RNDr. Stanislavovi Krajčimu, PhD. Ak nepočítam, že som ho zažil ako prednášateľa na niektorej akcii, kým som bol stredoškolák, poznám ho od celoštátneho kola MO v r. 2005 na Zemplínskej šírave, ktoré pomáhal organizovať. Bolo to prvé celoštátne kolo, na ktorom som bol ako organizátor. Tiež sa ako stredoškolák zúčastnil IMO. Od r. 2009 viedol krajskú komisiu MO v Košiciach. Na MEMO v Strečne v r. 2010 bol jedným z koordinátorov a v r. 2016 a 2019 bol vedúcim slovenského družstva na IMO. V Košiciach na PF UPJŠ má MO dlhodobo výbornú podporu – je odtiaľ viacero členov SKMO. Som teda presvedčený, že aj v ďalšom období bude SKMO pod vedením človeka, ktorému na MO záleží a venuje jej veľké množstvo energie.

Adresa autora: Peter Novotný, Katedra softvérových technológií, Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina
e-mail: peter.novotny@fri.uniza.sk

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2024 (53)

Od tornáda k firenádu

Jozef Beňuška

Abstract: A water vortex or an air vortex – a tornado is a fascinating phenomenon and the most dangerous concentration of energy that nature can create. During swirling, a column of rotating fluid is formed. Tornadoes appear in many places around the world and are very destructive. A tornado can pull in a wooden house or lift a train. Do water vortices and air vortices share the same physical basis? Water or air vortices are relatively well-known, but the terms 'fire vortex,' 'fire tornado,' or 'firenado' are not as well-known.

Key words: vortex, tornado, fire tornado, pyrogenetic tornado, experiment

Súhrn: Vodný vír alebo vzdušný vír – tornádo je fascinujúci fenomén, je najnebezpečnejšou koncentráciou energie, akú príroda dokáže vytvoriť. Pri vírení sa vytvára stĺpec krútiacej sa tekutiny. Tornáda sa objavujú na mnohých miestach sveta a sú veľmi ničivé. Tornádo dokáže vtiahnuť drevený dom, zodvihnúť vlak. Majú vodný vír a vzdušný vír spoločný fyzikálny základ? Vodný alebo vzdušný vír sú pomerne známe, ale „ohňový vír“, „ohňové tornádo“ či „firenado“ nie je natoľko známy pojem.

Kľúčové slová: vír, tornádo, ohňové tornádo, pyrogenetické tornádo, experiment

MESC: M50

Každý z nás už videl vír vznikajúci pri vypúšťaní vody z umývadla. Čo je príčinou jeho vzniku a ktorým smerom sa otáča? Smer otáčania zvyčajne býva spájaný s vplyvom zotrvačnej, tzv. Coriolisovej sily, ktorá sa prejavuje v rotujúcich vzťažných sústavách, a v tomto prípade by rotujúca vzťažná sústava mala byť Zem otáčajúca sa okolo vlastnej osi. Pôsobením Coriolisovej sily vraj vodný vír na severnej pologuli rotuje v smere hodinových ručičiek, a na južnej pologuli proti smeru hodinových ručičiek. Aká je však pravda? Aby sa vplyv sily na pohyb telesa mohol prejaviť, musí byť sila dostatočne veľká, alebo musí dostatočne dlho trvať, aby vyvolal pozorovateľný efekt na telese. Ale veľkosť Coriolisovej sily je veľmi malá vzhľadom na iné vplyvy, a voda z umývadla stihne vytiecť oveľa skôr, ako by sa vplyv Coriolisovej sily na pohybe vytekajúcej vody prejavil.

Obr. 1: *Rotácia vody v umývadle*

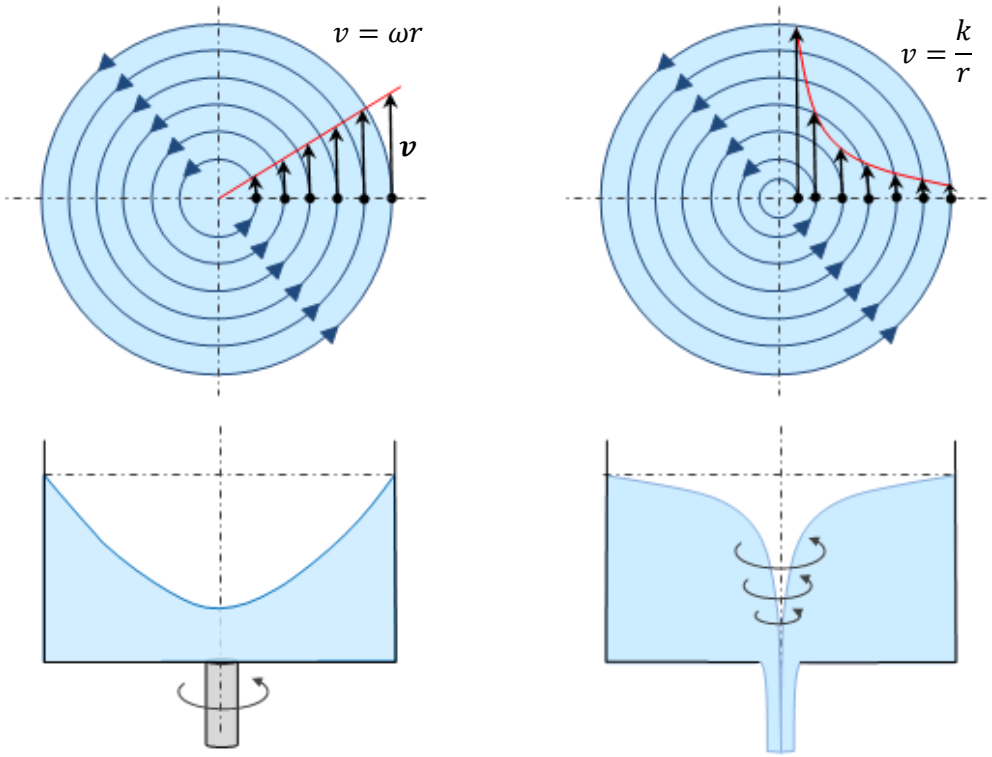
Pre smer rotácie víru sú v skutočnosti dôležité malé vodné prúdy, ktoré vo vode ostali po napustení. Významný vplyv má tiež geometrický tvar umývadla. Pri vytekaní vody sa zmenšuje jej vzdialenosť od miesta výtoku. Vzhľadom na zákon zachovania momentu hybnosti sa preto aj malé a nepozorovateľné začiatočné rýchlosti vody po priblížení k výtoku zväčšujú a vzniká vír. Ak by sme vodu po napustení nechali dlhý čas odstáť, umývadlo by bolo symetrické, veľmi hladké a zátku by sme nevyťahovali nahor (to by prúdy vo vode opäť vytvorilo), vtedy môže mať Coriolisova sila rozhodujúce slovo pri určení smeru budúcej rotácie.

Čo je to vlastne vír? Podľa definície je to úkaz, ktorý vzniká prudkým krúživým pohybom častí niečoho (najčastejšie vody) okolo zvislej osi a má obyčajne tvar lievika. Kľúčovým v dynamike vírov je opis rotačného pohybu v kvapaline.

Existujú dva dôležité špeciálne prípady:

1) *vynútený vír* – kvapalina sa otáča ako tuhé teleso, to znamená, že uhlová rýchlosť otáčania ω voči osi rotácie je pre každú jej časť rovnaká, konštantná.
2) *voľný vír* – obvodová rýchlosť častíc v je nepriamo úmerná vzdialenosti r od osi, vrstvy kvapaliny sa po sebe „šmýkajú“.

Pohyb tekutiny vo víre vytvára dynamický tlak $p_\mathrm{d} = \frac{1}{2}\rho v^2$, ktorý sa mení v súlade s Bernoulliho rovnicou, a spolu so statickým tlakom p_s vytvára celkový tlak $p = p_\mathrm{s} + p_\mathrm{d}$. Tu ρ je hustota kvapaliny a v je rýchlosť kvapaliny voči bodu, v ktorom tlak meriame. Kým statický tlak pôsobí v kvapaline rovnako vo všetkých smeroch, dynamický tlak pôsobí len v smere pohybe kvapaliny. Dynamický tlak teda pôsobí maximálnou silou na plochu postavenú kolmo k prúdeniu kvapaliny, kým na plochu rovnobežnú s prúdom kvapaliny nepôsobí.



Obr. 2: *Možnosti rotačného pohybu kvapaliny. Vľavo vynútený vír, vpravo voľný vír.*

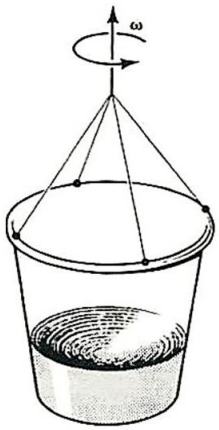
Vynútený vír

Ak kvapalina rotuje ako tuhé teleso, dynamický tlak p_{d} je priamo úmerný druhej mocnine vzdialenosti r od osi. Voľná hladina kvapaliny tvorí konkávny rotačný paraboloid, ktorého os je zhodný s osou rotácie.

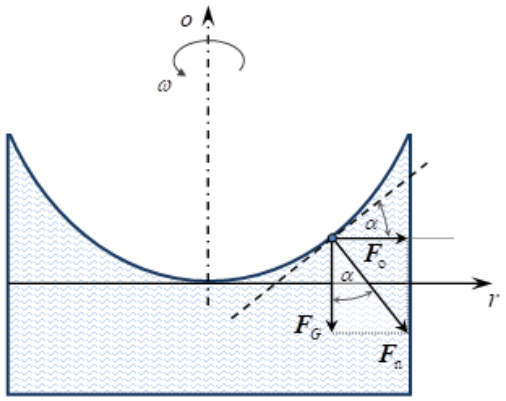
Napríklad, ak sa vedro s vodou otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou ω okolo svojej zvislej osi, voda sa bude nakoniec otáčať ako tuhé teleso. Častice sa potom pohybujú pozdĺž kružníc, pričom ich rýchlosť $v = \omega r$. V tomto prípade voľný povrch vody bude mať tvar rotačného paraboloidu.

Toto je možné dosiahnuť, ak na rotujúcu podložku umiestnime nádobu s vodou, alebo zavesenú nádobu s vodou roztočíme.

Pri určení tvaru povrchu rotujúcej kvapaliny v nádobe môžeme využiť Newtonove zákony. Situáciu opíšeme v neinerciálnej vzťažnej sústave, vzhľadom ku ktorej je kvapalina v pokoji. Na kvapalinu pôsobia sily: vo zvislom smere nadol tiažová sila F_G, vo vodorovnom smere zotrvačná (inerciálna) sila F_{o}. Ich súčet dáva silu F_{n}.



Obr. 3: *Vznik vynúteného víru v rotujúcej nádobe s kvapalinou*

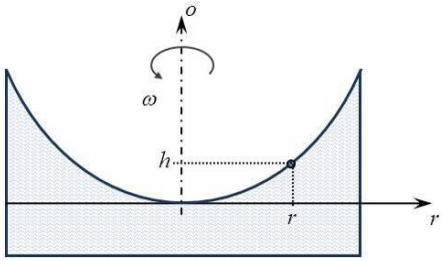


Obr. 4: *Silové pomery v rotujúcej kvapaline.*

Hladina vody zaujme taký smer, aby sila F_n mala smer kolmý k dotyčnici jej povrchu v danom bode.

Veľkosť inerciálnej sily pôsobiacej na kvapalinu hmotnosti m závisí od uhlovej frekvencie jej rotácie ω a vzdialenosti r od osi rotácie $F_o = m\omega^2 r$. S narastajúcou vzdialenosťou r od osi rotácie kvapaliny sa odstredivá sila sa zväčšuje.

Tiažová sila pôsobiaca na kvapalinu s hmotnosťou m je konštantná, $F_G = mg$. Z obr. 4 vyplýva, že sklon povrchu kvapaliny voči vodorovnému smeru v určitom mieste je daný uhlom α



Obr. 5: *Obrázok a rovnica popisujú závislosť hĺbky hladiny rotujúcej kvapaliny h od vzdialenosti od osi rotácie r je rovnica paraboly, h_0 je hĺbka kvapaliny v jej strede.*

$$s = \tan\alpha = \frac{F_o}{F_G} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

S rastúcim r – čo je vzdialenosť od osi rotácie, sa zväčšuje tangens uhla α a aj samotný uhol α, hladina kvapaliny je strmšia, má väčší sklon s.

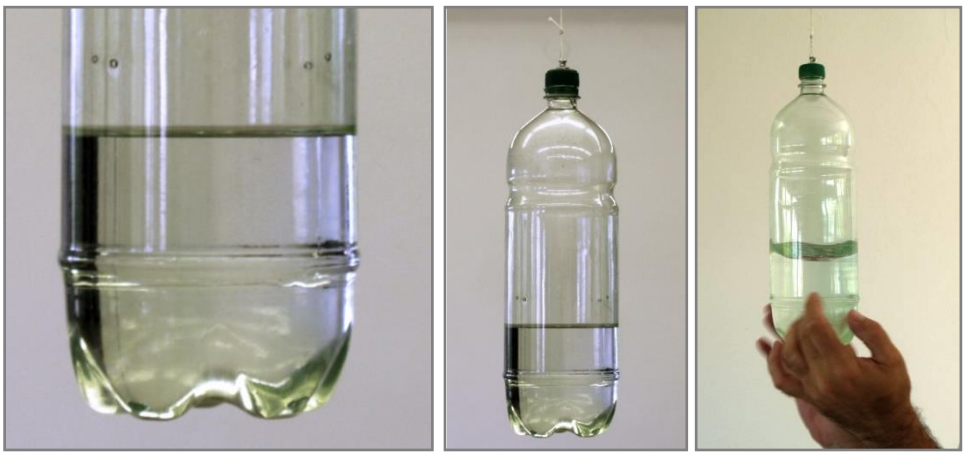
Posledný uvedený vzťah umožňuje vyjadriť závislosť hĺbky hladiny rotujúcej kvapaliny h od vzdialenosti od osi rotácie r. Odvodenie vyžaduje dôsledné použitie matematiky (nie je cieľom nášho príspevku), uvádzame záujemcom iba základné vzťahy:

$$s = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} = \frac{\omega^2 r}{g},$$
$$h(R) - h(0) = \int_0^R \frac{\omega^2 r}{g}\,\mathrm{d}r,$$
$$h(R) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_0.$$

Experiment s vynúteným vírom

Vynútený vír vytvoríme v plastovej fľaši naplnenej vodou a zavesenej cez prevŕtaný vrchnák na špagátiku. Fľašu najskôr natočíme tak, že ju budeme otáčať okolo zvislej osi. Špagátik sa postupne skrúti. Po uvoľnení sa fľaša roztočí, spolu s ňou aj voda v nej. Voľná hladina vytvorí tvar identický s tvarom rotačného paraboloidu. S rastúcou frekvenciou sa hĺbka rotačného paraboloidu zväčšuje.

V stene fľaše, približne v polovici jej výšky, vytvoríme štyri otvory s priemerom asi 1 mm tak, aby všetky boli v jednej rovine, rovnobežnej s dnom fľaše. Pre vytvorenie otvorov je vhodné použiť ihlu, ktorej koniec nahrejeme nad plameňom kahana. Potom do fľaše nalejte vodu asi 1-1,5 cm pod vytvorené otvory, fľašu zaveste a natočte.



Obr. 6: *Experiment s vynúteným vírom, detail.*

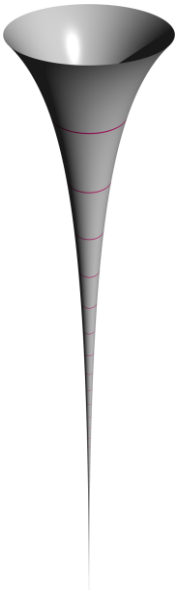
Pozerajme sa na vodu z neinerciálnej sústavy fľaše. Na malé časti vody pôsobí inerciálna (zotrvačná) sila, ktorá ich tlačí smerom k stene fľaše. Vďaka vnútornému treniu pohyby ustanú a voľná hladina vody sa ustáli v tvare rotačného paraboloidu. Hladina rotujúcej kvapaliny s rastúcou frekvenciou rotácie pri okraji stúpa nahor. Ak

dosiahne otvory v stene fľaše, začne vystrekovať z fľaše von. Rýchlosť, ktorou kvapalina opúšťa fľašu, závisí Od tlaku vody v kvapaline pri otvore, teda od dynamického tlaku, inými slovami od veľkosti zotrvačnej sily, ktorá na kvapku pôsobí. Kvapalina, ktorá vyteká z fľaše, koná vodorovný vrh, ale vďaka rotácii sú trajektórie vodorovného vrhu vytekajúcej kvapaliny stočené a vytvárajú zaujímavé tvary. Je to prejav Coriolisovej sily, ale len vo vzťažnej sústave spojenej s fľašou je pohyb takto komplikovaný. Pri pohľade na kvapky zo sústavy triedy (laboratórna, inerciálna vzťažná sústava), kvapky sa pohybujú presne ako pri vodorovnom vrhu, lebo na nich pôsobí len gravitačná sila, inerciálne sily v tejto vzťažnej sústave sú nulové.

***Obr. 7**: Experiment s vynúteným vírom, detail.*

Voľný vír

Ak kvapalina nerotuje ako tuhé teleso, dynamický tlak sa mení nepriamo úmerne so vzdialenosťou od osi. Tvar vytvorený na voľnom povrchu kvapaliny sa nazýva hyperboloid, alebo „Gabrielov roh". Tento tvar telesa je neobyčajný. Dá sa naplniť vodou, ale nedá sa nafarbiť. Gabrielov roh je totiž teleso, ktoré má konečný objem, ale nekonečný povrch. Ako sa roh predlžuje donekonečna, neustále sa zužuje, takže objem elementu jednotkovej výšky klesá k nule a od istého momentu je súčet všetkých elementárnych objemov konečný. Súčet povrchov elementárnych objemov je však nekonečný. Povrch rastie donekonečna.

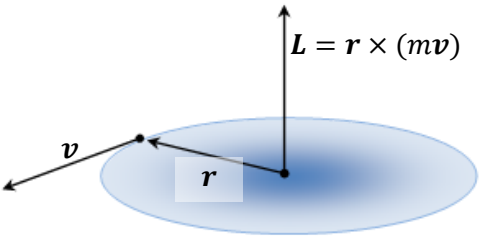


Obr. 8 vľavo: *Tvar povrchu rotačného hyperboloidu - povrchu rotujúcej kvapaliny.*
Obr. 9 (vpravo): *Emil Demeter, bývalý vynikajúci učiteľ chémie na Gymnáziu Viliama Paulinyho-Tótha v Martine, pozoruje Gabrielov roh.*

Názov je spojený s archanjelom Gabrielom ako anjelom, ktorý má trúbiť na roh pri oznámení súdneho dňa a prepojí tak nekonečno s božskosťou. Vlastnosti takéhoto tvaru prvýkrát popísal taliansky fyziky a matematik Evangelista Torricelli.

Ako vlastne voľný vír vzniká? Predstavme si vytekanie vody z umývadla. Najskôr je odtok uzavretý a v umývadle je voda. Vodu mierne roztočíme a zátku z odtoku vytiahneme. Voda začne vytekať, najskôr tá, ktorá je najbližšie k otvoru, na jej miesto sa postupne dostáva voda vzdialenejšia od otvoru.

Jedna z najdôležitejších fyzikálnych veličín, ktorá vyjadruje množstvo otáčavého pohybu, je moment hybnosti. Moment hybnosti sa zachováva. Pre názornosť, uvažujme, symetrickú nádobu. Moment hybnosti L častice kvapaliny vzhľadom k osi nádoby je určený súčinom jej hmotnosti m, vzdialenosti r od osi nádoby (a tým osi rotácie) a obvodovej rýchlosti v tejto častice.



Obr. 10*: Moment hybnosti rotujúceho telesa.*

Ak vzdialenosť častíc kvapaliny od osi nádoby klesá, musí v rovnakom pomere narastať ich obvodová rýchlosť. Preto je v blízkosti osi rotácie rýchlosť pohybu kvapaliny vysoká.

V súlade s Bernoulliho rovnicou (pre ideálnu kvapalinu)

$$p_{\mathrm{d}} + p_{\mathrm{s}} \equiv \frac{1}{2}\rho v^2 + p_{\mathrm{s}} = \text{konšt.}$$

a dynamický tlak p_{d} v miestach s vyššou rýchlosťou zvyšuje, kým statický tlak p_{s} sa zmenšuje, to spôsobí vtiahnutie predmetov (ktoré sa vo víre ocitnú blízko k osi víru) do víru, a následne pod hladinu.

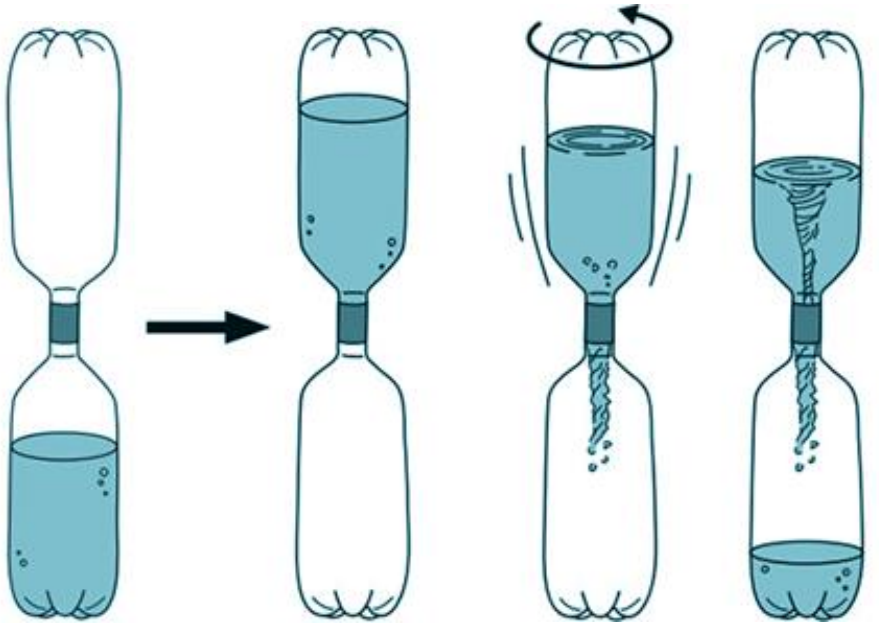
Experiment s voľným vírom. Ako preliať vodu z fľaše do fľaše?

Obr. 11: *Vytvorenie pomôcky pre experiment.*

Pomôcku pre experiment vytvoríme nasledovne. Dve plastové fľaše spolu spojíme buď špeciálnou pomôckou, alebo dvoma zlepenými vrchnákmi, v ktorých je prevŕtaný otvor s priemerom cca. 6-7 mm. Jedna fľaša musí byť naplnená do ¾ vodou, v druhej je vzduch. Aby sa neskôr zabránilo vytvoreniu podtlaku vo fľašiach, je vhodné dať pred uzavretím fliaš otvorenú prázdnu fľašu na niekoľko minút do chladničky. Ochladením vzduchu v nej klesne tlak a nasaje vzduch. Po uzavretí dvojice fliaš sa následne vzduch vo fľaši zohreje na okolitú teplotu a jeho tlak sa zvýši.

Po prevrátení fliaš tak, aby fľaša s vodou bola hore a fľaša so vzduchom bola dolu, môžeme pozorovať, ako striedavo preteká voda v malých množstvách z hornej fľaše do dolnej, a vzduch vo forme bubliniek z dolnej do hornej fľaše. Tento dej je veľmi pomalý.

Ak chceme prelievanie urýchliť, zvyčajne stlačíme hornú fľašu s vodou, tým sa najskôr časť vody pretlačí do dolnej fľaše, a následne sa v hornej časti fľaše vytvorí



Obr. 12: *Prelievanie vody a vzduchu. Vznik voľného víru – „tornáda“ v hornej fľaši.*

podtlak. Po uvoľnení niekoľkých bubliniek, ktoré prejdú z dolnej fľaše do hornej, sa tento tlak vyrovná. Ak najskôr stlačíme fľašu so vzduchom, pozorujeme výrazný prechod vzduchu vo forme bubliniek z dolnej fľaše do hornej, a následne po uvoľnení sa preleje voda z hornej fľaše do dolnej.

Plynulejšie prelievanie vody a vzduchu medzi fľašami zabezpečíme tak, že spojené fľaše v hornej časti prudko roztočíme tak, aby voda v hornej časti začala rotovať – vytvorila vodný vír, „tornádo“. V strednej časti víru je vzduchový otvor medzi hornou a dolnou fľašou, ktorým prúdi vzduch z dolnej fľaše do hornej bez prekážky. Po okrajoch fliaš prúdi voda z hornej fľaše do dolnej.

Keď začneme točiť s fľašou a vodou, bočné časti fľaše neustále menia smer pohybu vody. Výsledkom je, že voda sa tlačí proti stene fľaše. Aj točiaci sa vzduch sa tlačí smerom von, ale má menšiu hustotu ako voda, preto ostáva v strede fľaše. Zároveň pôsobením tiažovej sily voda s väčšou hustotou tečie aj smerom nadol a vytláča vzduch s menšou hustotou z dolnej do hornej fľaše.

Akonáhle sa takéto vírivé prúdenie vo fľaši vytvorí, môžeme s fľašou prestať točiť. Napriek tomu je voľný vír vo fľaši udržiavaný a voda preteká nadol naďalej. Pri prúdení vody smerom nadol sa jej potenciálna energia mení na energiu kinetickú. Tento proces prekonáva trenie a udržiava prúdenie v pohybe.

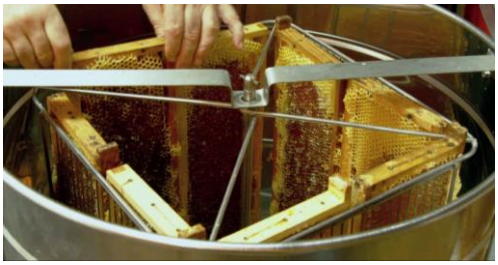
Obr. 13: *Uloženie guľôčok z polystyrénu v rotujúcej vode.*

Rozdelenie látok podľa hustoty môžeme demonštrovať aj tak, že do vody pridáme drobné polystyrénové guľôčky. Polystyrén má hustotu $10 - 35\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, a teda pláva na voľnej hladine vody. Po roztočení fľaše a vytvorení vodného víru sú polystyrénové guľôčky vďaka svojej malej hustote (v porovnaní s vodou) sústredené v strede rotujúcej vody.

Obr. 14: *Sedimentovaná krv.*

Oddelenie látok pri rotácii na základe ich rozdielnej hustoty má veľké využitie v technológiách. V nemocničných laboratóriách na analýzu krvi je potrebné jej odstreďovanie. V špeciálnych odstredivkách – centrifúgach – nastáva oddeľovanie krvných elementov od plazmy, respektíve krvnej zrazeniny od séra. Uzavreté odberové skúmavky s krvou sa umiestňujú do tzv. rotora, kde pomocou odstredivej sily nastáva sedimentácia látok s vyššou hustotou.

Včelári pri svojej práci používajú tzv. *medomet* (extraktor). Je to mechanické zariadenie na získavanie včelieho medu zo včelích plástov. Odviečkované zásobné plásty sa umiestňujú naplocho k stenám medometu a po roztočení otočného bubna je z odviečkovaných buniek med vytáčaný



Obr. 15: *Odstreďovanie medu.*

Obr. 16: *Smotana na mlieku a odstredivka mlieka.*

na steny medometu, odkiaľ steká na dno a ústím vyteká do pripravenej nádoby na med.

Pri spracovaní mlieka je prvým krokom odstredenie. Rozdelenie surového mlieka na odtučnené (odstredené) mlieko a na smotanu sa robí pomocou mliečnej odstredivky. Princípom je rozdelenie mlieka na základe rozdielnych hustôt tuku a mliečnej plazmy. Oddelením mliečneho tuku vzniká smotana, zvyšok tvorí odstredené mlieko.

Ako to súvisí s reálnymi tornádami?

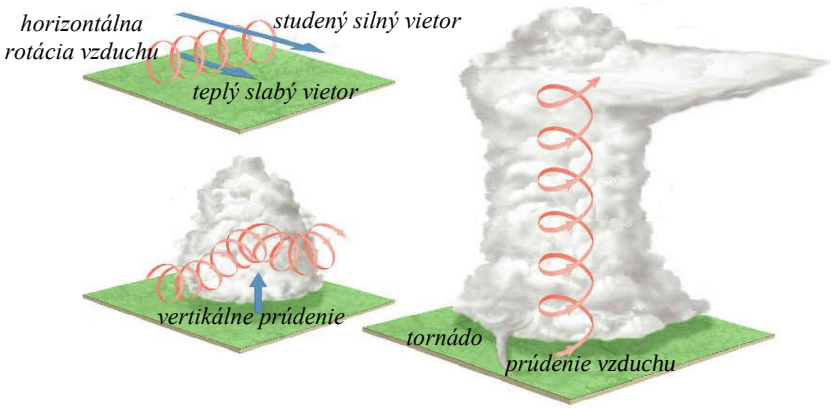
V experimente s voľným vírom vidíme, že voda s väčšou hustotou pôsobením tiažovej sily tečie smerom nadol a vzduch s menšou hustotou sa premiestňuje zdola nahor.

Ako s týmto súvisí vznik tornáda?

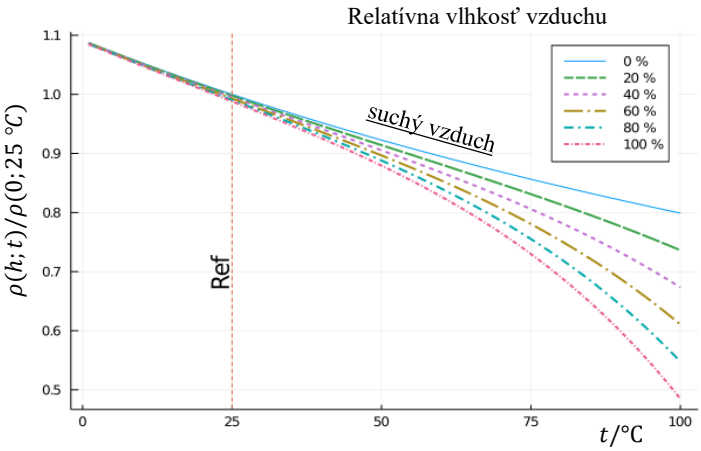
Tornádo je vír, ktorý sa nachádza pod základňou búrkového oblaku a dotýka sa zemského povrchu. Väčšinou má tvar lievika alebo stĺpu, ktorý vychádza z búrkovej oblačnosti. To znamená, že sa tvorí a existuje aj vo vyšších vrstvách ovzdušia, nie iba tesne nad zemským povrchom. Jeho horizontálne rozmery sú pomerne malé – rádovo desiatky až stovky metrov, a doba života zväčša desiatky sekúnd až desiatky minút. Rýchlosti vetra v takom víre môžu dosahovať vysoké hodnoty – až stovky km/h.

Tornádo sa tvorí vtedy, keď vzduch v atmosfére začne rotovať. Horizontálna rotácia vzduchu sa začína buď pri prekrížení studeného a prudkého výškového vetra s prízemným teplým prúdením vzduchu, alebo pri veľkých zmenách rýchlostí prúdenia vzduchu v atmosfére.

Chladný a suchý vzduch má väčšiu hustotu ako vlhký a teplý vzduch. V dôsledku rozdielnych hustôt nastane vertikálne prúdenie, ktoré rotujúci vzduchový valec zdvihne do vertikálnej polohy.



Obr. 17: *Vznik horizontálnej a vertikálnej rotácie vzduchu.*



Obr. 18: *Relatívna hustota vzduchu: Pomer* $\rho(h;t)/\rho(0;25\ °C)$ *hustoty vzduchu* $\rho(h,t)$ *s relatívnou vlhkosťou* h *a s teplotou* t*, voči hustote* $\rho(0;25\ °C)$*suchého vzduchu s teplotou 25* °C.

Žiakov možno prekvapí informácia, že vlhký vzduch má menšiu hustotu ako suchý. Vlhký vzduch obsahuje vodné pary[1], ktorých relatívna molekulová hmotnosť je $M_r(H_2O) = 18$ a suchý vzduch považujeme za plyn s relatívnou atómovou

[1] Vodnou parou rozumieme vo fyzike plyn, ktorý pozostáva z molekúl vody. Táto vodná para je priezračná, neviditeľná. Pod „vodnými parami“ v bežnom hovore rozumieme to, čo vytvárajú napr. oblaky, či cári bielych „vodných pár“ nad teplou vodou, a sú v skutočnosti zhlukom miniatúrnych kvapôčok vody, ktorých hustota je 1000 kg/m^3. Kvapôčky v oblakoch, vďaka svojej vysokej hustote voči vzduchu, neustále padajú smerom k zemi. Vo vzduchu ich udržuje prúdenie vzduchu smerom hore.

hmotnosťou takmer $M_r(\text{vzduch}) \approx 30$. Vlhký vzduch obsahujúci vodu v plynnom skupenstve (suchého vzduchu a vodných pár) má menšiu hustotu, ako suchý vzduch. Rozdiely v hustote sú pri teplote do 25 °C malé, ale výrazne rastú pri vyšších teplotách.

Porovnanie hustoty vlhkého vzduchu s hustotou suchého vzduchu pri rôznych teplotách pozri na obr. 18,

Môžeme poukázať aj na analógiu s experimentom tornádo vo fľaši. Voda s väčšou hustotou sa prelieva – prúdi z hornej fľaše vplyvom gravitácie do dolnej a premiestňuje vzduch s menšou hustotou v opačnom smere do hornej fľaše. Podobne rozdiel v hustotách chladného a suchého vzduchu v horných vrstvách atmosféry a prízemného, vlhkého a teplého vzduchu spôsobí ich vertikálne prúdenie.

Väčšina tornád má priemer okolo 50 metrov, ale niektoré môžu mať priemer až kilometer[2] a viac. Obyčajne netrvajú dlhšie než niekoľko minút, ale niektoré existujú aj niekoľko hodín[3]. Rýchlosť pohybu tornáda po povrchu je obyčajne 50-65 km/h, takže typické tornádo od svojho vzniku (okamihu, keď sa dotkne zeme) do zániku prejde maximálne zopár kilometrov.

Rýchlosť vetra v tornáde pri jeho silnej rotácii je minimálne 65 km/h a horná hranica môže prekonať aj 450 km/h (541 km/h – tornádo El Reno 31.5.2013)[4]. Táto rýchlosť je príčinou vzniku veľkého podtlaku vo vnútri víru v blízkosti zeme, ktorý spôsobuje:

- kondenzáciu vodnej pary a vznik tzv. kondenzačného chobota,
- silné nasávanie dovnútra valca.

Nasávacia sila tornáda je tak veľká, že dokáže nasať voľné predmety, vodu z mora či nádrží (aj z koryta rieky), búrať domy a zdvíhať ťažké autá. Tornádo je schopné preniesť až 200 či 300 ton ťažké objekty (napr. železničné vozne) na vzdialenosť 25 m, ľudí a zvieratá na vzdialenosť stoviek metrov (vznikajú tzv. dažde žiab alebo rýb). Tlak vzduchu vo vnútri tornáda môže klesnúť až na 780 hPa. Dôležitý je rozdiel tlaku, ktorý vzniká medzi vírom a okolím. V prípade tornáda môže byť táto hodnota až 190 hPa , čo je oveľa väčší ako v tropickom cyklóne (okolo 100 hPa).

---

[2] Najväčšie známe tornádo (El Reno – 31.05.2013) mal priemer 4,2 km; National Weather Service: "2013 El Reno Tornado" NWS El Reno Tornado

[3] Najdlšie trvajúce známe tornádo (Tri State tornado – 18. marca 1925) bolo aktívne približne 3,5 hodiny a pekonal vzdialenosť 315 km; National Weather Service: „The Tri-State Tornado of 1925“ NWS Tri-State Tornado.

[4] Smith, B. T., A. L. Houston, R. L. Tanamachi, J. C. Snyder, H. B. Bluestein, P. M. Markowski, and Y. P. Richardson. "Comparison of Tornado Damage Characteristics to Low-Altitude WSR-88D Radar Observations and Implications for Tornado Intensity Estimation." Monthly Weather Review, 2024. https://journals.ametsoc.org/view/journals/mwre/aop/MWR-D-23-0242.1/MWR-D-23-0242.1.xml..

Obr. 19: *Kondenzačný chobot tornáda a troskový vír pod chobotom.*

Tornádo spravidla zahŕňa dve viditeľné časti (ostatné časti tornáda môžu byť neviditeľné):

- *kondenzačný chobot* (lievik) visiaci zo spodnej základne oblaku nadol. Jeho vznik je opísaný vyššie;
- prašný alebo vodný *troskový vír* pod kondenzačným chobotom. Vzniká pôsobením cirkulácie tornáda pri zemskom povrchu (resp. vodnej hladiny).

Tesne pred zánikom sa lievik tornáda zúži (jeho tvar sa zmení na lano), ohýba sa a nachýli sa do vodorovného smeru.

Farba tornáda závisí od prostredia, v ktorom je tornádo vytvorené a osvetlenia. Tornáda vznikajúce v suchých podmienkach sú skoro neviditeľné, dajú sa odhaliť až podľa vírenia na konci lievika. Tornáda, v ktorých nastáva kondenzácia vodných pár vo vzduchu, nasávajúce malé alebo takmer žiadne nečistoty, majú väčšinou sivú alebo bielu farbu. Ak tornádo prechádza cez väčšiu vodnú plochu, môže sa sfarbiť do biela, dokonca až do modra.

Tornáda pohlcujúce veľký objem trosiek a nečistôt majú väčšinou tmavšie sfarbenie podľa farby nasatých nečistôt.

Deštrukčná sila tornáda spočíva v náhlom poklese tlaku vzduchu a v obrovskej energii rýchlo prúdiacich vzdušných más, vďaka čomu sa správa ako obrovský vysávač.

Obr. 20: *Ničivé následky tornáda na predmestí Oklahoma City v roku 1999.*

Ak chceme demonštrovať žiakom vznik silového pôsobenia pri náhlej zmene tlaku, môžeme tak urobiť rôznymi spôsobmi, opíšeme aspoň dva.

Pokles tlaku v nádobe oproti vonkajšiemu atmosférickému tlaku.

V otvorenej plastovej fľaši sa nachádza vzduch s rovnakým tlakom ako v jej vonkajšom okolitom prostredí. Jeho hodnota je rovná aktuálnemu atmosférickému tlaku. Zníženie tlaku vo fľaši dosiahneme napríklad ochladením vzduchu v nej. Môžeme to urobiť tak, že do otvorenej fľaše nalejeme trochu studenej vody a fľašu uzavrieme. Ak chceme dosiahnuť pri experimente výraznejší efekt, je vhodné si dať vodu vopred schladiť do chladničky, alebo do nej vhodiť trochu ľadu.

Obr. 21: *Deformácia plastovej fľaše pri poklese tlaku v jej vnútri*

Studená voda v uzavretej fľaši ochladzuje vzduch v nej a súčasne sa znižuje jeho tlak. V okolí fľaše sú teplota vzduchu a jeho tlak nezmenené. Tlakový rozdiel spôsobí vznik tlakovej sily, pôsobiacej na fľašu a jej následnú deformáciu – stlačenie. Experiment je pomerne

rýchly, k deformácii fľaše dôjde po niekoľkých sekundách.

Zvýšenie tlaku v nádobe oproti vonkajšiemu atmosférickému tlaku.
Pri experimente využijeme reakciu prášku do pečiva alebo sódy bikarbóny s octom, pričom vzniká plyn – oxid uhličitý.

Sóda bikarbóna je biely prášok so zásaditou chuťou. Jej chemický názov je hydrogénuhličitan sodný $NaHCO_3$.

Ocot je z 8% vodný roztok kyseliny etánovej CH_3COOH. Má výraznú kyslú chuť a charakteristický zápach. Používa sa na dochucovanie jedál a pokrmov.

$NaHCO_3 + CH_3COOH \rightarrow CH_3COONa + CO_2 + H_2O$.

Hydrogén uhličitan sodný s kyselinami neutralizuje za vzniku soli príslušnej kyseliny, oxidu uhličitého a vody.

Ak táto reakcia prebieha v uzavretom priestore, vzniknutý plyn, oxid uhličitý, prispieva k tlaku v priestore, a príspevok závisí od jeho množstva. Nádoba, ktorá vytvára uzavretý priestor, nemusí tento tlak vydržať, môže povoliť a prasknúť.

Obr. 22: *Tlakový rozdiel spôsobí deformáciu*

Pre zjednodušenie experimentu môžeme ako nádobu zvoliť obal na hračku z Kinder vajíčka, staré puzdro na fotografický film a pod. Tieto nádoby sú uzavreté plastovým uzáverom, ktorý pri vyššom tlaku zvnútra povolí a otvorí sa.

Firenádo, ohňové tornádo

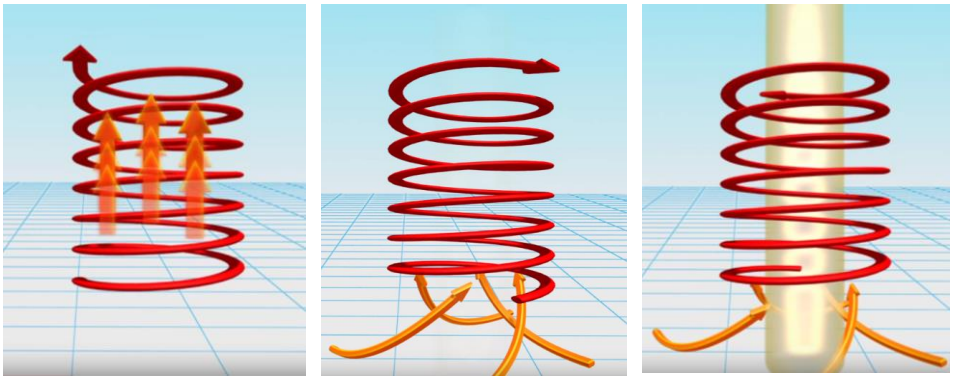
Tornádo, ktoré búra a prenáša trosky, je nebezpečné. A čo potom, ak sa k nemu ešte pridajú plamene? Čo urobí tornádo s plameňom? Sfúkne a zadusí ho, ako keď fúkneme na plameň sviečky, alebo sa rozhorí ešte viac, ako keď dúchadlom fúkame do pahreby?

Oheň je forma horenia, je to druh exotermickej oxidácie horľavých plynov, ktoré sú uvoľňované z paliva. Plameň vytvára svetlo a teplo a pohybuje sa nad palivom.

Ak dáme dohromady vzdušný vír s plameňom, vznikne ohnivý vír. Z malého plamienka sa môže stať ničivé ohnivý vír, “firenádo“.

V miestach požiaru vznikajú ohnivé víry. Podľa predpokladov nie sú ohnivé víry (firenáda) v prírode ničím výnimočným, zvyčajne sa však nachádzajú v centre lesných požiarov, preto ich ľudia bežne nevidia.

Obr. 23: *Tornádo v oblasti požiaru.*



Obr. 24: *Komínový efekt a nasávanie čerstvého vzduchu.*

Tornádo umožňuje tzv. komínový efekt, pri požiaroch na veľkých súvislých plochách vzniká veľké množstvo tepla a infračerveného žiarenia. Ohriaty vzduch prudko stúpajúci nahor spôsobuje silné nasávanie čerstvého vzduchu do miesta horenia.

Prísun kyslíka do miesta horenia zosilňuje intenzitu ohňa a ten zase zosilňuje prísun čerstvého vzduchu (a s ním aj kyslíka). Výsledkom je silný vietor (masívny pohyb vzduchu), v smere do centra požiaru, ktorý sťažuje, alebo dokonca znemožňuje od ohňa utiecť.

Intenzívne spaľovanie produkuje veľké množstvo spalného tepla (v epicentre môže teplota dosiahnuť až 2 000 °C). Pri tejto teplote nastáva samovznietenie

ďalších horľavých materiálov, ktoré sa nachádzajú v okolí požiaru. Pri tejto teplote horia napríklad živičné povrchy vozoviek. Požiar sa tak veľmi rýchlo rozširuje do okolia a ťažko sa dá uhasiť.

Ohnivé tornáda sú väčšinou relatívne malé a pomalé, ale nájdu sa aj výnimky. Jedno z najrozsiahlejších bolo zdokumentované v roku 2003 pri požiari na predmestí a vonkajších oblastiach Canberry, hlavného mesta Austrálie: vír mal priemer takmer pol kilometra a vietor dosiahol rýchlosť cez 250 km/h.

Najnebezpečnejšia je kombinácia klasického tornáda vyvolaného búrkou a požiaru. Práve tento typ tornáda vznikol pri zemetrasení Great Kanto na ostrove Honšú v Japonsku v roku 1923. Zabil takmer 40 tisíc ľudí počas svojho 15 minútového besnenia.

Obr. 25: *Firenádo v blízkosti domov, 15. novembra 2008 v Yorba Linda, Kalifornia*.

Dostávame sa k najdôležitejšej časti: ako sa dá firenádo ukázať žiakom v triede? Nie na videu, ale reálne – vzdušný vír, oheň a efekt vzniku ohňového tornáda. Dá sa to vôbec zrealizovať v triede?

Najskôr opíšeme, ako vytvoriť rotáciu vzduchu – vzdušný vír. Možností je niekoľko, nám sa osvedčili pomôcky – čisto kovový drôtený kôš na odpadky s objemom 18 L s kruhovým prierezom (vyskúšali sme aj kôš so štvorcovým prierezom a efekt

vzniku firenáda bol rovnaký), a otočný stojan na tortu alebo otočný servírovací podnos na pizzu s priemerom cca 40 cm. Ak postavíme drôtený kôš na otočný stojan a stojan roztočíme, sieťka koša strháva so sebou vzduch a roztáča ho vo vnútri koša aj z jeho vonkajšej strany. Roztočený vzduch vytvára vzdušný vír. Samozrejme, nie je viditeľný – na rozdiel od vzdušného víru v prírode, ktorý obsahuje prašné častice, prípadne skondenzované vodné pary.

Obr. 26: *Pomôcky na vytvorenie vzdušného víru.*

Obr. 27: *Experiment pripravený na demonštráciu vzniku firenáda.*

Oheň je potrebné vytvoriť vo vnútri, v koši. Ako horľavý materiál je vhodné použiť kvapalný etanol pre krby, ktorý nalejeme do kovovej misky. Misku s etanolom vložíme do koša a pomocou drevenej špajdle etanol zapálime.

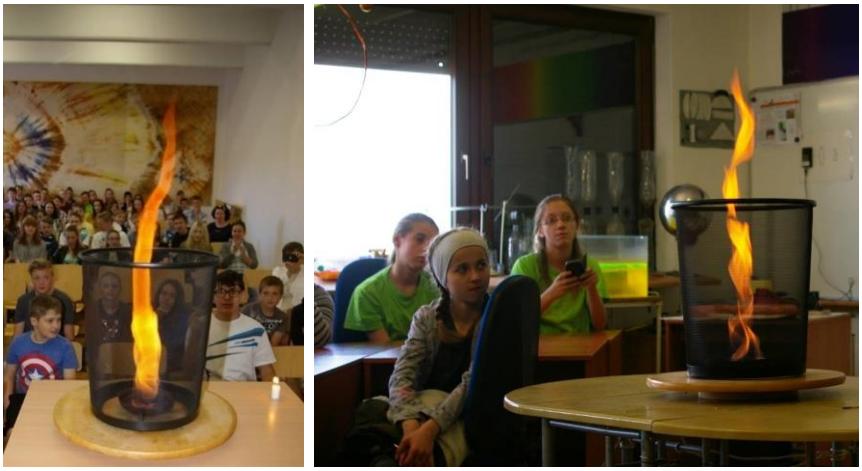
Vyskúšali sme ako misku aj chemické sklo, ale ukázalo sa ako nie vhodné. Pri rotácii je horľavá kvapalina svojou zotrvačnosťou rozložená na dne nerovnomerne, v strede je vrstva kvapaliny tenšia a po okrajoch misky hrubšia. Pri horení sa skôr „minie“ kvapalina v strede misky, miska je tým zohrievaná nerovnomerne. Teplota dosiahnutá pri horení je zrejme dosť vysoká (teplota horenia etanolu je 425 °C) a miska, napriek tomu, že je z chemicky tepelne odolného materiálu, praskne.[5]

Obr. 28: *Experimentálne firenádo.*

Ak máme experiment pripravený, je možné vyskúšať vznik ohnivého víru (firenáda). Opatrne roztočíme otočný stojan. Ohňový stĺp sa vytvorí po pomerne krátkom čase a je vskutku impozantný. Rýchlosť rotácie stojana, a tým aj koša a vzduchu v koši, ovplyvňuje výšku a tvar ohňového stĺpa.

Komfortnejšie uskutočnenie experimentu dosiahneme, ak rotácia koša s ohňom je pekne plynulá. Toto sa nám podarí, ak miesto ručne otočného stojana použijeme rotujúce zariadenie na elektrický pohon. Osvedčil sa nám starý gramofón.

[5] Pri zmene teploty výrobkov zo skla dochádza k vzniku nežiaduceho vnútorného napätia. Sklo praskne pri rýchlom ochladzovaní pri prekročení vnútorného napätia nad prípustnú hranicu. Výrobcovia udávajú tzv. odolnosť proti teplotnému šoku, ktorá je zrejme pri tomto experimente nedostatočná.



Obr. 28: *Firenádo počas exkurzii v Centre popularizácie fyziky.*

Všetky opísané experimenty postupne odhaľujú zákonitosti pri jednom fyzikálnom jave: rotácii tekutiny. Takýto súbor experimentov môžeme nazvať aj fyzikálny príbeh. Príbeh, ktorý v logickom vysvetlení jednotlivých častí umožňuje sledovať súvislosti a vzájomné prepojenie prírodných javov a ich využitie človekom.

Adresa autora: Jozef Beňuška, Gymnázium Viliama Paulinyho-Tótha, Malá hora 3, 03601 Martin
e-mail: jbenuska@nextra.sk.

Fyzikálne procesy v prírode – Pôda[1]

Katalin Sós, László Nánai

Abstract: This is a first part of the planned articles relating to unified approach of negotiating and teaching methods in common events of the Nature We deal with the problems of soil; physic-chemical properties, formation and evolution. We intend to show the rigorous impact of physics, chemistry, geography-geophysics, weather and other ones on the basic properties of the soil.

Key words: Key words: soil, education, physic-chemical properties

Súhrn: Prvá časť plánovaných článkov týkajúcich sa jednotného prístupu k vyučovaniu a výučbovým metódam bežných udalostí v prírode. Zaoberáme sa problémami pôdy; fyzikálno-chemickými vlastnosťami jej formovania a vývoja. Máme v úmysle ukázať dôsledný vplyv fyziky, chémie, geografie-geofyziky, počasia a iných faktorov na základné vlastnosti pôdy.

Kľúčové slová: pôda, vzdelávanie, fyzikálno-chemické vlastnosti

MESC: M50, B40

Metóda integrovaného prístupu k výučbe je už dlho zdôrazňovaná. Podstatou je, že jednotlivé predmety nie sú nezávislé od ostatných, sú len akýmsi predchodcom, znalostným typom predmetu, a mal by poukázať na jednotu prírodných vied. To sa neprejavuje v tom, že vo všetkých prírodných predmetoch sa stretávame s pojmami ako energia, práca, stav hmoty, chemické väzby atď.. Konzistentnosť sa prehlbuje aj vysvetľovaním daných predmetov v rámci širokej škály rôznych udalostí v prírode. Účelom vzdelávania nie je len získanie vedomostí, ale tiež, aby študenti dokázali aplikovať to, čo sa naučili – aj v prípade zložitých problémov.

Často sa uvádza v medzinárodných prieskumoch, že naši študenti v oblasti „aplikácie vedomostí“ (kompetencia) dosahujú len priemerné výsledky. Aj keď majú potrebné teoretické vedomosti, v každodennom živote pri riešení praktických problémov nevedia aplikovať tieto teoretické vedomosti.

---

[1] Téma integrovaného prístupu k prírodovedným predmetom rezonuje v poslednú dobu silnejšie a silnejšie. Uvedený článok, a jeho pokračovania boli publikované postupne od roku 2014 do 2024 v anglickom jazyku. Pre ich aktuálnosť pre učiteľov fyziky na základných a stredných školách, po láskavom súhlase autorov, zverejníme postupne slovenské preklady týchto článkov. Prvý článok, ktorý predkladáme, je prekladom pôvodného anglického článku

Sós, Katalin and Nánai, László: Physical Processes in Nature - The Soil, in: *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, volume 43, number 4, pages 37-43, ISSN 1335-4981, 2014.

Zjednotený prístup k výučbovým metódam poskytuje príležitosť riešiť problémy každodenného života. Cieľom prírodovedných predmetov je, v konečnom dôsledku, pochopenie živej a neživej prírody, bez ohľadu na typ prístupu, ktorý sa uplatňuje. Tento zjednocujúci prístup vyžaduje, aby učitelia mali integrovaný pohľad na vedomosti. Cieľom našej série článkov je pomôcť vytvoriť a používať v triede „reálne" vedomosti, ktoré vyžadujú pochopenie rôznych prejavov fyziky v širokom okruhu prírodných udalostí.

Fyzikálne procesy v pôde – fyzikálne javy v pôde [2][3]

Pôda je vrchná vrstva základnej horniny, podložia, ktorá vznikla fyzikálnymi a chemickými procesmi, ako je zvetrávanie a tvorba humusu. Pôda sa môže považovať za 3-fázový *polydisperzný systém*[2]. Trojfázový systém, pretože v dutinách medzi pevnými časticami je aj voda a tiež vzduch. Je polydisperzný, pozostáva z častíc rôznych veľkostí. Asi 50 % pôdy je pevná fáza. Voda tvorí asi 40 % pôdy a vzduch asi 10 %.

Tvorba pôdy

Pri vývoji pôdy zohrávajú úlohu geologické, klimatické, reliéfne, biologické faktory a obdobie pôdy, ale najdôležitejším faktorom je klimatický faktor. Prvým krokom je fyzické zvetrávanie (rozlamovanie) horniny, ktoré vytvára priestor pre vodu a vzduch. Toto je predpoklad pre biologické a chemické zvetrávanie.

Hlavné formy fyzikálneho zvetrávania

Denná teplotná variácia 50-60 °C spôsobuje fyzikálne rozpadanie v suchých a polopúštnych oblastiach, pretože rôzne minerálne zložky majú rôzny teplotný koeficient rozťažnosti, čo vytvára v horninách mechanické napätie a nakoniec vedie k vzniku trhlín v horninách.

- Mrázové zvetrávanie v chladnom podnebí a vysokých horách. Zmrznutá voda v trhlinách spôsobuje zmenu objemu spojenú s napätím.
- Odparovanie má veľký význam najmä v púštnych oblastiach, ale aj v rôznych teplotných zónach má význam.
- Rozrušujúci účinok koreňov rastlín je značný, spolu s chemickými účinkami koreňových kyselín.
- Disruptívne účinky solí v suchom púštnom prostredí; soľné kryštály prítomné v otvoroch trhlín prijímajú vodu, čo vedie k zväčšeniu objemu zŕn a k mechanickému napätiu.

[2] Pozn.prekl.: *Polydisperzný systém*: je systém alebo materiál, ktorý obsahuje častice rôznej veľkosti. Predpona "poly" znamená "veľa", zatiaľ čo "disperzný" znamená, že sa rozptýli alebo rozdelí. Teda *polydisperzný systém* je systém, kde sú častice rôznych veľkostí a tieto častice sú rozptýlené v médiu.

– Praktické zmenšenie horných vrstiev vedie k zníženiu tlaku na podložie. V dôsledku erózie sa zmenšuje hrúbka horných vrstiev (premiestenie, odplavenie). Tlak pôsobiaci na dolné vrstvy klesá, preto tie sa rozširujú a praskajú.

Chemické zloženie vrstvy sa pri fyzikálnej erózii nemení. Pri chemickom zvetrávaní sa mení minerálne zloženie. Toto vyžaduje vysokú teplotu a dostatočné množstvo vody.

Najdôležitejšie typy chemického zvetrávania sú [4]:

– Pri interakcii horniny s vodou vznikajú roztoky solí alkalických kovov a alkalických zemín.
– Ióny vody (OH^-) sa môžu zúčastňovať chemických reakcií silikátov.
– Ak je dostatok kyslíka, môžu sa vyskytnúť rozpustné oxidačné procesy, najmä pre železité horniny, napr. farebné minerály s Fe^{3+}, preto dostaneme nerozpustné ferióny (*precipitačné*[3]).
– Niektoré minerály pri interakcii s vodou prijímajú aqua regia (kristalická voda[4]), čo spôsobuje objemové a chemické procesy vedúce k sadre:

$$CaSO_4 + 2H_2O \rightarrow CaSO_4 \cdot 2H_2O$$

– Chemický vplyv vody je tiež dôležitý. Kyslé prostredie napomáha rozpustnosti niektorých materiálov, napr. vápenca

$$CaCO_3 + H_2O + CO_2 \rightarrow Ca(HCO_3)_2.$$

$Ca(HCO_3)_2$ migruje s vodou a vápenec sa môže znova zhlukovať (pozri tvorbu kvapľov).

Vplyv biologického zvetrávania je tiež dôležitý, najmä s vysvetlením na základe organických látok v dôsledku húb, baktérií a rastlinných látok ovplyvňujúcich rozpustnosť.

Fyzikálne vlastnosti pôdy

Fyzikálne vlastnosti sú určené hlavne konzistenciou vody a vzduchu, a tepelným prostredím [2]:

– zrnitosť (textúry),
– pórovitosť,
– štruktúra pôdy.

[3] Pozn.prekl.: Proces zrážania (precipitácie), pri ktorom sa rozpustené látky vylučujú z roztoku v pevnej forme. Napríklad pri chemických reakciách v pôde môžu ióny železa reagovať a vytvárať nerozpustné zlúčeniny, ktoré sa usadzujú ako pevná zrážanina.

[4] Pozn.prekl.: *Kristalická voda* je voda viazaná v kryštálovej štruktúre látky, často pozorovaná v hydratoch, kde molekuly vody sú súčasťou kryštálovej mriežky.

Zrnitosť (textúra) určuje štatistické rozdelenie častíc podľa veľkosti, určeným hmotnostným percentuálnym pomerom. Toto určuje aj mineralogické zloženie. Vo veľkých zrnách nachádzame materiály, ktoré sú silne zvetrané, napríklad pruhy, zatiaľ čo v malých zrnách nachádzame ľahko zvetrávajúce (minerálne) materiály. Určenie zrnitej skladby (textúry) sa vykonáva preosievaním – pre jemnejšie častice usadzovaním (rýchlosť usadzovania závisí od veľkosti zŕn). Pred meraním distribúcie veľkosti zŕn je potrebné oddeliť zlepené častice – v závislosti od zmesi – s komplexom tvoriacim peroxid vodíka. Opätovné zlepenie častíc sa vykonáva pomocou peptických materiálov (hlavne hydroxidu draselného).

Tabuľka 1: Klasifikácia podľa Atterberga [2]

Veľkosť zŕn (mm)	**Názov frakcie**
2000-200	bloky, kamene
200-20	hrubá sutinová frakcia
20-2	jemná sutinová frakcia
2-0,2	hrubý piesok
0,2-0,02	jemný piesok
0,02-0,002	bahno
<0,002	hlina

Praktické určenie textúry – väčšinou – založené na fyzikálnych meraniach (lacné, rýchle,…), napr. určenie Aranyovho fixačného čísla (charakterizované pre fixáciu vody suchej pôdy). Pridaním čistej vody k určitému množstvu pôdy až do dosiahnutia plasticity. Pomer vody a hmotnosti pôdy dáva Aranyovo fixačné číslo[5].

Tabuľka 2: Textúry pôdy na základe charakteristík pôdy [5]

Textúra pôdy	**Aranyovo fixačné číslo (%)**
Hrubý piesok	<25
Piesok	25-30
Piesčitá hlina	30-38
Hlina	38-42
Hliny	42-50
Hliny	50-60
Ťažká hlina	>60

[5] Aranyovo fixačné číslo zaviedol v Maďarsku Maďarský úrad pre normalizáciu na určenie fyzikálnych a hydrofyzikálnych vlastností pôdy, najmä na meranie schopnosti pôdy viazať vodu. Príslušné normy dostupné cez websídlo organizácie (http://szabvanykonyvtar.mszt.hu/). [Pozri tiež: Alfréd Szilágyi, et. al: Effects of soil characteristics and farm types on earthworm populations in Hungarian organic, permaculture and conventional farms; Research Article, https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-1670104/v1 online: https://www.researchsquare.com/article/rs-1670104/v1, online prístup 24.04.2024]

Z praktických dôvodov často stačí určiť „fyzikálny druh“. Ide o charakteristické pomery veľkosti organických a mineralogických látok, napr. na mieste zmyslovým vnímaním: drvenie a hnetenie (s vodou) vzoriek získaných z hliny.

Tabuľka 3: Zmyslové vnímanie fyzikálnych druhov [6]

Fyzikálny druh	**Alyrácia-drtenie**	**Hnetenie**
Piesok	V suchých a mokrých podmienkach cítime ostrý povrch.	Veľkosť vlašského orecha sa po hnetení stane ako cesto. Nie je možné vytvoriť hrudu.
Piesčitá hlina	Okrem menších jemnozrnných pieskových práškov cítime v mokrom stave hladké povrchy.	Uhnetenie hrudy je možné, ale vytvorenie valca nie.
Hlina	Iba jemnozrnné práškové časti – v mokrom stave neostré, nelepivé časti.	Hnetenie a vytváranie valcov je možné, ale nie prstencov.
Bahno	Jemné bahno sa lepí na naše ruky – farba je väčšinou sivá.	Hnetenie a vytváranie valcov je možné, v niektorých prípadoch aj prstencov.
Hlina	V suchu ťažko potlačiteľné, v mokrom šmykľavé a klzké.	Hnetenie, valcovanie, vytváranie prstencov je možné.

Nárast zrnkových frakcií určuje špecifický povrch, ktorý určuje kapacitu zadržiavania vody a adsorpciu. Možno ukázať, že nezávisle od tvaru špecifický povrch zaujíma inverznú proporcionalitu k hustote a veľkosti zŕn. Preto najväčší povrch patrí hline, zatiaľ čo najmenší patrí hrubému piesku.

Povrch tiež určuje kohéziu, čím väčší povrch, tým väčšia kohézna sila medzi zrnami. Preto pieskové časti majú len malé sily – žiadnu adhéziu. Hliny vykazujú viac adhéznych vlastností, zatiaľ čo agregáty sa rozpadávajú. V prípade hliny, napriek ťažkej kohézii, elektrické náboje na povrchoch tiež pomáhajú zadržiavať vodu. Hliny „majú radi“ vodu, v mokrom stave napučiavajú, v suchom sa spájajú.

Textúra určuje hlavne pórovitosť. Pórovitá časť hmoty sa považuje za nesúdržnú fázu bez biologickej aktivity (vláknité korene,...) napríklad trhliny, chodby zvierat, tunely koreňov, vzduchové medzery a podobne, voda sa pohybuje po povrchu zŕn, ióny a voda medzi mriežkami. Absolútna pórovitosť je pomer objemu pórov k celkovému objemu. Skladá sa z nepohyblivej poróznej vody (sú zlé pre transport vody a vzduchu). Pre transport je dôležitá tzv. efektívna pórovitosť, pomer

transportovateľných kapilár k celkovému objemu. Čím väčšia je efektívna pórovitosť, tým väčšia je priepustnosť pôdy (priehľadnosť).

V materiáloch s hrubými zrnami, napr. piesok, je celý objem pórov približne 20-40 % z celkového objemu. V prípade jemnejších materiálov, napr. bahno, je objem pórov menší, ale ich počet je väčší, preto ich absolútna pórovitosť je ~ 40-60 %.

Veľkosť pórov je dôležitá pre transportné vlastnosti (vo veľkých póroch sa voda a vzduch môžu pohybovať voľnejšie). V pieskoch sa voda pohybuje rýchlo, rastlinné korene nedokážu získať živiny. Hliny sú tiež zlé pre priľnavosť vzduchu a vody, pohybujúci sa vzduchový prúd sa zastaví, čo znamená, že nie je dostatok kyslíka pre vegetáciu.

Štruktúra pôdy pozostáva z typov agregácie, napr. kubickej (rozkúskovanej, zrnitej, kúskovej) prizmickej – predĺženej v jednom smere alebo diskovej, ktorá bráni vertikálnemu transportu v pôdach.

Pôdny vzduch

Obsah vzduchu ako funkcia obsahu vody sa neustále mení. Hlavné zložky sú N_2, O_2 a CO_2. Podiel N_2 je takmer rovnaký ako v atmosfére, ostatné zložky sú funkciou obsahu kyslíka, biologických udalostí prebiehajúcich v póroch, procesy rastu kyslíka nie sú prítomné v pôde, preto obsah kyslíka rýchlo klesá. Kyslík vo vzduchu (pôda) je asi 20,6 %.

Tvorba CO_2 v pôde na hektár za rok je asi $4000\ m^3$. Pri tomto procese sa podieľajú korene dýchajúce a pôdne organizmy. Hlavný obsah CO_2 je asi $0{,}3 - 0{,}7\ \%$ v závislosti od teploty, obsahu vody a množstva organických látok. Obsah nad 5 % je nebezpečný pre živé organizmy.

CO_2 a O_2 ovplyvňujú chemické vlastnosti pôdy, napr. kyslosť a následne redoxitu.

Pôdny vzduch obsahuje veľa vodných pár, asi 95 % vlhkosti.

Tepelná bilancia pôdy

Tepelná ekonomika pôdy závisí od obsahu vody a vzduchu v pôde, čo ovplyvňuje výživu a rast rastlín, ako aj mechanizmus tvorby pôdy. Najčastejšie používané tepelné charakteristiky pôdy: špecifické teplo, tepelná vodivosť a tepelná difúzia [5].

Hmotnostné špecifické teplo (c) udáva množstvo tepla potrebné na zvýšenie teploty jednotky hmotnosti. Pevné zložky majú približne rovnaké špecifické teplá, voda má veľké, vzduch má nízke špecifické teplo. Preto sú špecifické teplá daného komponentu určené hlavne obsahom vody a vzduchu.

Tepelná vodivosť (λ) je množstvo tepla prechádzajúce cez jednotkovú plochu počas jednotkového času. Najmenšia λ je pre vzduch, potom pre pleseň, voda je najväčšia. Preto sú pôdy s malou hustotou (voľné) dobrými vodičmi tepla.

Tabuľka 4: Tepelné charakteristiky pôdy [5]

Komponenty	**Špecifické teplo** $c/(\mathrm{J}\cdot\mathrm{g}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1})$	**Tepelná vodivosť** $\lambda/(\mathrm{J}\cdot\mathrm{cm}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1})$
kremenný piesok	0,80	0,088
hlinený minerál	0,80	0,029
pleseň	2,30	0,0025
voda	4,18	0,0057
vzduch	1,08	0,00025
ľad	2,09	0,022

Všeobecne

Pôda je dobrý tepelný izolátor, preto sú denné teplotné zmeny citeľné do hĺbky 0,8 m, ročné zmeny sú citeľné do hĺbky 8-10 m.

Pevná mokrá pôda obsahujúca veľké množstvo vzduchu sú zlé vodiče tepla, majú malé špecifické teplo, preto sú teplotné zmeny citeľné iba v malej hĺbke, napr. piesok je v lete horúci, ale v hĺbke niekoľkých cm je teplota piesku pomerne nízka.

Vzdelávanie s integrovaným významom sľubuje dobré možnosti pre učiteľov, napr. zahrnutie fyziky do vedomostí každodenného života v našom prostredí. Pri vysvetľovaní prírodných aj technických problémov hrajú fyzika a chémia rozhodujúcu úlohu. Častý výskyt určitého konceptu v rôznych situáciách pomáha pochopeniu a použiteľnosti. Pravdou je, že to vyžaduje určitú dodatočnú znalosť učiteľa, ale práca venovaná tomu sa skutočne oplatí.

R e f e r e n c i e

[1] Katalin: A fizika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai egy vizsgálat tükrében. Fizikai Szemle 2003/5. 107-176.
[2] Stefanovits Pál: Talajtan. Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 1981.
[3] Dr. Keveiné Bárány Ilona: Talajföldrajz. Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
[4] Hetényi Magdolna: Környezetgeokémia. JATE Pressz, Szeged 1999.
[5] Stefanovits P., Filep Gy., Füleky Gy.: Talajtan, Mezőgazda Kiadó, Budapest, 2010.
[6] http://users.atw.hu/kornyezetm/DE –MFK/7.%20felev/Talajgazdalkodas/Talajgazdalkodas_roviditett.pdf

Adresy autorov: Sós K., Department of Technique JGYPK
University of Szeged, Hungary, H-6725 Boldogasszony sgt. 6.
e-mail: sos.katalin@szte.hu
Nánai L., Department of Technique JGYPK
University of Szeged, Hungary, H-6725 Boldogasszony sgt. 6.
e-mail: nanai.laszlo@szte.hu

INFORMÁCIE

Konferencia pre učiteľstvo matematiky: Dva dni s didaktikou matematiky

Konferenciu „Dva dni s didaktikou matematiky“ začalo v roku 2016 organizovať Oddelenie didaktiky matematiky, na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Ide o obdobu českej konferencie Dva dny s didaktikou matematiky organizovanej Pedagogickou fakultou Univerzity Karlovej v Prahe (v roku 2024 už 28. ročník). Jedným z cieľov organizovania tejto konferencie je vytvoriť aktívnu komunitu učiteľov matematiky, v ktorej sa stimuluje spolupráca medzi ZŠ, SŠ a VŠ. Tomu je prispôsobený jej formát a cieľové skupiny.

Konferencia je určená najmä učiteľstvu matematiky základných a stredných škôl, na svoje si ale príde aj vysokoškolské učiteľstvo, študentstvo doktorandského štúdia a všetci priaznivci vyučovania matematiky. Konferencia je organizovaná vždy štvrtok a piatok prvého septembrového týždňa a dáva si za cieľ poskytnúť učiteľstvu priestor zdieľať svoje nápady, skúsenosti a v priateľskej atmosfére nájsť inšpiráciu do nového školského roka. Účastníčky a účastníci majú možnosť prezentovať výsledky práce v rôznych prezentácia výsledkov práce v rôznych oblastiach didaktiky matematiky, či prezentovať zaujímavé činnosti svojho žiactva formou krátkych, či dlhých príspevkov alebo formou pracovnej dielne. Vždy je možnosť sa prihlásiť aj bez príspevku a nechať sa inšpirovať. Pridanou hodnotou pre učiteľstvo na ZŠ a SŠ je aj možnosť uznať účasť na tejto konferencii ako aktualizačné vzdelávanie v trvaní 16 hodín.

9. ročník konferencie Dva dni s didaktikou matematiky sa uskutoční na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Mlynská dolina v Bratislave v dňoch 5. a 6. septembra 2024.

Prihlasovanie na konferenciu bude spustené v júni. Možnosť prihlásiť sa, či už s príspevkom alebo bez príspevku, je možné do 1.9.2024.

Aktuality týkajúce sa konferencie, prihlasovací formulár (cca od polovice júna) a ďalšie informácie možno nájsť na stránke konferencie https://dvadni.sk/.

V roku 2024 je naplánované prvé rozšírenie spomínanej konferencie o pol-deň určený špeciálne stretnutiu učiteľstva vysokých škôl, venujúceho sa príprave a výchove nových posíl pedagogických zborov či už v kombinácii s matematikou, alebo tzv. „prvostupniarov“. Stretnutie s názvom „Užitočná výmena skúseností učiteľstva vysokých škôl“, v skratke (UVS)^2, bude mať formu okrúhleho stola.

Mária Slavíčková[6]

[6] Oddelenie didaktiky matematiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava;
e-mail: slavickova@fmph.uniba.sk

8. EURÓPSKA FYZIKÁLNA OLYMPIÁDA (EuPhO)

15. – 19. 7. 2024, Kutaisi, Gruzínsko https://eupho2024.kiu.edu.ge/

V dňoch 15. 7. až 19. 7. 2024 sa za finančnej podpory Ministerstva školstva, vedy a mládeže Gruzínska na pôde Medzinárodnej univerzity v Kutaisi konala 8. Európska fyzikálna olympiáda. Súťaže sa zúčastnilo 256 žiakov z 55 krajín, pričom 36 krajín bolo z Európy. V tomto roku sa Medzinárodná fyzikálna olympiáda (MFO) konala v Iráne, a tak veľa krajín, z bezpečnostných dôvodov (aj Slovensko), nevyslalo svoje družstvo do Iránu. Gruzínci boli ochotní prijať neobmedzený počet družstiev, tak potom mimoeurópske krajiny nasmerovali svoje družstva na EuPhO, aby si mladí fyzici a fyzičky mohli zmerať svoje sily. Väčšina krajín bola zastúpená družstvom pozostávajúcim z 5 súťažiacich žiakov. Slovensko reprezentovali žiaci, ktorí sa na celoštátnom kole Fyzikálnej olympiády umiestnili na prvých piatich miestach.

Slovensko reprezentovali:

Marián Kovaľ, Gymnázium, Grösslingová 18, Bratislava
Richard Dudek, Gymnázium Viliama Paulinyho -Tótha, Martin
Tomáš Kubrický,, Gymnázium, Poštová 9, Košice
Adam Harmanský, Gymnázium, Poštová 9, Košice
Vladimír Slanina, Gymnázium, Poštová 9, Košice

Vedúci:

RNDr. Ľubomír Mucha, CVČ - RCM, Košice,
PaedDr. Ľubomír Konrád, PhD. - Gymnázium, Veľká okružná, Žilina

Príprava súťažného družstva prebiehala v dvoch termínoch. V dňoch 5. 5. až 10. 5. 2024 v Bratislave, kde sa uskutočnilo výberové sústredenie na MFO, vtedy sa ešte rozhodovalo o účasti slovenského družstva na MFO. Druhé prípravne sústredenie sa konalo v dňoch 1. 7. až 10. 7. 2024 v Žiline na Katedre fyziky Fakulty elektrotechniky a informačných technológií. Obidve sústredenia organizačne zabezpečoval NIVAM a po odbornej stránke členovia SK FO.

Samotná súťaž prebieha v rýchlom slede. Súťažné dní idú po sebe bez prestávky. Po nich hneď nasleduje zosúladenie bodov, ktoré udelila porota súťažiacim s bodmi, ktoré si udelili súťažiaci sami, v spolupráci s vedúcimi družstiev. To sa realizuje

formou moderácie, pričom súťažiaci si sami moderujú svoje riešenia. Vedúci družstva je len v úlohe poradcu.

Pre vlastnú súťaž medzinárodná akademická porota už tradične pripravila zaujímavé a veľmi náročné úlohy, tri teoretické a jednu experimentálnu úlohy. Úlohy dve hodiny pred začiatkom súťaže preložili vedúci družstva. V prvý súťažný deň riešili experimentálnu úlohu, v ktorej skúmali piezoelektrický jav. V experimentálnej úlohe na EuPhO súťažiaci dostanú niekoľko úloh, v tomto ročníku päť. Nedostanú kuchárku, ako na MFO, ako postupovať pri meraní. Cieľom súťažiacich je s dodanými pomôckami navrhnúť postup merania, meranie zrealizovať no a nakoniec sa dopracovať k výsledku merania. V druhý súťažný deň riešili tri teoretické úlohy. Zadanie viď na konci.

Za každú teoretickú úlohu mohli získať maximálne 10 bodov a za experimentálnu úlohu 20 bodov, teda celkovo 50 bodov.

Riešenia študentov opravila odborná medzinárodná porota, ktorá pripravila na každú úlohu veľmi podrobne riešenia (pri každej úlohe bolo niekoľko verzií riešenia) aj s podrobným rozdelením bodov za jednotlivé vyriešené časti úlohy. V nasledujúci deň, ako sme už spomenuli vyššie, prebiehali moderácie, no a po ich skončení zostavili organizátori poradie súťažiacich a medzinárodná akademická porota určila hranice pre jednotlivé druhy ocenenia. V zmysle štatútu EuPhO hranica pre zisk zlatej medaily bola stanovená na 29,6 b., striebornej na 22,1 b. a bronzovej na 16,7 b. Hranica úspešnosti bola stanovená na 12,3 bodu. Celkove bolo udelených 28 zlatých medailí, 48 strieborných medailí, 61 bronzových medailí a 40 čestných uznaní. Predávanie medaily sa uskutočnilo v 19. 7. 2024, pričom sa ho zúčastnila ministerka školstva Gruzínska. Výsledky jednotlivých úspešných súťažiacich sa nachádzajú na stránke https://eupho.ee/eupho-2024/. Informácie o neúspešných riešiteľoch sa nezverejňujú.

Výsledky súťaže jednotlivcov (prvá trojka a slovenskí súťažiaci).

Poradie	Meno	Krajina	Počet bodov	medaila
1.	Rares-Felix Tudose	Rumunsko	43,0	zlatá
2.	Allen Li	USA	42,1	zlatá
3.	Luke Jiamu Huang	USA	40.6	zlatá
7.	Marián Kovaľ	Slovensko	36,3	zlatá
38.	Richard Dudek	Slovensko	27,6	strieborná
63.	Adam Harmanský	Slovensko	23,9	strieborná
176.	Tomáš Kubrický	Slovensko	12,3	čestné uznanie
	Vladimír Slanina	Slovensko	11,4	

Neoficiálne poradie európskych krajín (započítané body len z úspešných riešiteľov)

Poradie	Krajina	Počet bodov
1.	Rumunsko	175,4
2.	Estónsko	131,5
3.	Nemecko	130,9
4.	Ukrajina	116,7
5.	Veľká Británia	110,0
6.	Poľsko	106,5
7.	Turecko	102,3
8.	Srbsko	102,2
9.	Taliansko	102,2
10.	Slovensko	100,1

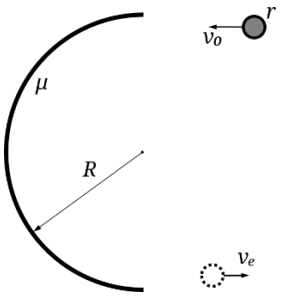
Poradie krajín sa nevyhlasuje a bolo zostavené na základe získaných bodov len úspešných súťažiacich. Najúspešnejším družstvom boli súťažiaci z USA so ziskom 181,8 bodu.

Marián Kovaľ je už štvrtým držiteľom zlatej medaily z EuPhO, a tretím, ktorý sa umiestnil v prvej desiatke absolútneho poradia. V roku 2018 sme mali absolútneho víťaza EuPhO. Našim žiakom vyhovujú úlohy s krátkym zadaním, pričom nie sú nijakým spôsobom vedení k riešeniu danej úlohy. Pri riešeniach úloh tohto typu sa ukazuje ich kreativita. V tomto roku bola úloha zo špeciálnej teórie relativity. Venovali sme sa v príprave tejto téme, a chlapci tvrdili, že im to pomohlo.

9. ročník EuPhO sa uskutoční **v Sofii v Bulharsku** v dňoch 13. - 17. 6. 2025.

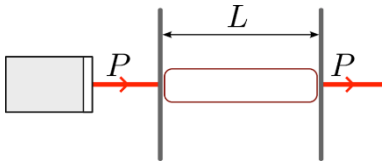
Teoretické úlohy:

1) Puk (malý disk) s polomerom r a konštantnou hustotou sa pohybuje po vodorovnej rovine rýchlosťou v_0 bez rotácie. Puk sa stretáva s pevnou polkruhovou stenou s polomerom $R \gg r$ a začne sa pohybovať pozdĺž steny. Faktor trenia medzi pukom a stenou je μ, a trenie medzi pukom a vodorovnou rovinou je zanedbateľné.



   a. Určte rýchlosť puku v_e keď opustí stenu.
   b. Nakreslite graf $v_e(\mu)$. Vyznačte dôležité body na grafe. Odporúčame vám, aby ste graf nakreslili aj vtedy ak ste nenašli presný vzorec pre v_e.

2) *Fabryho-Pérotov* interferometer pozostáva z dvoch identických rovnobežných rovinných zrkadiel, ktoré sú od seba vzdialené L. Priestor medzi zrkadlami a mimo nich je vyplnený vzduchom. Zrkadlá sú polopriepustné; keď svetlo dopadá kolmo na jedno z týchto zrkadiel je intenzita odrazeného lúča $R < 1$ násobkom intenzity dopadajúceho lúča. Predpokladajme, že zrkadlá sú symetrické, čo znamená, že rovnako interagujú so svetlom dopadajúcim z oboch strán, a sú bezstratové. Predpokladajme tiež, že sú vysoko odrazivé, čo znamená, že $(1 - R) \ll 1$. Monochromatický laserový lúč s výkonom P smeruje k interferometru kolmo na zrkadlá. Vzdialenosť L je zvolená tak, aby spätne odrazený lúč zanikol, t.j. aby sa celý optický výkon preniesol cez interferometer.



   a. Ukážte, že laserový lúč musí mať nenulový fázový posun Φ, keď prechádza ktorýmkoľvek zo zrkadiel.
   b. Nájdite veľkosť Φ.
   c. V určitom okamihu sa dopadajúci laserový lúč rýchlo vypne. Nájdite celkovú energiu svetla, ktoré sa po vypnutí lasera vráti z interferometra späť k laseru.
   d. Odhadnite dobu trvanie svetelného impulzu, ktorý sa vracia späť k laseru.

3) Alica a Bob sú dvojičky astronauti na dlhej vesmírnej misii. Po mnohých rokoch sa konečne k sebe približujú, aby sa opäť stretli. Alicina vesmírna loď sa pohybuje smerom k Bobovej vesmírnej lodi rýchlosťou $u = (3/5)\ c$, kde c je rýchlosť svetla. Alica aj Bob si počas približovania posielajú darčeky. Alica posiela Bobovi darčeky v pravidelných časových intervaloch Δt_0 v jej vzťažnej sústave, pričom každý darček sa pohybuje rýchlosťou $v = (4/5)c$ (opäť v jej vzťažnej sústave). Podobne Bob posiela Alici darčeky v rovnakých pravidelných časových intervaloch Δt_0 v jeho vzťažnej sústave, pričom každý darček sa pohybuje rýchlosťou $v = (4/5)c$ v jeho vzťažnej sústave. Predpokladajme, že vzdialenosť L medzi Alicou a Bobom je taká veľká, že v danom okamihu je na ceste medzi nimi veľa darčekov.
   a. V Bobovej vzťažnej sústave určte
      i) vzdialenosť medzi dvoma po sebe nasledujúcimi darčekmi, ktoré poslala Alica,
      ii) časový interval Δt_1, v ktorom tieto darčeky od Alice prichádzajú na Bobovu loď.
   b. V danom okamihu Alica vidí niekoľko darčekov, ktoré sa od nej vzďaľujú, a niekoľko darčekov, ktoré sa k nej približujú. Aký je pomer medzi týmito dvoma číslami?

Ľubomír Mucha[7]

[7] RNDr. Ľubomír Mucha; vedúci delegácie; podpredseda SK FO

Slovenské družstvo na 8. ročníku EuPhO zľava: Ľubomír Konrád, Marián Kovaľ, Tomáš Kubrický, Adam Harmanský, Vladimír Slanina. Richard Dudek, Ľubomír Mucha.

.

JUBILEUM

Životné jubileum prof. RNDr. Anny Tirpákovej, CSc.

V apríli 2024 sa prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc., rodená Babuliaková, dožíva okrúhleho životného jubilea. Profesorka Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre je dušou i mysľou matematička a pedagogička, v súkromí milujúca matka ako i stará mama, vždy ochotná pomôcť nielen s matematickým problémom.

prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc.

Profesorka Tirpáková sa narodila 18. apríla 1954 v Čadci, kde vyrastala a aj absolvovala Strednú všeobecnovzdelávaciu školu. Po maturite sa rozhodla pre štúdium matematiky a fyziky na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave. Po úspešnom ukončení štúdia pôsobila ako stredoškolská učiteľka na SOU vojenskom v Nitre.

Jej vedecká kariéra začala v roku 1980 v Archeologickom ústave Slovenskej akadémie vied v Nitre. V tom isto roku získala akademický titul RNDr. v Teórii vyučovania matematiky na MFF UK v Bratislave. Vedecká hodnosť CSc. jej bola udelená v roku 1990 vo vednom odbore Pravdepodobnosť a matematická štatistika na MFF UK v Bratislave. Dizertačná práca „*Príspevok k teórii pravdepodobnosti na F-kvantových priestoroch*“ bola venovaná fuzzy modifikáciám niektorých pojmov z teórie pravdepodobnosti.

V roku 1990 prijala miesto vedeckého pracovníka na Vysokej škole pedagogickej v Nitre. Od roku 1992 začala pôsobiť ako odborná asistentka na Katedre matematiky Fakulty prírodných vied Vysokej školy pedagogickej v Nitre, kde doteraz aktívne pracuje. V roku 2002 obhájila habilitačnú prácu „*O vyučovaní aplikovanej štatisticky v spoločenských vedách*“ a získala vedecko – pedagogický titul docent v odbore Teória vyučovania matematiky na UKF. Vedecko – pedagogický titul profesor v odbore Štatistika získala po úspešnom inauguračnom konaní v roku 2009 na

Mendelovej univerzite v Brne. V súčasnosti pôsobí ako profesorka na Katedre matematiky Fakulty prírodných vied a informatiky UKF v Nitre a na Ústave školní pedagogiky Fakulty humanitních studií Univerzity Tomáše Bati v Zlíne.

Vedecko – výskumná orientácia profesorky Tirpákovej je zameraná na pravdepodobnosť a štatistiku, aplikáciu matematických a štatistických metód v prírodných vedách, psychológii, pedagogike, medicíne či v archeológii. Zameriava sa aj na výskum v teórii vyučovania matematiky ako i v teórii fuzzy množín.

Pani profesorka významnou mierou prispieva ku kvalitnému pedagogickému procesu na katedre matematiky. Pod jej vedením bolo úspešne obhájených dvadsaťosem bakalárskych, dvadsaťdva diplomových a šesť dizertačných prác. Vedie prednášky a semináre pre študentov bakalárskeho, magisterského aj doktorandského štúdia. V aktuálnej pedagogickej činnosti sa venuje konkrétne výučbe štatistiky pre matematické aj nematematické odbory, analýze časových radov či štatistickému riadeniu kvality.

Obdivuhodná je aj profesorkina aktivita v rôznych komisiách, výboroch a radách. Je osobou zodpovednou za študijné programy na katedre matematiky na prvom a druhom stupni učiteľského i jednoodborového štúdia matematiky a na treťom stupni v teórii vyučovania matematiky, je predsedníčkou komisie pre habilitačné konanie a konanie na vymenovanie profesorov v študijnom odbore Teória vyučovania matematiky na UKF v Nitre a členkou komisie v odbore Aplikovaná matematika na STU v Bratislave. V Slovenskej Akreditačnej Agentúre je posudzovateľkou pre Vysoké školstvo SR pre odbor matematika. Taktiež je aktívnou členkou komisie KEGA MŠVVaŠ SR, Univerzitnej grantovej agentúry UKF v Nitre, Vedeckej rady UKF i Vedeckej rady FPVaI UKF v Nitre. Svoje členstvo zastáva aj vo výbore Jednoty slovenských matematikov a fyzikov a v Slovenskej štatistickej a demografickej spoločnosti. Je predsedníčkou a členkou štátnicových komisií, komisií pre rigorózne konanie a pre doktorandské štúdium v odbore Teória vyučovania matematiky na Fakulte prírodných vied a informatiky UKF v Nitre.

Publikačná činnosť profesorky Tirpákovej je veľmi bohatá. Je spoluautorkou dvadsiatich učebníc, štrnástich monografií a piatich učebných textov. Za vysokoškolskú učebnicu Základy štatistiky pre pedagógov jej bola udelená Cena dekana v kategórii „vysokoškolské učebnice, učebné texty“. Počas svojej kariéry publikovala stosedemdesiatosem vedeckých článkov, z toho dvadsaťtri článkov v karentových časopisoch a tridsaťtri článkov je registrovaných v databázach SCOPUS alebo Web of Science. Každoročne je jej udelená Cena rektoraza dosahovanie vynikajúcich výsledkov v oblasti medzinárodne akceptovanej publikačnej činnosti. Z jej článkov čerpá mnoho výskumníkov, čoho je dôkazom štyristo päťdesiatšesť citácii, z toho dvestoosem citácii je SCI.

Vážená pani profesorka, milá Anička, pri príležitosti Vášho okrúhleho jubilea Vám v mene súčasných aj bývalých kolegov i študentov prajeme všetko najlepšie, veľa zdravia, mnoho šťastných rokov a úspechov tak ako v pracovnom aj osobnom živote.

Veronika Bočková, Gabriela Pavlovičová [8]

[8] Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied a informatiky, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, 949 01 Nitra
e-mail: vbockova@ukf.sk, gpavlovicova@ukf.sk

SPOMÍNAME

Zomrela jedinečná tvár didaktiky fyziky na Slovensku doc. RNDr. Mária Rakovská CSc.

* 27. 1. 1936, Bratislava – †7. 5. 2024 Nitra

Dňa 7. 5. 2024 vo veku 88 rokov nás opustila jedinečná osobnosť didaktiky fyziky s výnimočným entuziazmom a ľudským prístupom, osobnosť, ktorá vždy dokázala povzbudiť, inšpirovať a podať pomocnú ruku, osobnosť, ktorá milovala svoje povolanie a študentov, ktorým venovala celý svoj potenciál, pracovníčka Katedry fyziky Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre doc. RNDr. Mária Rakovská, CSc.

Bola jedinečnou tvárou didaktiky fyziky nielen v Nitre, ale i v celom bývalom Československu. Pod jej vedením sa formovali mnohé osobnosti didaktiky fyziky. Do povedomia sa zapísala aj ako členka Jednoty slovenských matematikov a fyzikov v Nitre, redaktorka časopisu Fyzikálne obzory, členka výborov Československej a Slovenskej Fyzikálnej olympiády, spoluorganizátorka vedeckej konferencie s medzinárodnou účasťou DIDFYZ, vedúca oddelenia Didaktickej techniky pri Katedre fyziky (1980 – 1990). V prvom rade bola našou kolegyňou a nezabudnuteľnou Maricou, ako sme ju familiárne volali. Svojim pozitívnym prístupom a ochotou pomáhať v každej situácii si získala srdcia všetkých nás. Jej odchod nás všetkých, ktorí sme ju poznali a prežili s ňou dlhé obdobie, hlboko zasiahol.

Doc. RNDr. Mária Rakovská, CSc. Sa narodila 27. 1. 1936 v Bratislave. V roku 1953 maturovala na gymnáziu v Bratislave. Následne v roku 1957 absolvovala štúdium fyziky a chémie na Vysokej škole pedagogickej v Bratislave. Po niekoľkoročnom pôsobení na poste stredoškolského učiteľa na JSŠ v Piešťanoch (1957 – 1959), DSŠ v Bratislave a JSŠ v Nitre (1959 – 1961) prijala v roku 1961 miesto asistentky fyziky na novovznikajúcom Pedagogickom inštitúte v Nitre, neskôr odbornej asistentky na Katedre matematiky a fyziky Pedagogickej fakulty v Nitre (neskôr Katedra fyziky Fakulty prírodných vied UKF v Nitre).

V intenciách svojej vedeckej činnosti využila poznatky zo svojho pôsobenia na stredných školách. Z hľadiska svojej kvalifikácie a odbornej orientácie od začiatku sa venovala príprave študentov na učiteľské povolanie, a to prednáškami a cvičeniami z metodiky fyziky, techniky školských pokusov a vedením pedagogickej praxe. Zo začiatku viedla metodickú prípravu študentov na povolanie učiteľa fyziky pre základné školy, po roku 1976 prípravu budúcich učiteľov fyziky pre základné a stredné školy. V období 70-tych rokov patrila metodika fyziky a pedagogická prax medzi dôležité povinnosti študentov pedagogických fakúlt, doc. Mária Rakovská sa tejto práci naplno venovala a požadovala adekvátne výkony aj od študentov. Od začiatku pôsobenia na PI a PdF v Nitre spolupracovala so svojimi kolegami na ostatných fakultách v Československu. Podieľala sa na príprave a organizovaní pravidelných spoločných rokovaní učiteľov pedagogických fakúlt, ktoré viedol prof. Miloš Lanský. Na rokovaniach sa vymieňali skúsenosti a formoval sa jednotný program prípravy učiteľov fyziky pre ZŠ na novom type vysokých škôl – pedagogických inštitútoch. Aj pre učiteľov I. a II. stupňa ZŠ sa vyžadovala vysokoškolská kvalifikácia.

Viedla prípravu približne 60 diplomových prác magisterského štúdia a 2 prác doktorandského štúdia.

V roku 1974 obhájila rigoróznu prácu „Motivácia experimentálnej činnosti žiakov vo fyzike“ na Prírodovedeckej fakulte UK v Bratislave.

V didaktike fyziky, ako vednom odbore, sa orientovala na spoluprácu s uznávaným pracoviskom, Prírodovedeckou fakultou Palackého univerzity v Olomouci. Na tejto fakulte absolvovala externú vedeckú ašpirantúru, pod vedením prof. PaedDr. Jozefa Fuku, roku 1980 získala vedeckú hodnosť kandidát fyzikálno-matematických vied v študijnom odbore metodika fyziky obhájením dizertačnej práce „Graf fyzikálnej závislosti v školskom kurze fyziky a formovanie žiackych schopností pracovať s grafom“. Roku 1983 bol jej udelený vedecko – pedagogický titul docent v odbore Teória vyučovania fyziky.

Desiatky rokov patrila medzi organizátorov výskumu a vedeckej spolupráce katedier fyziky učiteľských fakúlt. Patrila medzi zakladateľov, organizátorov a prednášateľov národných a medzinárodných konferencií DIDFYZ. Prispela k tomu, že v rámci Česko-Slovenska sa položili základy a úspešne sa rozvíjal vedecký odbor Teória vyučovania fyziky (TVF). Od roku 1988 spolupracovala pri príprave vedeckých ašpirantov v odbore TVF na svojom pracovisku. Od roku 1999 bola jedným z garantov a školiteľom doktorandského štúdia a členkou komisie pre habiltácie v odbore TVF na Fakulte prírodných vied UKF v Nitre.

Počas dlhoročného pôsobenia na Katedre fyziky sa zúčastnila na mnohých vedeckých konferenciách doma i v zahraničí, kde prezentovala výsledky výskumov získané pri riešení úloh rezortných plánov MŠ R – III – 3/7 Rýchlosť zmeny fyzikálnej veličiny a ďalších, ale najmä úlohy ŠPZV VIII – 6 – 7/2 Moderní matematicko-

přírodovědní vzdělání, podmínky jeho realizace a účinného výchovného působení, obhájená v roku 1985 v Hradci Králové. Na tieto výskumy nadväzovala hlavná oblasť jej vedeckých záujmov: metodologické problémy mladej vedy teórie vyučovania fyziky, ako i poznávacie metódy v didaktickom modeli fyziky. Od polovice 90. rokov 20. storočia venuje pozornosť otázke využitia informačno-komunikačných prostriedkov vo vzdelávaní učiteľov a žiakov a možnostiam koordinácie prírodovedného vzdelania na nižších stupňoch škôl v rámci grantových úloh. Dôkazom tejto skutočnosti je aj vznik komplexnej a ojedinelej učebnice Prírodovedné vedy - integrovaný prístup (2008, ISBN 978-80-8083-563-7), ktorá bola v spoluautorstve publikovaná v roku 2008 ako finálny produkt projektu KEGA. Pre teóriu a prax vyučovania fyziky bola veľkým prínosom i kolektívna učebnica Kreatívne poznávanie vo fyzike (Nitra, UKF 2005, I SBN 80-8050-915-8), ktorá je prezentáciou nových prístupov vo výučbe moderných oblastí fyziky.

Organizovala pedagogickú a vedeckú spoluprácu so zahraničnými pracoviskami a vysokými školami. Zvlášť intenzívna bola spolupráca s Ústavom fyziky Akadémie pedagogicyznej v Krakowe, Katedrou didaktiky fyziky FPV Univerzity Palackého v Olomouci a Štátnym pedagogickým inštitútom v Lipecku.

Okrem tejto spolupráce absolvovala viacero študijných a prednáškových pobytov, z ktorých obzvlášť významný je pobyt na Pedagogickom inštitúte v Lipecku, na Univerzite v Amsterdame, univerzitách v Opole, Krakove, Prahe.

V spolupráci s uvedenými pracoviskami vznikli zborníkové a monografické publikácie, napr. K otázkam výskumu prírodovedných schopností žiakov, In. Acta didactica 5. (Nitra, 2002. ISBN 8O-8O5O- 524-1), Integrating Science Elements into the Subject Physics for teachers. In.: Problemy fiziki technologii prepadavania. Vypusk 4. Sbornik naučnych trudov. Lipeck 2000. LPG U. No. 040343, Graphical Models in Science Education. In.:Wiedza fizyčna i jej przekaz 2000. COM S N Krakow l999 (spoluautor Horváthová,D.) ISBN 0239 6700. Science for teachers of physics, chemistry, biology and geography. Proceedings of the Conference Science teacher Training 2000. MBU B. Bystrica (1998) ISBN 8O-8055-149-9, Vývoj didaktiky na Slovensku. Acta Didactica 1. UKF Nitra 1996. I SBN 80-8050-305- 2, Formalism of Interpretation of Physical Function Graphs in School Practice. In.: Fizyka a dydaktyka fizyki. Universytet Opolski. Opole 1996. I SBN 0239-6769 (v spoluautorstve). Významnou mierou sa podieľala na príprave učiteľov fyziky. Aktívne spolupracovala na tvorbe metodických materiálov, učebníc pre vysoké školy a stredné školy, zbierok fyzikálnych úloh pre stredné a vysoké školy. Bola školiteľkou doktorandských dizertačných prác v odbore teória vyučovania fyziky. Spolupracovala ako riešiteľka viacerých projektov KEGA: Konkrétna didaktika fyziky, Fyzikálna úloha ako prostriedok učenia, hodnotenia a rozvíjania tvorivosti študenta, TEMPUS Phare: Príprava učiteľov prírodovedných predmetov, Innovation of Teachers Training in Physics and Mathematics a ďalších.

Ako spoluautorka má dominantný podiel na vysokoškolskej učebnici Kreatívne poznávanie vo fyzike, konkrétna didaktika fyziky pod autorstvom D. Kluvanca a kol. (2005), v ktorej sú rozpracované obsah a metódy bádateľského postupu vo vyučovaní fyziky na ZŠ a SŠ a v príprave učiteľov fyziky.
Desiatky rokov bola členkov recenznej rady časopisu Obzory matematiky, fyziky a informatiky. Bola desiatky rokov súvisle členkou krajského výboru Fyzikálnej olympiády v Nitre. Zúčastňovala sa na príprave žiakov na Fyzikálnu olympiádu v rámci sústredení a prednášok pre učiteľov a žiakov. Spolupracovala na prednáškových cykloch pobočky JSMF v Nitrianske fyzikálne dni (jarná a jesenná časť), na ktorých sa zúčastňovali renomovaní prednášatelia z domova i zahraničia.
Za výsledky práce jej boli udelené viaceré ocenenia a vyznamenania vedeckej spoločnosti JČSMF a JSMF (Čestné uznanie, Pedagogické vyznamenanie, Zaslúžilý člen), bronzová a strieborná medaila UKF v Nitre, ocenenia za prácu vo Fyzikálnej olympiáde a za vedenie úspešných študentov v študentskej a vedeckej činnosti.
Všetci, ktorí sme ju poznali, vieme, že sme v živote stretli človeka milujúceho svoje povolanie, dobroprajného a nápomocného vo všetkých situáciách. Taká navždy zostane v našich spomienkach.

Ľubomír Zelenický

Životné jubileum - nedožitých 110 rokov akademika Štefana Schwarza

Akademik.Štefan Schwarz. Zdroj:TASR

Matematika ho začala baviť, keď mal asi trinásť- štrnásť rokov. Gymnázium v rodnom Novom Meste nad Váhom absolvoval s vyznamenaním, preukázal nadpriemerné vedomosti z matematiky. Na vysokoškolské štúdia odišiel do Prahy (1932). Vyštudoval matematiku a fyziku na Prírodovedeckej fakulte UK (1936). Získal právo vyučovať na československých stredných školách. Napísal dizertačnú prácu, stal sa doktorom prírodných vied (1937). Zostal asistentom u prof. K. Petra, bol jeho posledným doktorandom (1939). Hektická jar roku 1939 ho vrátila na Slovensko, kde začal pôsobiť na SVŠT (docent r. 1946, profesor r. 1947, tu učil do roku 1982), od roku 1943 aj na Prírodovedeckej fakulte Slovenskej univerzity, kde sa habilitoval prácou *Teória pologrúp*. Niekoľko mesiacov strávil v koncentračnom tábore (1944 – 45). Akademikom SAV bol od roku 1953 (predseda SAV, 1965–1970), ČSAV od roku 1960. V rokoch 1966 – 1971 bol členom ÚV KSČ. Sám napísal: *Dostal som sa aj do nebezpečnej blízkosti politiky*. V rokoch 1964 – 1988 bol riaditeľom Matematického ústavu SAV. *Matematika, to je kus môjho srdca i života*.

Štefan Schwarz (18.5.1914 – 6.12.1996), vysokoškolský profesor matematiky, vo svojich prvých vedeckých prácach študoval maximálne grupy v periodických pologrupách a otázky rozložiteľnosti polynómov na ireducibilné faktory nad konečnými telesami, neskôr zasiahol do teórie konečných polí, booleovských a stochastických matíc, harmonickej analýzy i teórie čísel. Publikoval celý rad pôvodných vedeckých prác (osem monografií a učebných textov, viac než 90 vedeckých pojednaní a vyše 50 odborných statí). Ako ohlas mal okolo 700 citácií vo svetovej literatúre. Medzi učiteľmi matematiky boli obľúbené jeho publikácie *O rovnicích* (Praha 1940),

Algebraické čísla (Praha 1950), *Základy náuky o riešení rovníc* (Praha 1958). Bol na mnohých prednáškových pobytoch v Európe i zámorí. Viedol redakčnú radu vedeckého matematického časopisu *Mathematica Slovaca*.

Matematická kultúra

Nechápal matematiku ako horu čísiel, ale ako spôsob myslenia. Matematické poznatky sú súčasťou civilizačnej kultúry každej spoločnosti. Vnímal matematiku ako istý druh duchovného športu, v ktorom sa vyžaduje nadväznosť a vytrvalosť. *Matematika nie je ilustrovaný časopis, ktorý možno začať čítať na ktorejkoľvek strane... Matematika učí vytvárať presnými logickými úvahami platné závery... Matematika učí zmyslu pre pravdu, dôkladnosti a skromnosti*. Profesor Schwarz bral svoju matematiku ako nevyčerpateľný zdroj predstáv a princípov pre účinné vedecké teórie. *Matematika dáva iným vedám svoje prepracované metódy myslenia, ktoré umožňujú analýzu skrytých vlastností a vzájomných vzťahov... Podstatou matematiky je invencia... Jednou z podstatných čŕt matematiky je jej abstraktnosť*. Vždy vedel ukázať, ako matematické vedomosti vyrastali z reality, z fyzikálnych otázok a technických problémov. Znalosť teoretických riešení umožňuje praktické použitie. *Matematika učí racionálnemu spôsobu myslenia a vyjadrovania... Matematika umožňuje riešenie praktických úloh... Matematiku nie je možné odlúčiť od iných predmetov*.

Vyučovanie matematiky

Rád a zaujímavo prednášal. Vedel zaujať a upútať pozornosť. Sršal neutíchajúcim záujmom o vedeckú matematiku, odhaľoval krásu zmatematizovaného sveta. *Ak sa niekto vie zamýšľať nad predloženými faktami, má dosť trpezlivosti a neustúpi pokiaľ si neutvorí vlastný názor, potom je v ňom zárodok matematika*. Vedel, že učiteľ matematiky má poznať aj princípy fyzikálneho myslenia a vnímať vzťah k experimentu. *Podstatné je: kedy, prečo a ako daný matematický postup vedie k cieľu*. Všímal si a rozvažoval aj nad metódami vyučovania:

> *Učiť sa z kníh a živé slovo je rozdiel... Každé vyučovanie by sa malo začať motiváciou... Matematická príprava sa začína na základnej škole a prebieha celý život... Nijaký učiteľ, ktorý sa vo vlastnom odbore systematicky a trvalo nevzdeláva, nemôže byť dobrým učiteľom... Študent musí prežívať spolu s učiteľom celý pochod objavovania... Pokiaľ študent sám, bez pomoci, nezačne počítať a päťkrát sa sám nezmýli, nebude látke nikdy poriadne rozumieť... Metódy vyučovania by mali byť založené na osobných skúsenostiach tých, ktorí matematiku sami tvoria (t.j. objavujú, alebo znova objavujú).*

Aj pre vyučovanie matematiky platí, že to nie sú iba poznatky, ale aj postupy, ktorými boli dosiahnuté a ľudia, ktorí ich získali, *aby sa každý občan díval na*

matematiku ako na časť národnej kultúry a nie ako na strašiaka. Odporúčal neustále poukazovať na historický vývin, vzťah k iným odborom, ponúkať aj estetický a umelecký aspekt. Matematickú kultúru treba prenášať, vnášať, sprostredkovať, prežívať.

Systém má začínať v škole

Bol presvedčený o tom, že pre každého človeka je potrebný istý druh všeobecnej matematickej kultúry. Vznešene ponúkal aj definíciu:

> *Matematicky civilizovaná osoba nemusí byť matematický virtuóz. Je to však človek, ktorý nachádza hlboké vnútorné uspokojenie z matematického umenia.*

Vedel, že už vyučovanie na základných a stredných školách má priamu súvislosť s rozvojom kultúry celej spoločnosti. Rozhodujúci vplyv na rozvoj matematickej kultúry majú stovky, tzv. neznámych učiteľov na základných a stredných školách, ktorí v každodennej práci pripravujú budúcich študentov. Nečakané a podnetné je jeho priznanie: Stredná škola a riešenie príkladov z Rozhledov vypestovali vo mne lásku k matematike. Následkom toho aj neskôr až vášnivo riešil problémy z časopisu The Americal Mathematical Monthly. Profesor Schwarz uznal: Matematika bude vždy meradlom hĺbky ľudského myslenia. Svojím učiteľským pôsobením sa stal príkladom, ako prispievať k rozvoju matematickej kultúry. Aj priemerný matematik má tú výhodu, že vie napr. systémovo myslieť bez toho, že by sa to explicitne učil. Veril v budúcnosť širšieho i hlbšieho matematického vzdelania na našich školách. Bolo by veľmi zlým vysvedčením pre nás, keby naši nasledovníci neboli lepší, ako sme boli my.

Uznanie za vedu

Mnohí čo ho poznali, uznávali jeho vedecký i pedagogický formát, originálny učiteľský prístup, v ktorom odkrýval spôsob vlastného myslenia a široké všeobecné i hlboké matematické vzdelanie. Skoro všetci študenti (pedagogickým pôsobením ovplyvnil vysokoškolskú výchovu stoviek inžinierov a matematikov) priznávali neopakovateľné zážitky z jeho prednášok, spolupracovníci oceňovali jeho rozmer odborný i ľudský. Nikto nespochybňuje, že prof. Schwarz prispel k rozvoju matematickej vedy, k popularizácii štúdia matematiky, ku kvalite vysokoškolskej výučby matematických disciplín a rozšíreniu vedeckej práce v oblasti matematiky. *Do vedy môžu hovoriť len srdcia zapálené pre dobrú vec. Len vnútorné nefalšované nadšenie sa prenáša na ďalšie generácie*. Profesor Schwarz bol prvým slovenským matematikom, ktorý dosiahol medzinárodné uznanie. Vyjadrené jednou vetou profesora Tibora Šaláta: *Akademik Štefan Schwarz sa zapísal trvalým písmom do dejín matematiky v našej vlasti.*

Človek má premýšľať

Možno aj novinárom, ktorých nemal moc rád, raz naznačil: *Každého treba posudzovať z hľadiska doby, v ktorej žil a pracoval*. Novinárka, ktorej sa stal „*obeťou*“, priznala, že stretla svojrázneho človeka a napísala: *Mňa vždy upútal jeho intelektuálny sarkazmus, cit pre irónium a zmysel pre vtip. Úchvatne a s príťažlivou ľahkosťou dokázal rozprávať o svojej matematike*. Prof. Schwarz sa nebál priznať: *Matematika má pre mňa v sebe toľko estetických prvkov, ako výtvarné umenie. Keď niečo pochopím, čo som doteraz len málo rozumel, mám rovnaký pocit zadosťučinenia ako umelec z vydareného diela.* Nielen novinári si môžu pamätať Schwarzov svojský odkaz:

Len premýšľajte. A nielen o matematike. O všetkom.

Profesorovo prianie

Opriem sa o rýľ a premýšľam. Aj to sú slová vysokoškolského učiteľa, ktorý svojou celoživotnou vedeckou i pedagogickou činnosťou osvedčil, že školská matematika môže byť zaujímavá a dá sa jej rozumieť. Hlboké spoznávanie abstraktných matematických súvislostí ponúka dotyk s nadčasovým duchovným Tajomstvom. Nielen tým, ktorí poznali a spomínajú na profesora Štefana Schwarza, pripomínam jeho želanie:

Ja by som si najväčšmi prial, aby ľudia nestrácali ideály.

Dušan Jedinák [9]

L i t e r a t u r a – R e f e r e n c e s

Nemoga, K., Riečan, B.: *Matematika v b mol. Štefan Schwarz - matematik a pedagóg,* Bratislava, Veda vyd. Slovenskej akadémie vied, 1999. 218 s. ISBN:80-224-0548-5.

Schwarz, Š.: *Matematika a život*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 52 (2007), No. 4, 307 – 310.

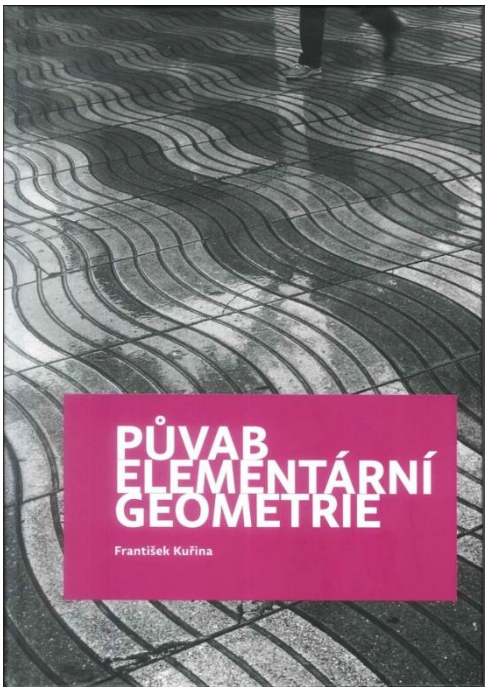
Schwarz, Š.: *Matematika na Univerzite Karlovej v 30. rokoch a dnešok*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie Vol. 30 (1985), No 2, 57 – 68.

Schwarz, Š.: *Prečo a ako zvyšovať matematickú kultúru*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 31 (1986), 314 – 326.

[9] Tribečská ul. 2136/8, 955 01 Topoľčany
e-mail: kanidej1944@gmail.com

RECENZIA

Recenzia na knihu František Kuřina: Půvab elementární geometrie[10]



V posledných desaťročiach sme svedkami komerčného trendu v počte a kvalite vydávaných odborných publikácií a to ako domácich, tak aj zahraničných vydavateľstiev. V tomto trende nie je odborná matematická literatúra výnimkou. V záplave kvantity však nadšenca matematiky vždy zaujme knižka, ktorá sa obsahom i formou vymyká z bežného štandardu. Takou je aj publikácia Františka Kuřiny *Půvab elmentární geometrie*¸ ktorú vydalo v roku 2021 vydavateľstvo Gaudeamus Univerzity Hradec Králové.

Už sám názov je poetický a naznačuje, že knižka na 225 stranách predstavuje čitateľovi elementárnu geometriu v podobe intelektuálne podnetnej matematickej disciplíny.

Obsahom je rukopis tematicky rôznorodý. Prináša 12 tematických celkov: *elementárna geometria, obsahy a objemy, geometrické zobrazenia, dôkazy, mnohouholníky, metrické priestory, delenie uhla, afinita, kolineácia, kombinatorická geometria, chyby a omyly, axiomatika*.

Kapitoly sú prístupné každému čitateľovi, ktorý má znalosti v rozsahu gymnaziálnych osnov. Nespornou výhodou je, že čitateľ sa môže venovať problematike jednotlivých kapitol nezávisle na poradí, v akom sú zaradené do publikácie. Vďaka autorovej pedagogickej erudovanosti je publikácia napísaná spôsobom, ktorý

[10] KUŘINA, František: *Půvab elementární geometrie*. Gaudeamus, 2021, 227 s.
ISBN 978-80-743-5839-5.

neodradzuje, dokonca ani laickú verejnosť nezvyklú čítať matematický text. Výklad nie je zaťažený detailným spracovaním teórie, prísnou formuláciou tvrdení, ani nadmerným použitím matematickej symboliky, ale zachováva si postačujúcu presnosť a príťažlivosť.

Každú kapitolu sprevádza veľa inšpiratívnych geometrických úloh. Sú doplnené názornými obrázkami a neraz aj prekvapivými riešeniami. Spracovanie textu, krátke historické poznámky, doplnkové odkazy na literatúru a v neposlednom rade aj vtipné ilustrácie vedú čitateľa k hlbšej matematickej činnosti a hľadaniu ďalších súvislostí. V tomto smere je príkladne spracovaná kapitola o metrických priestoroch, či kapitola venovaná kombinatorickej geometrii.

Som presvedčený, že knižka prof. Františka Kuřiny bude obľúbenou medzi čitateľmi. Nájde si svoju cestu k študentom, učiteľom matematiky základných a stredných škôl, didaktikom matematiky alebo nadšencom pre geometriu.

Dušan Vallo[11]

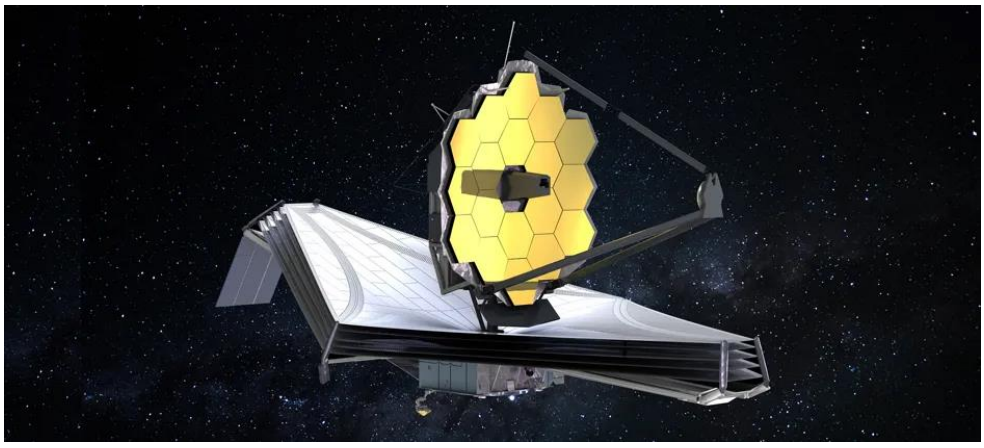
[11] Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied a informatiky UKF v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, 949 01 Nitra, **e-mail**: dvallo@ukf.sk

Odhalený vesmír

Často sa hovorí, že zakaždým, keď sa pozrieme na vesmír z nového uhla pohľadu — alebo cez novú šošovku — vidíme veci, ktoré sme si nikdy nevedeli predstaviť. Vesmírny teleskop James-a Webb-a (JWST – NASA/ESA/CSA) splnil tento sľub. Na prelome roka oznámili astronómovia, že zlaté oko teleskopu tvaru včelieho plástu zachytilo pohľady na prvé hviezdy vesmíru. JWST tiež zaznamenal svetlo z galaxií, ktoré žiarili približne 300 miliónov rokov po veľkom tresku, ktorý stvoril vesmír, ako ho poznáme. Na obrázkoch sú tieto galaxie neuveriteľne jasné. Teraz sa astronómovia snažia vysvetliť, ako tieto galaxie tak rýchlo vyrástli, pretože ich veľkosť a rýchlosť vývoja presahujú očakávania.

To isté platí aj pre superhmotné čierne diery, ktoré ukotvujú galaxie do kozmickej tapisérie. Vedci očakávali, že v ranom vesmíre uvidia niekoľko veľkých čiernych dier, ale JWST ich objavuje vo veľkom množstve. Ich výskyt je rannejší a sú väčšie, než sa očakávalo. Astronómovia dúfajú, že takéto pozorovania odhalia, ako sa tieto obrovské čierne diery vytvorili.

V našej vlastnej galaxii, v hmlovine Orion, zaznamenal JWST nedávno 42 zaujímavých párov objektov, ktoré obiehajú okolo seba. Tieto svety môžu byť hviezdy alebo voľne sa pohybujúce planéty. Je ťažké to povedať. V každom prípade tieto záhadné svety nezapadajú presne do existujúcich teórií, ktoré popisujú, ako sa vytvárajú buď hviezdy, alebo voľne sa pohybujúce planéty.



Vesmírny teleskop James-a Webb-a (ilustrácia, s poďakovaním Wang, Pan et al).

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Jednota slovenských matematikov a fyzikov pobočka Nitra,
(kontaktná adres: Schurmannova 27, 949 01 Nitra)
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
kontakt: Prof. Martin Kalina, KMDG SvF STU, Radlinského 11,
810 05 Bratislava (e-mail: martin.kalina@stuba.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
2/2024 ročník 53

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Aba Teleki
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 350 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: jún 2024

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal “Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences”
OMFI 2/2024 Volume 53
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

Alena Š o l c o v á : Fourierův odkaz dnešku 1
Zadania úloh 74. ročníka Matematickej olympiády (Stanislav Krajči) 10
Peter N o v o t n ý : História Slovenskej matematickej olympiády
Slovenská matematická olympiáda v období 2009-2020 13
Jozef B e ň u š k a : Od tornáda k firenadu 23
Katalin S ó s , László N á n a i : Fyzikálne procesy v prírode – Pôda 44
INFORMÁCIE
Konferencia pre učiteľstvo matematiky:
Dva dni s didaktikou matematiky (Mária Slavíčková) 51
8. Európska Fyzikálna Olympiáda – EuPhO(Ľubomír Mucha) 53
JUBILEUM
Životné jubileum prof. RNDr. Anny Tirpákovej, CSc.
(Veronika Bočková, Gabriela Pavlovičová) 59
SPOMÍNAME:
Zomrela jedinečná tvár didaktiky fyziky na Slovensku
doc. RNDr. Mária Rakovská CSc. (Ľubomír Zelenický) 62
Life Anniversary - Unfulfilled 110th Birthday of Academician Štefan Schwarz
(Dušan Jedinák) 66
RECENZIA
Recenzia na knihu: František Kuřina: Půvab elementární geometrie
(Dušan Vallo) 70
Odhalený vesmír (TA) 72

CONTENTS

Alena Š o l c o v á : Fourier‘s Legacy for Today 1
Tasks of the 74th Mathematical Olympiad (Stanislav Krajči) 10
Peter N o v o t n ý : History of the Slovak Mathematical Olympiad
The Slovak Mathematical Olympiad in the period 2009-2020. 13
Jozef B e ň u š k a : From Tornado to Firenado 23
Katalin S ó s , László N á n a i : Physical Processes in Nature – Soil 44
INFORMATION
Conference for Mathematics Teaching: Two Days with the Didactics of Mathematics
(Mária Slavíčková) 51
8th European Physics Olympiad – EuPhO (Ľubomír Mucha) 53
ANNIVERSARIES
Life Anniversary of Prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc.
(Veronika Bočková, Gabriela Pavlovičová) … 59
IN MEMORIAM
Passing of a Unique Figure in Physics Didactics in Slovakia,
Assoc. Prof. RNDr. Mária Rakovská, CSc. (Ľubomír Zelenický) 62
Life Anniversary - Unfulfilled 110th Birthday of Academician Štefan Schwarz
(Dušan Jedinák) 66
REVIEWS
Review of the Book: František Kuřina: The Charm of Elementary Geometry
(Dušan Vallo) 70
Unveiled Universe (TA) 72