

OBSOBY

1/2024 (53)

MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2024 ročník 53

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 1/2024 Volume 53

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Znáť, Beloslav Riečan et Daniel Kľuvanec

Editors in Chief: Jozef Doboš (Mathematics and Computer Sciences)

International Editorial Board:

Anatolij Dvurečenskij (Slovakia)	Štefan Luby (Slovakia)
Gábor Galambos (Hungary)	László Náai (Hungary)
Juraj Hromkovič (Switzerland)	Adam Płocki (Poland)
Hans Jordens (Netherland)	Zdeněk Půlpán (Czech republic)
Martin Kalina (Slovakia)	Ladislav Emanuel Roth (USA)

Executive Editors: Štefan Tkáčik (Mathematics and Computer Sciences)
Aba Teleki (Physics)

Editorial Board:

Mathematics and Computer Sciences:

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Peter Maličký	Iveta Scholtzová
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Mariana Marčoková	Milan Turčáni
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Milan Matejdes	Peter Vrábel
Tomáš Lengyelfalusy	Martin Papčo		

Physics:

Jozef Beňuška	Stanislav Holec	Viera Lapitková	Vladimír Šebeň
Ivo Čáp	Anna Jankovychová	Milan Noga	Boris Tomášik
Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó	Bohumil Vybíral

Reviewers:

Mathematics and Computer Sciences:

Ružena Blašková	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan
Radoslav Harman	Martin Papčo	Marián Trenkler
Mária Kmeťová	Iveta Scholtzová	Dušan Vallo

Physics:

Peter Demkanin	Peter Hanisko	Marián Kíreš	Arnold Pompoš
Jozef Hanč	Ján Klíma	Miroslava Ožvoldová	

Užití diskriminantu kvadratické rovnice při určování extrémů funkcí

Dag Hrubý

Abstract [Using the discriminant of a quadratic equation in determining the extreme values of functions]: The article deals with determining the extrema of functions without using the derivative of the function. Examples of functions whose extrema can be determined using the so-called discriminant of the function are given. This procedure is possible only in the case of such a function $y = f(x)$ for which the expression $y - f(x) = 0$ represents a quadratic equation with parameter y (either with the unknown x , or – after substitution – with another unknown). This procedure determining the extrema of a function is referred to as the discriminant method.

Key words: discriminant function, discriminant method

Souhrn: Článek se zabývá stanovením extrémů funkcí bez použití derivace funkce. Jsou uvedeny příklady funkcí, jejichž extrémy lze určit pomocí tzv. diskriminantu funkce. Tento postup je možný pouze v případě takové funkce $y = f(x)$, pro kterou výraz $y - f(x) = 0$ představuje kvadratickou rovnici s parametrem y (buď s neznámou x , nebo – po substituci – s jinou neznámou). Tento postup určování extrémů funkce je označen jako metoda diskriminantu.

Klíčová slova: diskriminant funkce, metoda diskriminantu

MESC: D50

Určování extrémů funkcí je populární partií učiva matematiky jak pro žáky, tak pro jejich učitele. V případě, že je diferenciální počet zařazen do učiva matematiky, pak se zpravidla při určování extrémů funkcí používá první a druhé derivace funkce. Cílem tohoto článku je ukázat, jak lze určit extrémy některých funkcí jiným a v jistém smyslu i jednodušším způsobem. Metoda souvisí s kvadratickou rovnicí, což vytváří její omezenou možnost použití. Postup při určování extrémů si vysvětlíme na příkladu kvadratické funkce

$$y = ax^2 + bx + c,$$

kde a, b, c jsou reálná čísla a $a > 0$. Rovnost uvedeme na tvar

$$ax^2 + bx + c - y = 0 \tag{1}$$

Dostáváme kvadratickou rovnici s parametrem y . Protože x je reálné číslo, musí být diskriminant této rovnice nezáporný. Tento diskriminant budeme značit D a pro stručnost nazývat *diskriminant funkce*. Je tedy

$$D = b^2 - 4ac + 4ay$$

Z podmínky $D \geq 0$ plyne $b^2 - 4ac + 4ay \geq 0$, tedy $y \geq \frac{4ac-b^2}{4a}$.

Tedy platí $y \in [\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty)$. Hodnota $y = \frac{4ac-b^2}{4a}$ představuje nejmenší hodnotu funkce $y = ax^2 + bx + c, a > 0$. Odpovídající hodnotu x získáme dosazením do rovnice (1).

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c - \frac{4ac-b^2}{4a} &= 0 \\ 4ax^2 + 4abx + b^2 &= 0 \\ (2ax + b)^2 &= 0 \\ |2ax + b| &= 0 \\ x &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Funkce $y = ax^2 + bx + c, a > 0$ má minimum v bodě $x = -\frac{b}{2a}$. Tento postup, při kterém bude možné danou funkci vyjádřit ve tvaru rovnice (1) s diskriminantem D budeme stručně nazývat *metoda diskriminantu*.

S podobným postupem se můžeme setkat v článku Bohumila Bydžovského [1], ve kterém je řešena tato úloha:

Kladné číslo a jest rozložit ve dva sčítance tak, aby součet jednoho sčítance a polovičního čtverce sčítance druhého byl co nejmenší.

Bydžovský zde označí sčítance x a $a - x$ a obdrží výraz

$$y = x + \frac{1}{2}(x - a)^2 \tag{2}$$

Výraz (2) pokládá za rovnici s neznámou x

$$\begin{aligned} x^2 - 2(a-1)x + a^2 - 2y &= 0 \\ x_{1,2} &= (a-1) \pm \sqrt{2y - (2a-1)} \end{aligned}$$

Aby bylo x reálné, musí být $2y - (2a-1) \geq 0$. Nejmenší možná hodnota y je proto rovna $a - \frac{1}{2}$ a příslušné x je rovno $a - 1$. Aby zmíněný součet nabyl hodnoty co

nejmenší, musí být druhý sčítanec roven 1 a první $a - 1$. Také v knize Josefa Dvořáka [2] je podobným postupem řešena následující úloha:

Je-li x číslo reálné, v jakých mezích se pohybuje $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4}$?

Po úpravě dostaneme rovnici

$$(y - 1)x^2 + 2(y + 1)x + 4(y - 1) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(y + 1) \pm \sqrt{-3y^2 + 10y - 3}}{y - 1}$$

Aby bylo x reálné, musí platit $-3y^2 + 10y - 3 \geq 0$, tedy $(3y - 1)(y - 3) \leq 0$. Odtud již plyne $y \in [\frac{1}{3}, 3]$.

Metodu diskriminantu si ukážeme na následujících úlohách.

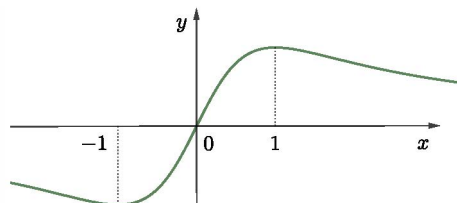
Úloha 1

Určete extrémy funkce $y = \frac{2x}{1 + x^2}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} y - \frac{2x}{1 + x^2} &= 0 \\ yx^2 - 2x + y &= 0 \\ D &= 4 - 4y^2 \\ 4 - 4y^2 &\geq 0 \\ |y| &\leq 1 \end{aligned}$$

Nejmenší hodnota funkce je $y = -1$, největší hodnota je $y = 1$. Odpovídající hodnoty x získáme dosazením za y do rovnice $yx^2 - 2x + y = 0$. Po úpravě dostaneme rovnice $x^2 + 2x + 1 = 0$ a $x^2 - 2x + 1 = 0$. Odtud plyne, že funkce má minimum v bodě $x = -1$ a maximum v bodě $x = 1$. Graf funkce je na obr. 1.



Obrázek 1

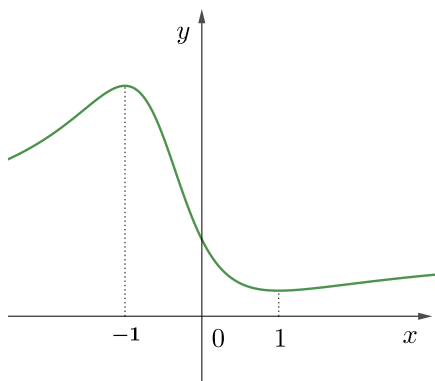
Úloha 2

Určete extrémy funkce $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} y - \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} &= 0 \\ (y - 1)x^2 + (y + 1)x + y - 1 &= 0 \\ D &= -3y^2 + 10y - 3 \\ (3y - 1)(y - 3) &\geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Funkce má nejmenší hodnotu $y = \frac{1}{3}$ a největší $y = 3$. Po dosazení do rovnice (3) dostaneme rovnice $x^2 - 2x + 1 = 0$ a $x^2 + 2x + 1 = 0$. Funkce má minimum v bodě $x = 1$ a maximum v bodě $x = -1$. Průběh funkce ilustruje obr. 2.



Obrázek 2

Úloha 3

Určete extrémy funkce $y = \frac{2x^2 - 12x + 11}{x^2 - 6x + 5}$.

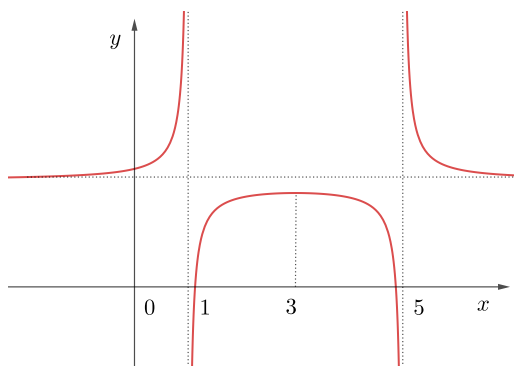
Řešení.

$$\begin{aligned} y - \frac{2x^2 - 12x + 11}{x^2 - 6x + 5} &= 0 \\ (y - 2)x^2 + (12 - 6y)x + 5y - 11 &= 0 \\ D &= 16y^2 - 60y + 56 \\ 4(4y - 7)(y - 2) &\geq 0 \\ y &\in (-\infty, \frac{7}{4}] \cup (2, +\infty) \end{aligned} \tag{4}$$

Hodnotu $y = 2$ musíme vyloučit, protože ze zadání funkce plyne

$$(2x^2 - 12x + 11) : (x^2 - 6x + 5) = 2 + \frac{1}{x^2 - 6x + 5}$$

a proto $y \neq 2$. Funkce nabývá pouze lokálního maxima, jehož hodnota je $y = \frac{7}{4}$. Po dosazení do rovnice (4) dostáváme rovnici $x^2 - 6x + 9 = 0$. Funkce má maximum v bodě $x = 3$. Graf funkce je na obr. 3.



Obrázek 3

Úloha 4

Určete extrémy funkce $y = \sin^2 x + \sin x$ v intervalu $(0, 2\pi)$.

Řešení.

$$\begin{aligned} y - \sin^2 x - \sin x &= 0 \\ \sin^2 x + \sin x - y &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Po substituci $t = \sin x$ dostaneme kvadratickou rovnici, ze které již určíme odpovídající hodnoty y .

$$\begin{aligned} t^2 + t - y &= 0 \\ D &= 1 + 4y \\ 1 + 4y &\geq 0 \\ y &\geq -\frac{1}{4} \end{aligned} \tag{6}$$

Hodnota lokálního minima je $y = -\frac{1}{4}$. Po dosazení do rovnice (5) dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} 4 \sin^2 x + 4 \sin x + 1 &= 0 \\ (2 \sin x + 1)^2 &= 0 \\ \sin x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

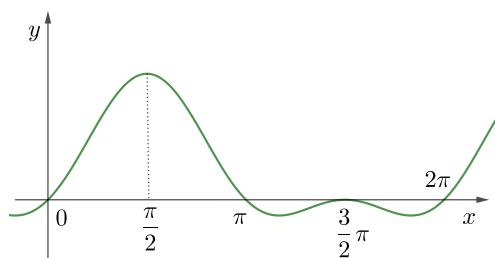
V intervalu $(0, 2\pi)$ je $\sin x = -\frac{1}{2}$ právě pro $x = \frac{7}{6}\pi$ a $x = \frac{11}{6}\pi$. V těchto bodech má funkce lokální minima. Pro určení lokálního maxima je nutné si uvědomit, že v intervalu $(0, \pi)$ platí $y = \sin^2 x + \sin x \leq 2$, zatímco v intervalu $(\pi, 2\pi)$ platí $y = \sin^2 x + \sin x \leq 0$. Hodnota lokálních maxim je tedy $y = 2$ a $y = 0$. V případě $y = 2$ dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \sin x - 2 &= 0 \\ (\sin x + 2)(\sin x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

V tomto případě vyhovuje pouze řešení $\sin x = 1$, tedy $x = \frac{\pi}{2}$. V případě $y = 0$ dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \sin x &= 0 \\ \sin x(\sin x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

V intervalu $(\pi, 2\pi)$ splňuje rovnici pouze hodnota $x = \frac{3}{2}\pi$.



Obrázek 4

Úloha 5

Určete extrémy funkce $y = \frac{1}{\sin^2 x + \sin x}$ v intervalu $(0, 2\pi)$.

Řešení.

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{\sin^2 x + \sin x} &= 0 \\ y \sin^2 x + y \sin x - 1 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Po substituci $t = \sin x$ dostaneme kvadratickou rovnici, ze které již určíme odpovídající hodnoty y .

$$\begin{aligned} yt^2 + yt - 1 &= 0 \\ D &= y^2 + 4y \\ y(y + 4) &\geq 0 \\ y &\in (-\infty, -4] \cup (0, +\infty) \end{aligned}$$

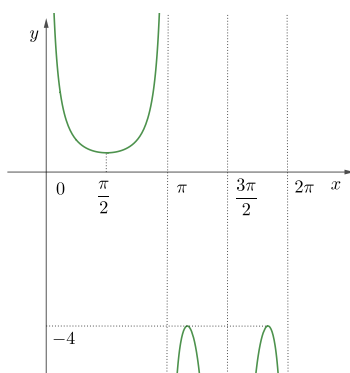
Hodnota lokálního maxima je $y = -4$. Po dosazení do rovnice (6) dostaneme

$$\begin{aligned} 4 \sin^2 x + 4 \sin x + 1 &= 0 \\ (2 \sin x + 1)^2 &= 0 \\ \sin x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

V intervalu $(0, 2\pi)$ splňují rovnici hodnoty $x = \frac{7}{6}\pi$ a $x = \frac{11}{6}\pi$. V těchto bodech má funkce lokální maxima. Pro odhad lokálního minima je nutné si uvědomit, že pro $x \in (0, \pi)$ platí $\sin^2 x + \sin x \leq 2$ a tedy také $y = \frac{1}{\sin^2 x + \sin x} \geq \frac{1}{2}$. Hodnota minima funkce je $y = \frac{1}{2}$. Po dosazení do rovnice (6) dostaneme

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \sin x - 2 &= 0 \\ (\sin x + 2)(\sin x - 1) &= 0 \\ \sin x &= 1 \end{aligned}$$

V intervalu $(0, 2\pi)$ splňuje rovnici jediná hodnota $x = \frac{\pi}{2}$. Graf funkce je na obr. 5.



Obrázek 5

Literatura – References

- [1] Bydžovský, B.: *Theorie maxim a minim.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, vol. 36 (1907), issue 2, pp. 169–196.
- [2] Dvořák, J.: *Maturitní otázky z matematiky.* V Praze nákladem České grafické unie a. s., 1928.

Adresa autora:

Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého, 17. listopadu 1192/12,

771 46 Olomouc

e-mail: dag.hruby01@upol.cz

Množinové operace ve školské matematice

Jaroslav Beránek

Abstract [Set operations in school mathematics]: This article contains special and not very typical tasks and problems of elementary set theory, suitable for extending and completing students' knowledge in this field, especially for future teachers. It is possible to use these ideas at secondary schools while working with students gifted in mathematics. In the first part of the article there are introduced problems complementing and following the principle of inclusion and exclusion, in the second part there is shown the use of set operations in problems.

Key words: Set operations, Principle of Inclusion and Exclusion.

Souhrn: Příspěvek obsahuje několik netradičních úloh a problémů z elementární teorie množin, které slouží k prohloubení a doplnění znalostí studentů z této oblasti, speciálně pro budoucí učitele matematiky. Lze je rovněž využít pro práci s nadanými studenty na matematiku na středních školách. V první části příspěvku je uveden problém doplňující a zobecňující princip inkluze a exkluze, v další části je obsaženo jeho využití v úlohách.

Klíčová slova: Množinové operace; princip inkluze a exkluze.

MESC: E15, E69

Znalost základních pojmů teorie množin je pro matematiku i její výuku nezbytná. I když systematické základy teorie množin byly vytvořeny až v průběhu 19. století (G. Cantor), představy o konečných a nekonečných množinách se na intuitivní úrovni objevily již podstatně dříve. Jazyk teorie množin brzy proniknul do všech oblastí matematiky a stal se jejich neodmyslitelnou součástí.

Z uvedeného plyne nutnost klást důraz na teorii množin při přípravě budoucích učitelů matematiky. Učitelé matematiky musí základy teorie množin bezpečně ovládat, aby znali teoretickou podstatu vyučovaných matematických pojmů. Při rozvíjení znalostí studentů v této oblasti však narážíme na nedostatek vhodných úloh a problémů. V učebnicích se objevuje až na výjimky pouze ověřování vlastností množinových operací a slovní úlohy řešené pomocí Vennových diagramů. Proto je nutné úlohy a problémy z této oblasti hledat, případně i sestavovat. Některé možnosti jsou uvedeny v tomto příspěvku.

Dalším důvodem k uvedení tohoto příspěvku je i příprava žáků k matematickým soutěžím. Soutěžní úlohy z oblasti teorie množin působí soutěžícím studentům, např. v Matematické olympiádě, mnohdy poměrně značné problémy. Uvedeme příklad. V 61. ročníku MO byla zadána v kategorii Z9 (Z9-II-4) následující úloha (viz [8]):

Úloha

Organizátor výstavy „Stavím, stavíš, stavíme“ rozdělil expozici do dvou částí. Protože ho zajímala reakce návštěvníků výstavy, vyplnil každý návštěvník při odchodu jednoduchý dotazník. Vyplynuly z něj tyto zajímavé skutečnosti:

- 96% návštěvníků, kterým se líbila první část, se líbila i druhá část,
- 60% návštěvníků, kterým se líbila druhá část, se líbila i první část,
- 59% návštěvníků se nelíbila ani první část, ani druhá část.

Kolik procent všech návštěvníků uvedlo, že se jim líbila první část výstavy?

Řešení. Označíme n počet všech lidí, kteří navštívili výstavu, dále p počet návštěvníků, kterým se líbila první část výstavy, a d počet návštěvníků, kterým se líbila druhá část výstavy. Hledáme nějaký vztah mezi n , p , ze kterého již snadno určíme odpověď na otázku.

Vyjádříme počet návštěvníků, kterým se líbily obě části: z první podmínky $0,96p$, ze druhé podmínky $0,6d$. Samozřejmě platí: $0,96p = 0,6d$, po úpravě $1,6p = d$. Odtud vyjádříme počet lidí v jednotlivých skupinách pomocí p .

Počet lidí, kterým se líbila

- první část, ale ne druhá část, je $p - 0,96p = 0,04p$,
- druhá část, ale ne první část, je $d - 0,6d = 0,4d = 0,4 \cdot 1,6p = 0,64p$,
- první i druhá část, je samozřejmě $0,96p$.

Sečtením zjistíme, kolika lidem se líbila aspoň jedna část výstavy:

$$0,04p + 0,64p + 0,96p = 1,64p.$$

Podle třetí podmínky v zadání víme, že $0,59n$ návštěvníků se nelíbila ani jedna část výstavy; tedy $0,41n$ návštěvníků se alespoň jedna část výstavy líbila. Tento počet zároveň podle předchozího odpovídá $1,64p$. Sestavíme rovnici: $0,41n = 1,64p$, po úpravě $0,25n = p$. Odtud plyne, že 25% všech návštěvníků uvedlo, že se jim líbila první část výstavy.

Je zřejmé, že spojení základních množinových představ s údaji zadanými v procentech mohlo způsobit řešitelům ze základních škol či nižších ročníků gymnázií problémy. Podobné problémy způsobily před léty úlohy z teorie množin v kategoriích B a C 23. ročníku MO (viz [7]). Tyto úlohy vyřešíme v dalším textu (jedná se o příklady 5, 6, 7). Před řešením provedeme zobecnění problému a uvedeme obecné tvrzení včetně dvou jeho důsledků (viz [6]). První okruh problémů se týká vztahů mezi

počty prvků konečných množin, jejich průniků a sjednocení. Tyto vztahy obecně řeší princip inkluze a exkluze, který však v tomto případě nelze přímo použít. Poznamenejme, že všude v následujícím tvrzení budeme uvažovat $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$; počet prvků (mohutnost) konečné množiny budeme označovat jako její kardinální číslo, tzn. $|M| = m$.

Tvrzení

(Viz [1], [6].) *Nechť jsou dána celá nezáporná čísla $m_1, m_2, \dots, m_k, s, p$. Pak platí: Existují konečné množiny $M_1, M_2, \dots, M_k$ s vlastností*

$$|M_1| = m_1, |M_2| = m_2, \dots, |M_k| = m_k, \quad \left| \bigcup_{i=1}^k M_i \right| = s, \quad \left| \bigcap_{i=1}^k M_i \right| = p, \quad (1)$$

právě když pro daná čísla platí následující nerovnosti:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : p \leq m_i \leq s \leq \sum_{i=1}^k m_i, \quad (2)$$

$$s + p(k-1) \leq \sum_{i=1}^k m_i \leq p + s(k-1). \quad (3)$$

Důkaz. Nejprve dokážeme, že platnost obou nerovností (2) a (3) je pro existenci množin s vlastnostmi (1) nutná. Nechť tedy existují množiny s vlastností (1). Nerovnost (2) je zřejmá, nerovnost (3) plyne z úvahy, že množina $\bigcup_{i=1}^k M_i$ obsahuje p prvků, z nichž každý leží ve všech množinách M_i pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ a $s - p$ prvků, z nichž každý leží alespoň v jedné a nejvýše v $k - 1$ z daných množin. Tedy platí nerovnost

$$pk + s - p \leq \sum_{i=1}^k m_i \leq pk + (s - p)(k - 1),$$

odkud po úpravě plyne nerovnost (3).

Nyní naopak dokážeme, že platnost obou nerovností (2) a (3) je pro existenci množin s vlastnostmi (1) také dostatečná.

Označme $N_k = \{1, \dots, k\}$ pro $k \geq 1$ a $N_0 = \emptyset$. Nechť $k \geq 2$ a $m_1, \dots, m_k$ jsou libovolná celá nezáporná čísla. Předpokládejme, že

$$\forall i \in N_k, p \leq m_i \leq s, pk + (s - p) \leq \sum_{i=1}^k m_i \leq pk + (s - p)(k - 1),$$

$$\text{t.j. } s + p(k-1) \leq \sum_{i=1}^k m_i \leq p + s(k-1).$$

Matematickou indukcí vzhledem k $n = s - p$ a $k \geq 2$ ukážeme, že existují množiny $M_1, \dots, M_k$ takové, že

$$\forall i \in N_k, |M_i| = m_i, \bigcup_{i=1}^k M_i = N_s, \bigcap_{i=1}^k M_i = N_p.$$

Nechť $n = 0$. Potom $\sum_{i=1}^k m_i = pk$ a podle (2), $m_1 = \dots = m_k = p = s$ a množiny $M_1 = \dots = M_k = N_s$ splňují (1).

Nechť $k = 2$. Potom $m_1 + m_2 = 2p + (s - p) = p + s$. Předpokládejme, že $m_1 \leq m_2$ (případ $m_1 \geq m_2$ je podobný). Množiny $M_2 = N_{m_2}$ a $M_1 = N_p \cup (N_s \setminus N_{m_2})$ splňují (1). Nechť $n > 0$ a $k' > 2$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna $p \leq s$ a $k' \geq 2$ takové, že $s - p < n$ a $k' < k$. Předpokládejme, že

$$p \leq m_i \leq s, pk + (s - p) \leq \sum_{i=1}^k m_i \leq pk + (s - p)(k - 1), s - p = n.$$

Uvažujme tři případy:

- (i) $\sum_{i=1}^k m_i = pk + (s - p)$, t. j. $\sum_{i=1}^k (m_i - p) = s - p$. Potom existuje rozklad množiny $N_s \setminus N_p$ na navzájem disjunktní množiny $A_1, \dots, A_k$ takové, že $|A_i| = m_i - p$. Množiny $M_i = N_p \cup A_i, i \in N_k$, splňují (1).
- (ii) $\sum_{i=1}^k m_i = pk + (s - p)(k - 1)$. Potom $\sum_{i=1}^k (s - m_i) = sk - [pk + (s - p)(k - 1)] = s - p$. Proto $N_s \setminus N_p = \bigcup_{i=1}^k A_i$ pro nějaké navzájem disjunktní množiny A_i takové, že $|A_i| = s - m_i$ pro všechna $i \in N_k$. Množiny $M_i = N_s \setminus A_i, i \in N_k$, splňují (1).
- (iii) $pk + (s - p) < \sum_{i=1}^k m_i < pk + (s - p)(k - 1) = p + s(k - 1)$.

Označme

$$E = \{i \in N_k : m_i < s\}, k' = |E|, s' = p + \sum_{i \in E} (m_i - p).$$

Uvažujme nyní čtyři případy:

- (a) Příklad $s' \leq s$. Potom $pk' + (s' - p) = \sum_{i \in E} m_i$. Podle (i) existuje systém množin $M_i \subseteq N_{s'}, i \in E$, splňující (1) pro s' a k' . Nechť $M_i = N_s$ pro $i \in N_k \setminus E$. Protože platí $s' \leq s$, množiny $M_i, i \in N_k$, splňují (1).
- (b) Příklad $s' > s$ a $k' < k$. Potom $pk' + (s - p) < \sum_{i \in E} m_i < pk' + (s - p)(k' - 1)$ (je nutno využít druhé vyjádření výrazu na pravé straně nerovnice ve (iii)). Protože $k' < k$, podle indukčního předpokladu existují množiny $M_i \subseteq N_{s'}, i \in E$, splňující (1) pro k' . Nechť $M_i = N_s$ pro $i \in N_k \setminus E$. Množiny $M_i, i \in N_k$, splňují (1).

(c) $s' > s, k' = k, \sum_{i=1}^k m_i \leq pk + (s - 1 - p)(k - 1)$. Protože $m_i \leq s - 1$ pro všechny hodnoty i , pak $pk + (s - 1 - p) < \sum_{i=1}^k m_i \leq pk + (s - 1 - p)(k - 1)$. Podle indukčního předpokladu existují množiny $M'_i \subseteq N_{s-1}, i \in N_k$, splňující (1) pro $s - 1$. Protože $s' > s$, existuje hodnota $m_0 \in N_{s-1} \setminus N_p$ a různé indexy $i_0, i_1 \in N_k$ takové, že $m_0 \in M_{s_0} \cap M_{s_1}$. Množiny $M_i = M'_i$ pro $i \in N_k \setminus \{i_0\}$ a $M_{i_0} = M'_{i_0} \cup \{s\} \setminus \{m_0\}$ splňují (1).

(d) $s' > s, k' = k, pk + (s - 1 - p)(k - 1) < \sum_{i=1}^k m_i < pk + (s - p)(k - 1)$.

Označme

$$l = [pk + (s - p)(k - 1)] - \sum_{i=1}^k m_i; \quad 0 < l < k - 1.$$

Pro $i \in N_l$ definujme $m'_i = m_i + 1$, a dále pro $i \in N_k \setminus N_l$ definujme $m'_i = m_i$. Potom $\sum_{i=1}^k m'_i = pk + (s - p)(k - 1)$ a protože $p \leq m'_i \leq s$, podle případu (ii) existují množiny $M'_i \subseteq N_s$, pro které platí $|M'_i| = m'_i, \bigcup_{i=1}^k M'_i = N_s, \bigcap_{i=1}^k M'_i = N_p$ a množiny $A_i = N_s \setminus M'_i, i \in N_k$, jsou navzájem disjunktní podmnožiny $N_s \setminus N_p$. Proto každé $m \in N_s \setminus N_p$ je prvkem právě $k - 1$ množin M'_i , přičemž $k \geq 3$ a $M'_i \setminus N_p \neq \emptyset$ pro každé $i \in N_l$. Zvolme navzájem různé prvky $n_i \in M'_i \setminus N_p$, pro $i \in N_l$. Pro $i \in N_l$ definujme $M_i = M'_i \setminus \{n_i\}$, pro $i \in N_k \setminus N_l$ definujme $M_i = M'_i$. Tyto množiny splňují (1).

Dané tvrzení je tím dokázáno. Poznamenejme, že jiná možnost důkazu konstruktivním způsobem je uvedena v práci [6]. $\square$

Poznámka 1. Pro $k = 2$ se nerovnosti (2), (3) redukují na tvar

$$p \leq m_i \leq s \leq m_1 + m_2, \quad s + p \leq m_1 + m_2 \leq p + s,$$

odkud plyne $m_1 + m_2 = p + s$, což je ve shodě s principem inkluze a exkluze.

Poznámka 2. Právě dokázané tvrzení má dva zajímavé důsledky, které lze s výhodou využít zejména při tvorbě a sestavování slovních úloh. Uvedeme dva motivační problémy:

Problém 1

Jsou dána celá nezáporná čísla $m_1, \dots, m_k, s$ (s výše zavedeným významem). Jaké jsou možnosti pro volbu čísla p tak, aby všechna čísla splňovala (2) a (3) a tedy aby existovaly příslušné konečné množiny s vlastností (1)?

Problém 2

Druhý problém je analogický: jde o hledání možností pro volbu čísla s , jsou-li známy počty prvků všech uvažovaných konečných množin M_i a číslo p .

Před uvedením těchto důsledků připomeňme, že symbolem $[x]$ pro $x \in \mathbb{R}$ budeme označovat celou část čísla x , tzn. největší celé číslo nepřevyšující x . Bez újmy na obecnosti budeme nadále pro počty prvků konečných množin $M_i, i \in \{1, \dots, k\}$, předpokládat nerovnosti $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k$.

Důsledek 1 (Viz [1], [6].)

Nechť $k \geq 2, s \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k \geq 0$ jsou celá čísla taková, že $s \leq m_1 + \dots + m_k$. Jestliže platí $m_1 + \dots + m_k \leq s(k-1)$, položíme $P_1 = 0$, jinak $P_1 = m_1 + \dots + m_k - s(k-1)$. Platí-li $s + m_k(k-1) \leq m_1 + \dots + m_k$, položíme $P_2 = m_k$, jinak $P_2 = \left\lceil \frac{m_1 + \dots + m_k - s}{k-1} \right\rceil$. Pak je zřejmě $P_1 \leq P_2$. Pak množiny $M_1, M_2, \dots, M_k$ s vlastnostmi (1) existují, právě když platí nerovnost

$$P_1 \leq p \leq P_2.$$

Důkaz. Vzhledem k tomu, že podle předchozího tvrzení je platnost podmínek (2), (3) ekvivalentní s existencí množin splňujících (1), stačí dokázat, že nerovnosti $P_1 \leq p \leq P_2$ jsou ekvivalentní s existencí čísel s vlastnostmi (2), (3). Tvrzení $P_1 \leq P_2$ je zřejmé, případně se dokáže rozepsáním (platí $p \geq 0, p \leq m_k$), např. ve specifickém případě má tvar $m_1 + \dots + m_k - s(k-1) \leq \frac{m_1 + \dots + m_k - s}{k-1}$, což po úpravě dává nerovnost $(k-2)(m_1 + \dots + m_k) \leq (k^2 - 2k)s$, a ta platí vzhledem k předpokladu důsledku 1 ve tvaru $m_1 + \dots + m_k \leq ks$.

Předpokládejme nejprve, že pro celá nezáporná čísla $m_1, m_2, \dots, m_k, s, p$ platí nerovnosti (2), (3) a předpoklady důsledku 1. Pak z nerovnosti (3) ihned plyne nerovnost $P_1 \leq p \leq P_2$. Naopak, nechť jsou dána celá nezáporná čísla $m_1, m_2, \dots, m_k, s$, splňující předpoklady důsledku 1 a nechť pro přirozené číslo p platí nerovnosti $P_1 \leq p \leq P_2$ podle výše uvedeného označení. Dokážeme, že pro čísla $m_1, m_2, \dots, m_k, s, p$ platí nerovnosti (2), (3).

Nerovnosti (3) se ověří rozбором případů:

- Jestliže $\sum_{i=1}^k m_i \leq s(k-1)$, pak $P_1 = 0 \leq p$, a tedy $\sum_{i=1}^k m_i \leq p + s(k-1)$.
- Jestliže $\sum_{i=1}^k m_i > s(k-1)$, pak $P_1 = \sum_{i=1}^k m_i - s(k-1) \leq p$, a tedy $\sum_{i=1}^k m_i \leq p + s(k-1)$.
- Jestliže $s + m_k(k-1) \leq \sum_{i=1}^k m_i$, potom $p \leq P_2 = m_k$, a tedy $s + p(k-1) \leq \sum_{i=1}^k m_i$.
- Pokud $s + m_k(k-1) > \sum_{i=1}^k m_i$, pak $p \leq P_2 = \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^k m_i - s}{k-1} \right\rceil$, a tedy $s + p(k-1) \leq \sum_{i=1}^k m_i$.

Ověřme nyní (2). Nerovnost $s \leq \sum_{i=1}^k m_i$ vyplývá ze (3), nerovnosti $m_i \leq s$ jsou v předpokladech důsledku 1 a jestliže $p \leq P_2$, zbývá ukázat, že $P_2 \leq m_k$. To platí proto, že pokud $s + m_k(k-1) > \sum_{i=1}^k m_i$, pak $m_k \geq \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^k m_i - s}{k-1} \right\rceil = P_2$. $\square$

Příklad 1 (Viz [1].)

Nechť $m_1 = 19, m_2 = 14, m_3 = 11, m_4 = 8, s = 41$, t. j. $k = 4$. Podle důsledku 1 platí $P_1 = 0, P_2 = \left[\frac{11}{3}\right] = 3$, tedy pro zajištění existence množin s vlastností (1) lze volit $0 \leq p \leq 3$.

Příklad 2 (Viz [1].)

Nechť $m_1 = 37, m_2 = 28, s = 40$, t. j. $k = 2$. Podle důsledku 1 platí $P_1 = 25, P_2 = \left[\frac{25}{1}\right] = 25$, tedy je vynuceno $p = 25$, což odpovídá principu inkluze a exkluze.

Důsledek 2 (Viz [1], [6].)

Nechť platí nerovnosti $k \geq 2, m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k \geq p \geq 0$ jsou celá čísla. Jestliže platí $p \geq m_1 + \dots + m_k - (k-1)m_1$, položíme $S_1 = m_1$, jinak položíme $S_1 = \left[\frac{m_1 + \dots + m_k - p}{k-1}\right]$. Dále položíme $S_2 = m_1 + \dots + m_k - (k-1)p$. Pak je $S_1 \leq S_2$. Pak množiny $M_1, M_2, \dots, M_k$ s vlastnostmi (1) existují, právě když platí nerovnost

$$S_1 \leq s \leq S_2$$

.

Důkaz. Neuvádíme, provádí se obdobně jako důkaz důsledku 1. □

Příklad 3 (Viz [1].)

Nechť $m_1 = 19, m_2 = 14, m_3 = 11, m_4 = 8, p = 3$, t. j. $k = 4$. Podle důsledku 2 platí $S_1 = 19, S_2 = 43$, tedy k zajištění existence množin s vlastností (1) lze volit $19 \leq s \leq 43$.

Příklad 4 (Viz [1].)

Nechť $m_1 = 37, m_2 = 28, p = 25$, t. j. $k = 2$. Podle důsledku 2 platí $S_1 = \left[\frac{40}{1}\right] = 40, S_2 = 40$, tedy je opět ve shodě s principem inkluze a exkluze k zajištění existence množin s vlastností (1) vynuceno $s = 40$.

Jako aplikace úvodního dokázaného tvrzení nyní uvedeme tři úlohy z 23. ročníku matematické olympiády (viz [7]).

Příklad 5 (Viz [1].)

Tři konečné množiny M_1, M_2, M_3 mají po řadě m_1, m_2, m_3 prvků; množina $\bigcup_{i=1}^3 M_i$ má s prvků. Dokažte:

- Je-li $m_1 + m_2 + m_3 \geq 2s + 1$, pak průnik všech tří množin má alespoň jeden prvek.
- Má-li průnik všech tří množin alespoň jeden prvek, pak $m_1 + m_2 + m_3 \geq s + 2$. Dále dokažte, že podmínka b) není dostatečná pro to, aby průnik všech tří množin byl neprázdný.

Řešení. Podle (3) platí $s + 2p \leq m_1 + m_2 + m_3 \leq p + 2s$, kde $p = |M_1 \cap M_2 \cap M_3|$.

a) Je-li $m_1 + m_2 + m_3 \geq 2s + 1$, je $2s + p \geq m_1 + m_2 + m_3 \geq 2s + 1$, tedy platí $p \geq 1$.

b) Je-li $p \geq 1$, pak $m_1 + m_2 + m_3 \geq 2p + s \geq s + 2$.

K dokončení řešení této úlohy stačí nalézt čtyři přirozená čísla m_1, m_2, m_3, s pro která platí nerovnosti $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq s, s + 2 \leq m_1 + m_2 + m_3 \leq 2s$. První nerovnost je podmínka b) ze zadání úlohy, druhá nerovnost plyne ze (3) pro $p = 0$. Takovými čísly jsou, např. čísla $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 4, s = 4$. Podle důsledku 1 platí pro číslo p nerovnosti $0 \leq p \leq 1$, společným průnikem všech tří množin může být tedy i prázdná množina.

Příklad 6

Ze 100 osob koupilo 80 lidí textilní zboží, 70 lidí knihy a 55 lidí elektroniku. Kolik nejméně osob koupilo výrobky všech tří druhů? Jestliže každá z uvedených 100 osob si koupila alespoň jeden z uvedených výrobků, kolik nejvýše osob koupilo výrobky všech tří druhů?

Řešení. Označme $m_1 = 80, m_2 = 70, m_3 = 55, s \leq 100$, hledáme hodnotu p . Ze (3) plyne nerovnost $80 + 70 + 55 \leq p + 2s$, tedy $205 \leq p + 2s$, t. j. $p \geq 205 - 2s$, odkud s ohledem na vztah $s \leq 100$ plyne nerovnost $p \geq 5$. Protože čísla $m_1 = 80, m_2 = 70, m_3 = 55, s = 100, p = 5$ splňují (2) a (3), je hledané minimum 5. Je-li nyní $s = 100$, pak lze využít důsledku 1. Podle něj platí vztah $P_1 = 5, P_2 = \lfloor \frac{105}{2} \rfloor = 52$. Číslo $p = 52$ společně s ostatními zadanými hodnotami splňuje (2) a (3), tedy hledané maximum je 52. Výrobky všech tří druhů tedy koupilo nejméně 5 a nejvýše 52 osob.

Příklad 7

Množiny $M_1, M_2, M_3, M_4, \bigcup_{i=1}^4 M_i$, mají po řadě m_1, m_2, m_3, m_4, s prvků; přitom platí $M_1 \cap M_3 = M_2 \cap M_4 = \emptyset$. Dokažte, že platí $2s \geq \sum_{i=1}^4 m_i$. Může nastat rovnost a ve kterém případě?

Řešení. Označme $A = M_1 \cup M_3, B = M_2 \cup M_4$. Vzhledem k předpokladu platí $|A| = m_1 + m_3, |B| = m_2 + m_4$. Dále je $\bigcup_{i=1}^4 M_i = A \cup B$, tedy $|A \cup B| = s$. Podle (2) je $m_1 + m_3 \leq s, m_2 + m_4 \leq s$, tedy $\sum_{i=1}^4 m_i \leq 2s$. Rovnost nastane v případě, kdy $m_1 + m_3 = s, m_2 + m_4 = s$, tedy platí $A = B = A \cup B$, odkud plyne rovnost $M_1 \cup M_3 = M_2 \cup M_4 = \bigcup_{i=1}^4 M_i$.

Následující zajímavá úloha se týká využití množinových operací v elementární geometrii.

Příklad 8

Jsou dány tři konečné množiny M_1, M_2, M_3 , pro něž platí $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_3 = M_1 \cap M_3 \neq \emptyset$. Označme po řadě $p, s_{12}, s_{23}, s_{13}$ počty prvků množin $M_1 \cap M_2 \cap M_3, M_1 \cup M_2, M_2 \cup M_3, M_1 \cup M_3$. Je-li každé z čísel s_{12}, s_{23}, s_{13} větší než p , dokažte existenci trojúhelníku, jehož strany mají délky $1 - \frac{p}{s_{12}}, 1 - \frac{p}{s_{23}}, 1 - \frac{p}{s_{13}}$.

Řešení. Označme $x = 1 - \frac{p}{s_{12}}, y = 1 - \frac{p}{s_{23}}, z = 1 - \frac{p}{s_{13}}$. Dokážeme platnost trojúhelníkové nerovnosti $x + y > z$, ostatní se dokáží analogicky. Z předpokladu $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_3 = M_1 \cap M_3$ zjistíme, že každá z množin M_1, M_2, M_3 je složena z prvků dvou druhů: Jednak prvků, které patří právě do jedné z těchto množin a jednak prvků, náležících současně do všech tří množin. Zavedeme-li tedy stejně jako v příkladu 5 označení p, m_1, m_2, m_3 , pak $m_1 = n_1 + p, m_2 = n_2 + p, m_3 = n_3 + p$, kde n_i pro $i = 1, 2, 3$ označuje počty prvků patřící právě (výlučně) do množiny M_i . Nyní platí $s_{12} = n_1 + n_2 + p, s_{23} = n_2 + n_3 + p, s_{13} = n_1 + n_3 + p$. Pro zjednodušení zavedeme ještě označení $a = n_1 + n_2, b = n_2 + n_3, c = n_1 + n_3$ (podle předpokladu $a, b, c \in N$). Nyní lze psát po úpravě $x = \frac{a}{a+p}, y = \frac{b}{b+p}, z = \frac{c}{c+p}$. Nerovnost $x + y > z$ dokážeme sporem. Necht' tedy $x + y \leq z$. Po dosazení a úpravě dostaneme nerovnost $p^2(a+b-c) + 2pab + abc \leq 0$, ale $a+b-c = 2n_2 \geq 0, 2pab \geq 0, abc \geq 0$, což je spor. Musí tedy platit $x + y > z$.

Poznámka. V souvislosti s touto úlohou se naskytá řada zajímavých problémů, např. určení vlastností daného trojúhelníka. Velmi jednoduchá odpověď je na otázku, kdy bude tento trojúhelník rovnostranný. To nastane v případě $s_{12} = s_{23} = s_{13}$. Snadno rovněž nalezneme možné počty prvků množin M_1, M_2, M_3 splňující tuto rovnost, např. $m_1 = m_2 = m_3 = 10, p = 5$, odtud $n_1 = n_2 = n_3 = 5$ (podle výše uvedeného označení). Potom $s_{12} = s_{23} = s_{13} = 15$ a délka strany rovnostranného trojúhelníka je $\frac{2}{3}$.

Posledním příkladem tohoto příspěvku je úloha z 8. ročníku mezinárodní matematické olympiády v roce 1966 (viz [4]).

Příklad 9

V matematické soutěži byly zadány tři úlohy A, B, C . Mezi účastníky bylo 25 žáků, z nichž každý vyřešil alespoň jednu úlohu. Ze všech účastníků, kteří nevyřešili úlohu A , byl počet těch, kteří vyřešili úlohu B , dvojnásobkem počtu těch, kteří vyřešili úlohu C . Počet žáků, kteří vyřešili jen úlohu A , byl o 1 větší než počet ostatních žáků, kteří vyřešili úlohu A . Ze všech žáků, kteří vyřešili jedinou úlohu, právě polovina nevyřešila úlohu A . Kolik žáků vyřešilo jen úlohu B ?

Řešení. Jelikož se jedná o tři zadané úlohy, existuje celkem sedm možností pro výsledky řešení úloh pro každého z uvažovaných 25 soutěžících (Vennův diagram pro tři

množiny sice obsahuje osm elementárních polí, ale podle zadání z těchto 25 soutěžících každý vyřešil alespoň jednu úlohu). Jednotlivé počty pro všech sedm možností nyní označíme písmenem p opatřeným indexem udávajícím úlohy, které daný soutěžící vyřešil, t. j. $p_A, p_B, p_C, p_{AB}, p_{AC}, p_{BC}, p_{ABC}$. Číslo p_A je tedy počet soutěžících, kteří vyřešili právě jen úlohu A , p_{AB} je počet soutěžících, kteří vyřešili právě dvě úlohy A, B apod. Podle zadaných podmínek sestavíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} p_A + p_B + p_C + p_{AB} + p_{AC} + p_{BC} + p_{ABC} &= 25, \\ p_B + p_{BC} &= 2(p_C + p_{BC}), \\ p_A &= 1 + p_{AB} + p_{AC} + p_{ABC}, \\ p_A + p_B + p_C &= 2(p_B + p_C), \end{aligned}$$

po úpravě dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} p_A + p_B + p_C + p_{AB} + p_{AC} + p_{BC} + p_{ABC} &= 25, \\ p_B - 2p_C - p_{BC} &= 0, \\ p_A - p_{AB} - p_{AC} - p_{ABC} &= 1, \\ p_A - p_B - p_C &= 0. \end{aligned}$$

Sečtením prvních tří rovnic dostaneme

$$2p_A + 2p_B - p_C = 26.$$

Dosadíme-li nyní za p_A ze čtvrté rovnice, obdržíme

$$4p_B + p_C = 26.$$

Této rovnici vyhovuje právě sedm dvojic (p_B, p_C) nezáporných celých čísel. Pro každou z těchto dvojic je nutno prověřit, zda platí nerovnost $p_B - 2p_C \geq 0$ (vyplývá ze druhé z rovnic). Dvojice jsou následující: $(0, 26)$, $(1, 22)$, $(2, 18)$, $(3, 14)$, $(4, 10)$, $(5, 6)$, $(6, 2)$, uvedená nerovnost vyhovuje pouze poslední z nich. Platí tedy $p_B = 6$, $p_C = 2$. Právě jen úlohu B tedy vyřešilo 6 žáků. Zbývá ještě ověřit, zda tato situace skutečně může nastat. Ze soustavy rovnic dopočítáme $p_A = 8$, $p_{BC} = 2$. Pro ostatní počty prvků již není výsledek jednoznačný, platí pouze $p_{AB} + p_{AC} + p_{ABC} = 7$. Popsaná situace tedy skutečně může nastat. Přesvědčit se můžeme i tím, že do rovnice $p_{AB} + p_{AC} + p_{ABC} = 7$ dosadíme trojici přirozených čísel vyhovujících této rovnici a ověříme vlastnosti (2) a (3) z úvodního tvrzení tohoto příspěvku.

Úloh podobného typu lze samozřejmě nalézt více. Vyhledáváním a zadáváním podobných úloh lze úspěšně pracovat se studenty talentovanými na matematiku a podchycovat jejich zájem o studium matematiky jak na středních školách, tak na školách vysokých.

Literatura – References

- [1] Beránek, J.: *Teorie množin v úlohách.*, In: Matematika v přípravě učitelův 1. stupně základní školy. Univerzita Mateje Bela, Banská Bystrica 2001.
- [2] Fuchs, E.: *Diskrétní matematika a teorie množin pro učitele.* Masarykova univerzita, 2000. 890 s. Matematika na CD-ROM, sv. 2.
- [3] Hejný, M.: *Teória vyučovania matematiky.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava 1990.
- [4] Horák, K., Müller, V., Vrba, A.: *Úlohy mezinárodních matematických olympiád.* SPN, Praha 1986.
- [5] Kopecký, M.: *Základy teorie množin.* Univerzita Palackého, 2004.
- [6] Vrba, A.: *O sjednocení a průniku konečných množin.* Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 52 (1973-74), č. 1, s. 3-6.
- [7] Vyšín, J., a. kol.: *23. ročník matematické olympiády.* Škola mladých matematiků, SPN, Praha 1975.
- [8] *Matematická olympiáda*, 61. ročník, 2011/2012, úloha Z9-II-4. Dostupné z <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492008/z61ii-9.pdf>.

Adresa autora:

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity, Poříčí 7,
603 00 Brno, Česká republika
e-mail: beranek@ped.muni.cz

Jeden způsob generování pythagorejských trojic

Jaroslav Zhouf

Abstract [One way to generate pythagorean triplets]: The article presents one method that is used to create pythagorean triplets, i.e. triplets of a , b , c that solve the equation $a^2 + b^2 = c^2$ in the field of natural numbers.

Key words: Pythagorean Triplets, Method of Finding Pythagorean Triplets.

Souhrn: Článek představuje jednu metodu, která se používá k tvorbě pythagorejských trojic, t. j. trojic a , b , c , které řeší rovnici $a^2 + b^2 = c^2$ v oboru přirozených čísel.

Klíčová slova: Pythagorejské trojice, metoda hledání pythagorejských trojic.

MESC: F30, F40

1 Úvod

Termín *pythagorejské trojice* je odvozen od Pythagorovy věty, která říká, že v pravoúhlém trojúhelníku je součet druhých mocnin délek odvěsen roven druhé mocnině délky přepony. Už v minulosti tato rovnost matematiky zaujala a nejvíce je zaujalo hledání celočíselných délek stran pravoúhlého trojúhelníku.

Postupně celočíselné pythagorejské trojice získávaly praktický význam. Oblast, kde se hlavně začaly využívat, je moderní modelování, které je základem informatiky, kybernetiky, konstrukčních metod, kryptografie, generování náhodných čísel atd. Pro tyto účely bylo třeba najít algoritmy, jak lze pythagorejské trojice hledat (generovat).

Eukleides (325 - 265 př.n.l.) si všiml takové vlatnosti pythagorejských trojic, která je znázorněna v tab. 1. Jde o to, že rozdíl druhých mocnin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel je roven lichému číslu a v tabulce lze najít všechna tato čísla kromě čísla 1. My zde tento poznatek použijeme a ukážeme jednu metodu generování pythagorejských trojic.

Článek využívá některých závěrů, které jsou uvedeny v [1], [2], [3], [4].

2 Pythagorejské trojice

Nejprve uveďme několik základních pojmů, které budeme používat v tomto článku.

Termín *pythagorejská trojice* znamená trojici přirozených čísel a, b, c , pro kterou platí rovnost $a^2 + b^2 = c^2$. Budeme značit čísla a, b, c tak, aby platilo $a < b < c$.

Jak již bylo zmíněno, známá pythagorejská trojice je 3, 4, 5, protože platí $3^2 + 4^2 = 5^2$. Pythagorejskými trojicemi jsou také všechny celočíselné násobky uvedené trojice, tedy trojice 6, 8, 10, nebo 9, 12, 15 atd.

Trojice a, b, c , kde jsou tato čísla vzájemně nesoudělná, se nazývá *primitivní pythagorejská trojice*. Takže z uvedených trojic je primitivní trojice 3, 4, 5. Celočíselné násobky primitivních trojic nazveme *neprimitivní pythagorejské trojice*. Zde to jsou např. trojice 6, 8, 10 a 9, 12, 15.

V primitivní pythagorejské trojici nemohou být všechna tři čísla sudá, neboť by byla vzájemně soudělná. Nemohou být ani všechna tři lichá, protože pak by neseseděla parita v rovnosti $a^2 + b^2 = c^2$. A nemohou být ani dvě sudá a jedno liché, protože by opět neseseděla parita. Jediná možnost tedy je, že dvě čísla budou lichá a jedno sudé. Sudé musí být jedno z čísel a, b . Kdyby totiž byla čísla a, b lichá a číslo c sudé, mohli bychom označit $a = 2k - 1$, $b = 2l - 1$, $c = 2j$, $k, l, j \in \mathbb{N}$, a pak by platilo

$$(2k - 1)^2 + (2l - 1)^2 = (2j)^2,$$

$$4(k^2 + l^2 - k - l) + 2 = 4j^2,$$

kde ale nesouhlasí dělitelnost čtyřmi obou stran.

3 Tabulka s pythagorejskými trojicemi

Podívejme se na tabulku 1. Z ní můžeme vyčíst několik pythagorejských trojic.

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
8	12	16	20	24	28	32	36	40	
15	21	27	33	39	45	51	57	63	
24	32	40	48	56	64	72	80		
11^2	12^2	13^2	14^2	15^2	16^2	17^2			
21	23	25	27	29	31	33	35		
44	48	52	56	60	64	68			
63	69	75	81	87	93	99	105		
88	96	104	112	120	128	136			

Tabulka 1. Tabulka s pythagorejskými trojicemi

V prvním řádku je posloupnost druhých mocnin po sobě jdoucích přirozených čísel.

Ve druhém řádku je vždy uprostřed mezi sousední dvojicí z prvního řádku napsán rozdíl těchto druhých mocnin. Je to tedy posloupnost po sobě jdoucích lichých čísel počínaje číslem 3. A je-li některé toto liché číslo druhou mocninou přirozeného čísla, je v tabulce vidět pythagorejskou trojici a, b, c , pro kterou platí $c^2 - b^2 = a^2$. Číslo c je o jedna větší než číslo b . V tab. 1 jsou takto vidět trojice 3, 4, 5 a 5, 12, 13. Obě jsou primitivní. Takovéto trojice lze v tomto schématu zakreslit jako vrcholy trojúhelníků.

Ve třetím řádku tabulky jsou součty dvou sousedních čísel z druhého řádku. Tím vznikne posloupnost násobků čísla 4 počínaje číslem 8. Nebo to lze chápat jako dvojnásobky sudých čísel počínaje číslem $2 \cdot 4 = 8$. A je-li některé číslo v této posloupnosti druhou mocninou přirozeného čísla, je v tabulce vidět pythagorejskou trojici a, b, c , pro kterou platí $c^2 - b^2 = a^2$. Číslo c je zde o dvě větší než číslo b . V tab. 1 je první takovou trojicí 4, 3, 5. Pro ni platí

$$5^2 - 3^2 = (5^2 - 4^2) + (4^2 - 3^2) = 9 + 7 = 16 = 4^2,$$

což dokumentuje, jak je třetí řádek tabulky vytvořen. Příslušnou pythagorejskou trojici lze opět zakreslit do trojúhelníku, což je zde trojice 8, 15, 17. V tab. 1 je vidět ještě jedna taková trojice, a to 6, 8, 10. Dvě z uvedených trojic jsou primitivní a jedna není primitivní.

Třetí řádek je také možno chápat jako čtyřnásobek základů druhých mocnin z prvního řádku, které se v tab. 1 nacházejí nad tímto číslem ze třetího řádku. Je-li totiž $b = k - 1$, $c = k + 1$, jsou ve druhém řádku mezi těmito čísly čísla $2k - 1$, $2k + 1$. Ve třetím řádku je pak mezi čísly $2k - 1$, $2k + 1$ číslo $(2k - 1) + (2k + 1) = 4k$, tedy čtyřnásobek čísla k , což je základ mocniny mezi mocninami se základy $k - 1$, $k + 1$ z prvního řádku.

Ve čtvrtém řádku tabulky jsou čísla, která jsou součtem vždy tří čísel ze druhého řádku, která se nacházejí nad číslem ze čtvrtého řádku. Např. platí $3 + 5 + 7 = 15$, nebo $5 + 7 + 9 = 21$. Ve čtvrtém řádku se tak nacházejí trojnásobky všech lichých čísel, tedy trojnásobky čísel ze druhého řádku, počínaje číslem $3 \cdot 5 = 15$. Je-li některé číslo v této posloupnosti druhou mocninou přirozeného čísla, je v tabulce vidět pythagorejskou trojici a, b, c , kde číslo c je o tři větší než číslo b . Takovou trojici lze opět zakreslit do trojúhelníku, což je zde trojice 9, 12, 15. Tvzení o tvorbě čtvrtého řádku si ukážeme např. na této konkrétní trojici:

$$15^2 - 12^2 = (15^2 - 14^2) + (14^2 - 13^2) + (13^2 - 12^2) = 29 + 27 + 25 = 81 = 9^2.$$

V pátém řádku jsou součty čtyř příslušných lichých čísel ze druhého řádku. Dokážeme to podobně jako v předchozích odstavcích. Každé číslo v tomto řádku je čtyřnásobkem všech sudých čísel počínaje číslem $4 \cdot 6 = 24$. Např. je $3 + 5 + 7 + 9 = 24$.

Podobně lze takovou trojici zakreslit do trojúhelníku, což zde dokumentuje trojice 8, 6, 10. Číslo c je o čtyři větší než číslo b .

Analogické úvahy by pokračovaly na šestém řádku, na sedmém řádku atd.

Kdyby tabulka měla nekonečný počet řádků, mohli bychom z ní vyčíst všechny pythagorejské trojice. Takže jako bonus tato tabulka ukazuje, že pythagorejských trojic je nekonečně mnoho.

4 První speciální skupina pythagorejských trojic

Jako první skupina pythagorejských trojic, které jsme prezentovali v tab. 1, je skupina trojic, kde dva největší členy se liší o jedničku. Právě to zaručuje, že tyto dva členy jsou nesoudělné, takže se jedná o trojice primitivní. A jelikož jsou tyto trojice primitivní, musí být největší číslo c liché a druhé největší číslo b sudé. A také třetí číslo a je liché.

Pojďme hledat předpis, pomocí něhož budeme moci vyčíslovat (generovat) tyto trojice. Označme si $a = 2k - 1$, $b = 2l$, $c = 2l + 1$, $k, l \in \mathbf{N}$. Postupně platí

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2, \\ (2k - 1)^2 + (2l)^2 &= (2l + 1)^2, \\ l &= k^2 - k. \end{aligned}$$

Jelikož má být $l \in \mathbf{N}$, musí být $k > 1$.

Dostali jsme tedy předpis, pomocí něhož můžeme generovat všechny pythagorejské trojice, kde největší a druhý největší člen se liší o jedničku:

$$a = 2k - 1, \quad b = 2k^2 - 2k, \quad c = 2k^2 - 2k + 1, \quad k \in \mathbf{N} - \{1\}.$$

Dosadíme-li $k = 2$ do tohoto předpisu, dostaneme pythagorejskou trojici 3, 4, 5. Dosadíme-li $k = 3$, dostaneme trojici 5, 12, 13. Atd.

Podívejme se na to, jak tento zde uvedený předpis koresponduje s tab. 1. V této tabulce by měla být ve druhém řádku zapsána čísla $a = 2k - 1$, $k \in \mathbf{N} - \{1\}$, což jsou čísla lichá. A skutečně tomu tak je.

5 Druhá speciální skupina pythagorejských trojic

Druhá skupina pythagorejských trojic, kterou jsme zmínili výše, je skupina, kde dva největší členy se liší o dvě. Zde mohou nastat dva případy.

V prvním případě jsou obě největší čísla sudá. Pak je i třetí číslo v trojici sudé. Označme proto $a = 2g$, $b = 2h$, $c = 2h + 2$, $g, h \in \mathbf{N}$, $g < h$. Postupně platí

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2, \\ (2g)^2 + (2h)^2 &= (2h + 2)^2, \\ g^2 + h^2 &= (h + 1)^2. \end{aligned}$$

Případ je převeden na případ z předchozí kapitoly, kde se dvě největší čísla liší o jedničku. Takže v tomto prvním případě lze pythagorejské trojice nagenarovat podle tohoto předpisu:

$$a = 2(2k - 1), \quad b = 2(2k^2 - 2k), \quad c = 2(2k^2 - 2k + 1), \quad k \in \mathbf{N} - \{1\}.$$

Zde jsou všechny takto vytvořené pythagorejské trojice neprimitivní. Nejmenší z nich je trojice 6, 8, 10, další trojice je 10, 24, 26 atd.

Ve druhém případě jsou obě největší čísla lichá, takže třetí číslo v trojici je sudé. Označme proto $a = 2g$, $b = 2h - 1$, $c = 2h + 1$, $g, h \in \mathbf{N}$. Má-li být $a < b$, musí být i zde $g < h$. Pak postupně platí

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2, \\ (2g)^2 + (2h - 1)^2 &= (2h + 1)^2, \\ g^2 + h^2 - h &= h^2 + h, \\ g^2 &= 2h. \end{aligned}$$

Vidíme, že číslo g je sudé, označme proto $g = 2k$. Tím dostaneme rovnost $h = 2k^2$. Jelikož je $g^2 = 2h$, musí být $g > 1$. Pak také díky nerovnosti $g < h$ je $h > 2$, a tudíž i $k > 1$. Takže pythagorejské trojice ve druhém případě lze nagenarovat podle tohoto předpisu:

$$a = 4k, \quad b = 4k^2 - 1, \quad c = 4k^2 + 1, \quad k \in \mathbf{N} - \{1\}.$$

Zde jsou všechny takto vytvořené pythagorejské trojice primitivní, protože dvě největší čísla jsou lichá vzdálená o dvě, takže nemají společného dělitele většího než jedna. Nejmenší z nich je trojice 8, 15, 17, která je v tab. 1 znázorněna trojúhelníkem, druhá je 12, 35, 37 atd.

6 Třetí speciální skupina pythagorejských trojic

Třetí skupina pythagorejských trojic, kterou jsme zmínili výše, je skupina, kde dva největší členy se liší o tři. Zde mohou nastat dva případy.

V prvním případě je největší číslo sudé a druhé největší číslo liché. Pak je třetí číslo liché. Označme tedy $a = 2g - 1$, $b = 2h - 1$, $c = 2h + 2$, $g, h \in \mathbf{N}$, $g < h$. Postupně platí

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2, \\ (2g - 1)^2 + (2h - 1)^2 &= (2h + 2)^2, \\ 4(g^2 - g + h^2 - h) + 2 &= 4(h + 1)^2. \end{aligned}$$

Vidíme, že levá strana dává při dělení čtyřmi zbytek 2, kdežto pravá strana je dělitelná čtyřmi. Proto takovéto pythagorejské trojice neexistují.

Ve druhém případě je největší číslo liché a druhé největší číslo sudé. Pak je třetí číslo liché. Označme proto $a = 2g - 1$, $b = 2h$, $c = 2h + 3$, $g, h \in \mathbf{N}$. Postupně platí

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2, \\ (2g - 1)^2 + (2h)^2 &= (2h + 3)^2, \\ g^2 - g + h^2 &= h^2 + 3h + 2, \\ g^2 - g - 2 &= 3h, \\ g(g - 1) - 2 &= 3h. \end{aligned}$$

Pravá strana rovnosti je dělitelná třemi, proto zkusíme, pro kterou z možností $g = 3k$, $g = 3k - 1$, $g = 3k - 2$, $k \in \mathbf{N}$, může rovnost platit. Vychází, že může být jedině $g = 3k - 1$. Tím dostaneme rovnost $h = 3k^2 - 3k$. Jelikož je $g(g - 1) - 2 = 3h$, kde na levé straně je sudé číslo, musí být $h > 1$. Pak je $b \geq 4$, a tudíž i $k > 1$. Takže pythagorejské trojice lze nagenarovat podle tohoto předpisu:

$$a = 6k - 3, \quad b = 6k^2 - 6k, \quad c = 6k^2 - 6k + 3, \quad k \in \mathbf{N} - \{1\}.$$

Jasně je vidět, že trojice, kde největší dvě čísla se vzájemně liší o tři, jsou jedině nepřimtivní. První taková trojice je 9, 12, 15, která je v tab. 1 znázorněna trojúhelníkem, druhá je 15, 36, 39 atd.

7 Čtvrtá speciální skupina pythagorejských trojic

Čtvrtá skupina pythagorejských trojic, kterou jsme zmínili výše, je skupina, kde dva největší členy se liší o čtyři. Zde mohou nastat dva případy.

V prvním případě jsou obě největší čísla lichá, takže třetí číslo a v trojici je sudé. Označme proto $a = 2g$, $b = 2h - 1$, $c = 2h + 3$, $g, h \in \mathbf{N}$. Postupně platí

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2, \\ (2g)^2 + (2h - 1)^2 &= (2h + 3)^2, \\ g^2 + h^2 - h &= h^2 + 3h + 2, \\ g^2 &= 4h + 2. \end{aligned}$$

Vidíme, že číslo g je sudé. Takže levá strana je dělitelná čtyřmi, kdežto pravá strana při dělení čtyřmi dává zbytek 2. Proto žádná pythagorejská trojice tohoto typu neexistuje.

Ve druhém případě jsou obě největší čísla sudá. Pak je i třetí číslo v trojici sudé. Označme proto $a = 2g$, $b = 2h$, $c = 2h + 4$, $g, h \in \mathbf{N}$, $g < h$. Postupně platí

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2, \\ (2g)^2 + (2h)^2 &= (2h + 4)^2, \\ g^2 + h^2 &= (h + 2)^2, \\ g^2 &= 4h + 4. \end{aligned}$$

Vidíme, že číslo g je sudé, takže označme $g = 2k$. Po dosazení do poslední rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} 4k^2 &= 4h + 4, \\ k^2 - 1 &= h. \end{aligned}$$

Jelikož je $g < h$ a jelikož je $g^2 = 4h + 4$, je $g > 3$, a tudíž je $h > 4$, a tudíž z rovnosti $k^2 - 1 = h$ je $k > 2$. Takže v tomto druhém případě lze pythagorejské trojice nagenarovat podle tohoto předpisu:

$$a = 4k, \quad b = 2k^2 - 2, \quad c = 2k^2 + 2, \quad k \in \mathbf{N} - \{1, 2\}.$$

Odsud je zřejmé, že všechny takto vytvořené pythagorejské trojice jsou neprimitivní. Nejmenší z nich je trojice 12, 16, 20. Protože trojice 12, 16, 20 je již mimo tab. 1, je místo ní v tabulce znázorněna trojice 8, 6, 10, kterou bychom dostali, kdybychom mohli do předpisu dosadit $k = 2$.

Zde získanou skupinu pythagorejských trojic rozdělíme ještě na dvě podskupiny.

První podskupina je taková, že proměnná k , pomocí níž se vyčíslují trojice, je sudé číslo. Označme tedy $k = 2s$ a dosaďme to do předpisu pro pythagorejské trojice. Získáme

$$\begin{aligned} a &= 4(2s), \quad b = 2(2s)^2 - 2, \quad c = 2(2s)^2 + 2, \quad s \in \mathbf{N} - \{1\}, \\ a &= 2(4s), \quad b = 2(4s^2 - 1), \quad c = 2(4s^2 + 1), \quad s \in \mathbf{N} - \{1\}. \end{aligned}$$

Jsou to tedy pythagorejské trojice, které jsou dvojnásobkem pythagorejských trojic, kde se dvě největší čísla liší o dvě a tato dvě čísla jsou lichá a třetí číslo sudé.

Druhá podskupina je taková, že proměnná k je liché číslo. Označme tedy $k = 2l - 1$ a dosadíme to do předpisu pro pythagorejské trojice. Získáme

$$\begin{aligned} a &= 4(2l - 1), \quad b = 2(2l - 1)^2 - 2, \quad c = 2(2l - 1)^2 + 2, \quad l \in \mathbf{N} - \{1\}, \\ a &= 4(2l - 1), \quad b = 4(2l^2 - 2l), \quad c = 4(2l^2 - 2l + 1), \quad l \in \mathbf{N} - \{1\}. \end{aligned}$$

Jsou to tedy pythagorejské trojice, které jsou čtyřnásobkem pythagorejských trojic, kde se dvě největší čísla liší o jedničku.

8 Další speciální skupiny pythagorejských trojic

Podobným postupem bychom mohli hledat speciální skupiny pythagorejských trojic, kde se dvě největší čísla liší o pět, o šest atd. Jelikož je ale tab. 1 složená jen z pěti řádků, tak tyto další trojice v tabulce nevidíme. Proto tyto situace nebudeme algebraicky zpracovávat a ponecháváme to na čtenáři.

Poznámka: Pro čtenáře, kteří si najdou generátory pro případ, kdy se dvě největší čísla liší o pět, uvádíme výsledek ke kontrole:

$$a = 10k - 5, \quad b = 10k^2 - 10k, \quad c = 10k^2 - 10k + 5, \quad k \in \mathbf{N} - \{1\}.$$

9 Shrnutí

Z výpočtů v předchozích kapitolách vyplývá, že pro jakýkoli rozdíl r dvou největších čísel v pythagorejské trojici lze získat předpis, pomocí něhož můžeme tyto trojice generovat. Ten předpis je:

$$a = r(2k - 1), \quad b = r(2k^2 - 2k), \quad c = r(2k^2 - 2k + 1), \quad r, k \in \mathbf{N}, \quad k > 1.$$

V předchozích kapitolách je ale také vidět, že tímto předpisem se sice nagenereje pro každý rozdíl dvou největších čísel nekonečně mnoho pythagorejských trojic, ale také že tímto předpisem nejsou generovány všechny pythagorejské trojice. Tento nedostatek je třeba řešit individuálně pro každý rozdíl dvou největších čísel v trojici.

10 Závěr

Článek ukázal jednu metodu, jak se dají hledat pythagorejské trojice čísel. Jde o algoritmus, který umí vytvořit každou takovou trojici, neboť kdyby měla tab. 1 nekonečný

počet řádků, vždy by se tam každá pythagorejská trojice našla. To je hlavním pozitivním atributem uvedeného algoritmu. Negativní atribut je zmíněn na konci předchozí kapitoly.

L i t e r a t u r a – R e f e r e n c e s

- [1] [cs.wikipedia.org/wiki/Pythagorejská.trojice](https://cs.wikipedia.org/wiki/Pythagorejská_trojice).
- [2] kap.kr-jihomoravsky.cz/uploads/attachment/attachment/attachment.file/147746/01.Pythagorejské.trojice.2022.pdf.
- [3] Kocanda, L., Zhouf, J.: *Tvorba pythagorejských trojic*. In (ed. Zhouf, J.) Ani jeden matematický talent nazmar, UHK, Hradec Králové, 2022.
- [4] <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1452-pythagorejske-trojice>.

Adresa autora:

Fakulta informačních technologií ČVUT, Thákurova 9, 160 00 Praha 6, Česká republika
e-mail: zhouf@seznam.cz

The Earth's Magnetism and the Pole Reversal

Sós Katalin, Nánai László

Abstract: One of the most important tasks of teachers is to help students navigate the world of news, including scientific news. Of course, for this it is necessary that the teachers themselves have adequate basic knowledge to interpret what they read. This knowledge goes far beyond the secondary school curriculum, such as also in the case of magnetic pole reversal. With our series of articles that started in 2014, we want to help our teaching colleagues with this work.

Key words: magnetism of rocks, magnetism of celestial bodies, magnetic pole

Súhrn: Jednou z najdôležitejších úloh učiteľov je pomáhať študentom orientovať sa vo svete správ, vrátane vedeckých správ. Samozrejme, na to je potrebné, aby samotní učitelia mali dostatočné základné znalosti na interpretáciu prečítaného. Tieto poznatky ďaleko presahujú stredoškolské osnovy, ako napríklad aj v prípade spontánneho preklápania sa magnetických pólů. Našou sériou článkov, ktorú sme zahájili v roku 2014, chceme v tejto práci pomôcť našim učiacim kolegom.

Kľúčové slová: magnetizmus hornín, magnetizmus nebeských telies, magnetický pól

MESC: M50

1 The Earth's magnetism and the pole reversal

In more and more scientific and semi-scientific articles, we can read about the fact that the strength of our Earth's magnetism is changing, and the migration of magnetic pole is also accelerating. All of this indicates that we are approaching a rare and not yet fully understood phenomenon: The Earth is facing another pole reversal. What this process is, how it occurs and what consequences can be expected. We will deal with this in the tenth article of our series dealing with the relationship between physics and nature.

2 Magnetism of atoms and materials

The magnetism of the particles can be traced back to two reasons: due to their movement and their own magnetism. It is known from Maxwell's laws that moving electric charges have a magnetic field, so it can be interpreted e.g. the magnetic moment

resulting from the orbital motion of the electron. The magnitude of which can be given by the secondary quantum number, and its direction relative to the external magnetic field by the magnetic quantum number. On the other hand, the particles, even the neutral neutron, have so-called with its magnetic property, which can be characterized by the spin of the particles. The sum of the magnetic moments of the particles that make up the atom gives the total magnetic moment of the atom, although for most atoms only the magnetism of the electrons is significant. [1]

Under the influence of an external magnetic field, on the one hand, the atoms with a magnetic moment align in the direction of the field (paramagnetic process), and on the other hand, the external field induces a magnetization in the direction opposite to the external field (diamagnetic process), according to Lenz's law. Regarding both processes, it can be said that the generated magnetization (M) is proportional to the external magnetic field strength (H), the proportionality factor is the magnetic susceptibility (χ) characteristic of the medium. This is called the linear material equation of magnetism [2]:

$$M = \chi H. \quad (1)$$

Based on the value of magnetic susceptibility, materials can be classified into three groups [3]:

- In the case of diamagnetic materials, the value of χ is negative, i.e. the magnetization formed is in the opposite direction to the field strength. Such materials have a closed electron shell or paired electrons, so the resulting magnetism of the atom is 0 (e.g. noble gases, copper, gold, silver, mercury, pyrolytic graphite). However, induced magnetism is formed under the influence of the external magnetic field, and since it is in the opposite direction to the external magnetic field, a repulsive effect occurs between them. This repulsion is the basis of diamagnetic levitation, which e.g. they are used in the operation of magnetic levitation trains. In the case of the diamagnetic levitation device, there is a strong permanent magnet between two plates made of pyrolytic graphite, which will float due to the repulsion of the plates if gravity is properly compensated with the upper magnets.



Fig. 1: Diamagnetic levitation device.

- In the case of paramagnetic materials, the χ value is a positive value between 10^{-3} and 10^{-6} , i.e. the developed magnetization and the field strength are unidirectional. Such materials would have their own magnetism, since their electrons are unpaired, thus the atom has its inherent magnetism. Due to thermal motion, however, these atomic magnets are in an unordered direction in space, so their resultant is 0 (e.g. alkali metals, aluminum, oxygen, tungsten). However, in an external magnetic field, the direction of the atomic magnets is arranged, so the magnetism of the material can already develop. Thermal motion can deteriorate this one-way alignment, which is expressed by the relationship $\chi \sim 1/T$ known as Curie's law.
- The χ value of ferromagnetic materials is usually a positive value between 10^4 and 10^5 , but it is not constant for any material, it depends on $\mathbf{H}$ and even on the magnetization of the material before. Ferromagnetic materials are not only magnetized in an external magnetic field, but also retain their magnetism after the field is removed (e.g. iron, cobalt, nickel, chromium oxide). In this case, the material is a small, approx. In its space containing 10^{15} atoms, the atomic magnets – due to the interaction of the atomic magnets – line up in one direction, these are called domains. However, the domains are disordered relative to each other, so they compensate for each other's magnetism. Subjecting the material to an external magnetic field, the domains move in the direction of the external field, the material acquires a strong magnetism. By raising the temperature, the so-called when the Curie temperature is reached, the ferromagnetic material becomes paramagnetic. In the case of chromium

and manganese, the interaction of adjacent atomic magnets results in them aligning oppositely, these are antiferromagnetic materials. In ferrimagnets, the magnetism of the atoms in each pair is in opposite directions, but not of equal magnitude. Thus, their resulting magnetism is strong, and they will have significant remanent magnetism even after the termination of the external field. [4]

Ferromagnetic materials can also become magnetized under the influence of the earth's magnetic field. We can observe this e.g. for cast iron radiators: the setting of the compass changes as we approach the radiator.



Fig. 2: The deviation of the compass indicates magnetisation of the cast iron radiator.

3 Magnetism of minerals and rocks

Magnetism of minerals and rocks among the minerals, quartz, calcite, gypsum, rock salt, aragonite are diamagnetic; the clay minerals, olivine, amphibole, biotite are paramagnetic. Most of the magnetic minerals are ferrimagnetic, such as titanomagnetite ($\text{Fe}^{2+}(\text{Fe}^{3+}, \text{Ti})_2\text{O}_4$) or titanohematite (solid solution of hematite and ilmenite), which gives the magnetism of basalt. The magnetism of rocks is obviously determined by the magnetic properties of the constituent minerals: rocks rich in silicates or carbonates are diamagnetic; if the amount of core minerals is the determining factor,

the rock is paramagnetic; and ferromagnetic minerals give rocks with strong remanent magnetism. [4]

The magnetization of rocks, which was formed in the constituent minerals as a result of the Earth's magnetic field during or immediately after rock formation, is called natural remanent magnetization (NRM). The primary NRM was created during the formation of the rock, which can be based on its creation:

- thermoremanent magnetization (TRM), in which the cooling igneous rock, reaching its Curie point, becomes magnetized. Further cooling increases the magnetization, and then the so-called assumes a constant value at the blocking temperature. According to Néel, above the blocking temperature in single-domain crystals, due to thermal motion, the domains switch to the energetically more favorable state, but this requires an activation energy of μH . If the energy resulting from heat movement covers the activation energy, i.e. $kT > 1 \mu H$ (k is the Boltzmann constant, T is the current temperature), the reversal occurs: the higher the temperature, the faster, the more likely it is. Below the blocking temperature, there is no cover for the activation energy of the flip, so the flip can only happen very slowly, with a very low probability. According to Stacey, in the multi-domain case, it is not a reversal, but an increase in the size of the domains facing the outer space, which is called the wall effect. The highest TRM value occurs in small crystalline, anisotropic, ferromagnetic rocks. They play an important role in the research of continental drift and plate tectonics, as well as in the study of pole reversal. [5]
- In the case of sediment remanent magnetization (DRM), the ferromagnetic crystals "set up" in the external magnetic field during sedimentation, and this setup is not changed by further sedimentation steps, especially for thicker layers and in the absence of water washing. These conditions are fulfilled in deep-sea sediments, where the pole reversal can be verified and the time of each setting can be investigated, as well as in the research of local magnetic changes.

It is also worth mentioning the concept of secondary remanent magnetism, knowledge of which is important for magnetic rock testing, but also for magnetic archeological analyses. This magnetism is created due to effects well after the formation of the rock, it's more important forms are [5]:

- the viscous remanent magnetism (VRM) indicates that the longer the material was in the given magnetic field, the stronger the remanent magnetism. We can also interpret this in terms of heat movement: over a longer period of time, several grains have enough thermal energy to allow the conversion to take place. Its name refers to the fact that the material follows the magnetic changes with a delay in the same way as the movement in the liquid causes the force.

- in the case of isothermal remanent magnetism (IRM), the characteristic is the immediate magnetism that appears at a field strength of several thousand A/m and remains even after the external magnetic field of the field ceases.

4 Magnetism of celestial bodies

Following Maxwell's laws, celestial bodies with a region of moving electric charge have significant magnetism. This magnetism is called the internal magnetism of celestial bodies. In this sense, the Earth also has internal magnetism, since its liquid outer core contains iron and nickel ions; their movement gives the 95% of Earth's magnetism is of liquid outer parts. 5% comes from the magnetism of the rocks, this is called frozen magnetism. Together, these two make up the Earth's own magnetism. The third source is the magnetism from the ions moving in the atmosphere and from the atmospheric electromagnetic field, i.e. atmospheric magnetism. [6]

Earth's internal magnetism is also referred to as the "magnetic dipole field", as this magnetism can be well illustrated by the magnetic field of a bar magnet. For this, the imaginary bar magnet placed in the axis of rotation is moved towards Australia approx. 400 km, and then we turn it so that it forms an angle of 11,5 degrees with the axis of rotation.

Several theories have been developed to explain the earth's internal magnetism, all of them take the flow of the outer core as the basis of magnetism and try to find a reason for this movement. According to one theory, the relatively high-speed movement of the melt in the outer core is ensured by the fact that the inner core and the mantle have different speeds due to the gravitational attraction of the Moon and the Sun, and therefore the individual layers of the outer core also have different speeds. This velocity gradient is responsible for the relatively high magnetic field strength. However, they proved with models that the magnetic field created in this way can only be detected in the earth's core, and no longer on the earth's surface. Another theory sees the complicated flow of the outer core as the result of two effects: one is the heat flow starting from the inner core, and the other is the rotation of the Earth around its axis. However, the flaw in this explanation is that it would result in a much weaker magnetic field than what can be measured in reality. According to today's latest theories, the inner magnetism is also due to the fact that the inner core is asymmetric, which constantly wanders in the Sun-Earth-Moon system, and thus, due to mass attractions, a perpetual, very high-speed material flow starts in the outer core. However, all theories agree that the change in the magnetic field strength results from a change in the flow conditions of the outer core. The model describing the flow is called the double dynamo model. The essence of this is that if an electrically conductive sphere is placed in a highly conductive liquid, then this

system is placed in a magnetic field and the different spherical shells of the liquid rotate with different angular velocities around their axis of rotation parallel to the direction of the magnetic field, then the lines of force of the magnetic field strength are "frozen" in the liquid and move together with the liquid elements, which are two ring-like – so-called toroidal – creates a magnetic field. [7]

Alfvén and Lindberg summarize the above as follows: "every rotating celestial body with plasmatic internal material has a dipole magnetic field if the internal and external material regions rotate at different speeds". The electrically conducting fluid required for the dynamo effect: in the case of the Earth and the rocky planets, the liquid core; inside Jupiter and Saturn, due to the high pressure, hydrogen is in a metallic state; at Uranus and Neptune, water is an ionized state. According to this, we can examine the internal magnetism of some celestial bodies. Naturally, during the space probe measurements, the celestial body's own magnetism was determined, which also includes the frozen magnetism. Along with this, it can be said that celestial bodies with strong intrinsic magnetism have a strong dynamo effect. [8][9]

- Mercury rotates more slowly than our Earth ($T = 58,7$ days), the nearby Sun exerts a strong tidal effect on it, therefore the rotation speed is strongly different in its inner layers, so a significant internal magnetic field can be expected. Based on measurements by the Mariner spacecraft, its magnetic induction is 400 nT. According to the measurements, the magnetic field lines show quadrupole and octupole fields.
- Venus rotates slowly ($T = 243$ days), it has no moon, there is no significant difference in rotation between its layers, so its internal magnetism is weak. Measurements were made by the Pioneer Venus-2 spacecraft for the magnetic dipole moment, giving a value of $4,29 \times 10^{18} \text{ A} \cdot \text{m}^2$. The axis of its magnetism dipole forms an angle of 15 degrees with its axis of rotation. Due to its weaker magnetism, it is assumed that the entire core is liquid here, the inner core has not been formed, so the dynamo processes have not yet fully developed.
- Mars with the Earth approx. it rotates at the same speed ($T = 24,6$ hours), has a weak tidal effect (since it is already farther from the Sun, and its two moons have a small mass), so its internal magnetism is weak. This is confirmed by the measurements of the NASA Mars Global Surveyor spacecraft, on the basis of which a dipole moment of $2 \times 10^{17} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ was calculated. At the equator of Mars, the induction is currently 20 – 60 nT, but based on the paleomagnetic examination of meteorites of Martian origin found in Antarctica, the rocks were magnetized in a field with an induction of 10^3 nT. In other words, Mars had a dynamo effect 4-4,6 billion years ago.

- Jupiter rotates quickly ($T = 9,8$ hours), it is characterized by strong tides mainly due to its moons, so its rotation speed is high, and because of this it can be characterized by strong internal magnetism. The measurements of the Voyager-1 and -2 space probes gave a value of $1,48 \times 10^{27} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ for the magnetic moment, the induction measured in the magnetic pole is 1,4 mT. Jupiter's strong magnetism is contributed by the plate-shaped current system flowing around the planet in its equatorial zone, with a current strength of 300 MA.
- According to Pioneer-11 measurements, Saturn has a magnetic moment of $4,37 \times 10^{25} \text{ A} \cdot \text{m}^2$, its direction closes 1 degree with the axis of rotation, its induction at the north pole is the largest, 84 000 nT.
- The average magnetic induction of Uranus is 23 000 nT, according to Voyager-2 measurements, its magnetic moment is $4,1 \times 10^{24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ dipole, the magnetic axis makes an angle of 47 degrees with the axis of rotation.
- According to Voyager-2 measurements, Neptune has a strong magnetic field, its magnetic axis closes 47 degrees with the axis of rotation. Its induction is on average 50 000 nT, its magnetic moment is $1,5 \times 10^{24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.
- The large planets exert a significant tidal effect on the Sun, with a large angular velocity difference between its outer and inner layers, so it has a strong magnetism. However, in the case of the Sun, the rotation time is not the same at all points on the surface (25 days at the Equator, 32 days at the poles), therefore strong mixing and material vortices develop in the material of the Sun, which create strong spatial magnetic fluctuations. Its average induction is 10^{-4} T , but in these magnetic vortices it can reach several thousand. Essentially, they result in the creation of sunspots and solar flares.
- The Moon's rotation is moderately fast ($T = 27,3$ days), it is not affected by tidal effects, so it has no internal magnetic field. However, based on the strong magnetism of the lunar samples, it can be assumed that the Moon once had a stronger magnetic field and perhaps even had a liquid core.

Data affecting the current magnetic moment of the planets and the dynamo effect are summarized in the following table (sources of magnetic data [10] [11])

Planet	Magnetic dipole moment $m/(A \cdot m^2)$	Rotation time	Average distance from the Sun	Masses of their large moons
Mercury	$2 \times 10^{19} - 5 \times 10^{19}$ avg.: $4 \times 10^{-4} m_{\text{Earth}}$	58,7 day	$57,9 \times 10^6$ km	–
Venus	$(4,29 \pm 2,03) \times 10^{18}$ avg.: $6 \times 10^{-5} m_{\text{Earth}}$	243 day	$108, \times 10^6$ km	–
Earth	m_{Earth}	23,9 h	$149,6 \times 10^6$ km	1 pc $7,3 \times 10^{22}$ kg
Mars	2×10^{17} $2,5 \times 10^{-6} m_{\text{Earth}}$	24,6 h	$227,9 \times 10^6$ km	1 pc 2×10^{15} kg 1 pc $10,7 \times 10^{15}$ kg
Jupiter	$1,48 \times 10^{27}$ $1,89 \times 10^4 m_{\text{Earth}}$	9,8 h	$778,3 \times 10^6$ km	4 pcs $\approx 10^{23}$ kg 12 pcs $\approx 10^{18}$ kg
Saturn	$4,37 \times 10^{25}$ $560 m_{\text{Earth}}$	10,2 h	$1\,427 \times 10^6$ km	1 pc $\approx 10^{23}$ kg 6 pcs $\approx 10^{20}$ kg
Uranus	$4,113 \times 10^{24}$ $53 m_{\text{Earth}}$	17,3 h	$2896,6 \times 10^6$ km	2 pcs $\approx 10^{21}$ kg 3 pcs $\approx 10^{19}$ kg
Neptune	$1,975 \times 10^{24}$ $25 m_{\text{Earth}}$	16,1 h	$4\,496,6 \times 10^6$ km	1 pc $\approx 10^{22}$ kg 2 pcs $\approx 10^{19}$ kg 3 pcs $\approx 10^{18}$ kg

Tab. 1. Magnetic induction of planets and the extent of factors affecting it.

In summary: the rapid rotation, the high tidal effect (closeness to the sun or large moons) and an internal structure that allows for flow contribute to the development of greater magnetism on celestial bodies.

Theoretical approximations of magnetism of bodies were given by Curtis and Ness in the 1980's. The equation is the so-called can be derived from magnetostrophic balance (the equality of the Lorentz force and the Coriolis force). According to this, the calculated equatorial magnetic field strength of the planet ($H_{\text{calculated}}$) compared to the earth's equatorial field strength (H_{Earth}):

$$H_{\text{calculated}} = \frac{\rho^{1/3} M^{1,54} \omega^{0,5} E^{1/6}}{r^3} H_{\text{Earth}} \quad (2)$$

where r is the radius of the planet, ρ is its density, M is its mass, ω is its rotation speed, and E is the internal heat current density. (The data are normalized to Earth data, i.e. $\rho \equiv \rho_{\text{planet}}/\rho_{\text{Earth}}$, $M \equiv M_{\text{planet}}/M_{\text{Earth}}, \dots$).

If the ratio of the observed and calculated magnetism of the planet is close to 1, active "dynamoes" are operating in the planet (e.g. Mercury, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptune); if this ratio is less than one, an active dynamo does not work (e.g. Venus, Mars, Moon). [10]

5 Earth's magnetic poles

The value of Earth's magnetism varies with latitude: near the Equator, on the magnetic equator 30 000 nT, near the poles, in the magnetic poles $\pm 60\,000$ nT of induction, magnetic moment $7,84 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ [11]. Quantities used to specify the spatial direction [2]:

- the declination (D), which is the angle formed by the vertical plane passing through the induction vector and the local circle of longitude (approx. 2° in Hungary),
- the inclination (I), which is the spatial direction enclosed by the horizontal plane angle (in Hungary approx. $60\text{--}65^\circ$).

Inclination can be determined with a magnetic needle with a vertical axis of rotation, and inclination with a magnetic needle with a horizontal axis of rotation.

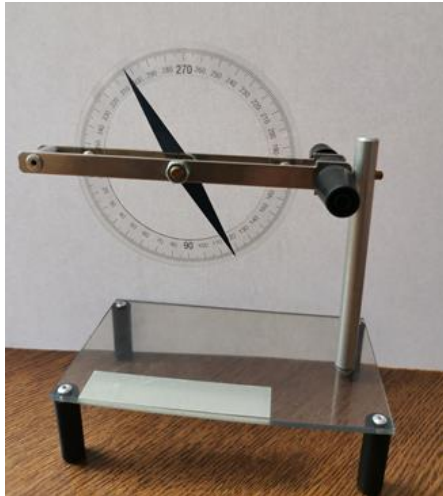


Fig. 3: Inclinometer.

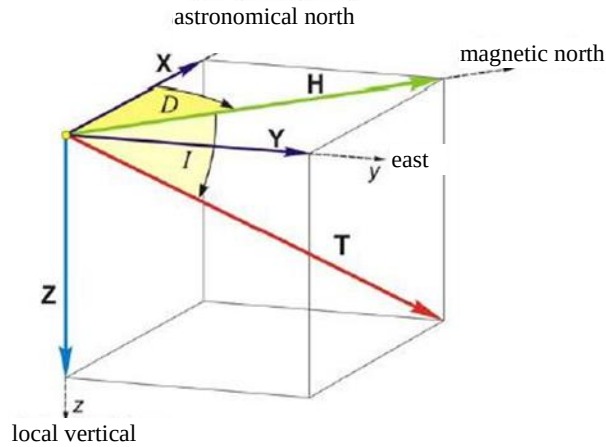


Fig. 4: Typical quantities of the Earth's magnetic field [12]
*D: declination, I: inclination, T: magnetic induction vector,
 H: horizontal projection of induction, Z: vertical projection of induction*

The inclination can be used to define e.g. the concepts of **magnetic corner** and **magnetic equator**: at magnetic corners the inclination is 90° , i.e. there the magnetic field is vertical; on the magnetic equator, the inclination is 0° , that is, the direction of the magnetic field is horizontal.

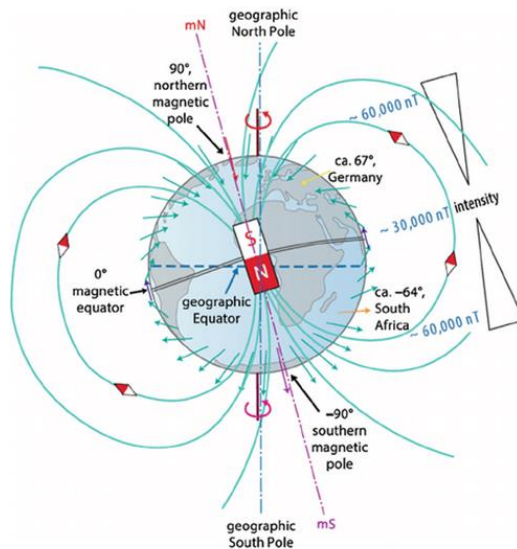


Fig. 5: The poles, lines of force of the Earth's magnetism, the magnetic equator [13]

The Earth's magnetic south pole is at Wilkes Land in Antarctica, the north pole is located near the geographic north pole, while it was just off the coast of Canada 40 years ago, since 2018 it has been located in the eastern hemisphere and is approaching Siberia. The location of the magnetic pole is an average value, which is determined by following its 5-year movement. In the last 40 years, the accelerated migration of the north magnetic pole has been observed, according to measurements, it is currently approx. It moves at a speed of 50 km/year.



Fig. 6: Time change of the location of the Earth's North Magnetic Pole [14]

Pole movements can be monitored by examining the frozen magnetism of rocks. These measurements can best be carried out in the vicinity of oceanic ridges, with the help of thermoremanent magnetism, because there liquid magma erupts between crustal plates moving away from each other, and its ferromagnetic components become magnetized after cooling below their Curie point. By measuring the magnetization of rocks in a cross section, it is possible to determine when and where the geomagnetic field was directed. This procedure is magnetostatigraphy.

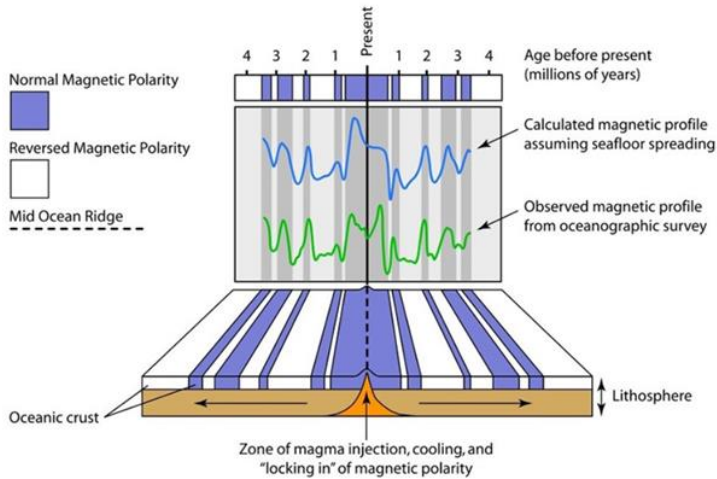


Fig. 7: Magnetization of the rocks of the mid-ocean ridges [15]

The rock tests showed that in 76 million years approx. the pole of the Earth's magnetism reversed 170 times. On average, 450 000 thousand years pass between two transitions, but this period varies between 50 thousand and 30 million years. The current pole alignment has been going on for 780 000 years. Based on the long-standing alignment, the accelerating pole movement, and the 6% decrease in momentum over 150 years, scientists assume an impending pole reversal, which is why research into the magnetic fields of celestial bodies has begun. [3]

In addition to the pole reversal, magnetic poles are also characterized by a continuous movement. Paleomagnetic studies show that the North Pole rotates around an axis that forms an angle of 5 degrees with the axis of rotation. performs a precessional movement. Its period is 100 000 years and its amplitude is 15 degrees. The location of the poles is therefore never permanent, and even during a pole reset, the poles do not tilt back to their original location: 1 billion years ago, e.g. the magnetic north pole was still in the equatorial areas, from there it migrated towards the poles.

The measurements carried out in a given observatory also show local changes, which can usually be well described by a periodic function. The London observatory has the oldest data series recorded since 1550. The results there describe a function with a period of 500 years and an amplitude of 10^{-7} T for the field strength change [7]. In Hungary, there are currently observatories that study terrestrial magnetism in Tihany and Nagycenk. Among the shorter-term changes, there are regular daily variations, their scale is around 10^{-8} T. But there are so-called also magnetic disturbances, with a change of up to 10^{-7} T, such as in the case of magnetic storms generated during more intense solar flares.

According to them, the Earth's magnetic field strength is highly variable, and this variability has always been characteristic of it. Of course, the researchers are investigating whether the changes in the magnetic field had any effect on life on earth, but so far they have not found any connection during the fossil investigations. Smaller changes will certainly occur, since the magnetic field has a great impact on the life of birds, fish, and even humans. Just think of an artificial magnetic field being created in spaceships due to a sudden decrease in magnetic field strength, or Mars to make it habitable, it will be necessary to create an artificial magnetic field. It should also be taken into account that due to the weakening of space, less filtered cosmic radiation increases the radioactive background radiation, and in addition, the particles that flow more freely can also indirectly increase the thinning of the ozone layer. However, the natural change of the magnetic field is a very slow process, so it is assumed that living organisms can adapt well to the occurring, hopefully not fatal, changes. There is no doubt, however, that the change in magnetic field strength will be a big challenge for satellites and electrical networks, and we can experience this even today during a magnetic storm. The technical equipment must therefore be "prepared" for this shock, which is why it is necessary to recognize, model and even predict the cause of the earth's magnetic changes.

L i t e r a t u r e

- [1] Erőstyák J, Kürti J., Raics P., Sükösd Cs.: Fizika III. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006. ISBN 963 19 5806 X
- [2] Litz József: Elektromosságtan és mágnességtan, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1988. ISBN 963 06 1467 0
- [3] Kovács Endre, Paripás Béla: Fizika II. 4. A Műszaki Földtudományi Alapszak Tananyaga, Digitális Egyetem, 2011.
- [4] Pethő Gábor, Vass Péter: Geofizika alapjai 2. A Műszaki Földtudományi Alapszak Tananyaga, Digitális Egyetem, 2011.
- [5] M. J. Aitken: Fizika és régészet, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1982. ISBN 963 05 2923 8
- [6] O. P. Merkulov: A mágnesség csodái. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986. ISBN 963 10 6597 9
- [7] Budapest University of Technology and Economics Faculty of Civil Engineering, <https://edu.epito.bme.hu/local/coursepublicity/mod/resource/view.php?id=9295>, online pristup 17.03.2024.
- [8] Both Előd, *A Szaturnusz mágneses tere*, Űrvilág, úrkutatói hírportál (Vesmírný svet, portál pre vesmírne výskumy), 2021.06.07., online pristup 17.03.2024, https://www.urvilag.hu/tavoli_vilagok_kutato_i/20210607_a_szaturnusz_magne-ses_tere
- [9] Barta György: A Föld mágneses tere okáról. Geonómia és bányászat, MTA X. Föld- és Bányászati Tudományok Osztályának Közleményei. 8. kötet, 1-2. szám, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
- [10] Kis Károly: Általános geofizikai ismeretek. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2007. ISBN 963 463 542 3
- [11] Kis Károly, Wittmann Géza: A Naprendszer bolygóinak és néhány holdjának mágneses tere. Magyar Geofizika 43. évf. 2. szám, 2002.
- [12] Völgyesi L: *Geofizika*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2002. online pristup 17.03.2024, http://sci.fgt.bme.hu/volgyesi/geofiz/1_1-3.pdf
- [13] Henrik Mouritsen, *Magnetoreception in Birds and Its Use for Long-Distance Migration*, In book: Sturkie's Avian Physiology (pp.113-133) Edition: Sixth Edition Chapter: Magnetoreception in Birds and Its Use for Long-Distance Migration Publisher: Associated Press Editors: Colin G. Scanes, Online pristup 17.03.2024 https://www.researchgate.net/figure/The-Earths-magnetic-field-the-geomagnetic-field-Notice-that-the-southern-and-northern_fig1_279446083
- [14] Alexandra Witze, *Earth's magnetic field is acting up and geologists don't know why*, Nature 565, 143-144 (2019), online pristup 17.03.2024 <https://www.nature.com/articles/d41586-019-00007-1>
- [15] Wheeling, Kate, *Steadying mid-ocean ridge spreading rates*, Eos, 101, <https://doi.org/10.1029/2020EO148647>. Published on 04 September 2020., published by AGU (Advancing Earth and Space Sciences), Online access 23.03.2024, <https://eos.org/research-spotlights/steadying-mid-ocean-ridge-spreading-rates>

Author's addresses: Sós K., Department of Technique JGYPK
University of Szeged, Hungary, H-6725 Boldogasszony sgt. 6.
e-mail: sos.katalin@szte.hu
Nánai L., Department of Technique JGYPK
University of Szeged, Hungary, H-6725 Boldogasszony sgt. 6.
e-mail: nanai.laszlo@szte.hu

Program Artemis

Návrat astronautov na Mesiac

Ladislav E. Roth

Abstract: Twelve American astronauts, members of six NASA Apollo missions, landed on the Moon between the years 1969 and 1972. The astronauts of the first mission, Apollo 11, spent a few hours on the Moon. The astronauts of the last mission, Apollo 17, stayed three days. Visitors collected samples of lunar rocks and returned back to Earth. Success of the Apollo Program caused its premature termination. Discovery of the water ice on the Moon brought with it a substantial increase of interest in the Moon and in constructing permanently inhabited bases there. The bases would make the human flights to Mars and farther into space easier to accomplish. They would also allow mining of the lunar mineral riches and their utilization on Earth. NASA established the Artemis Program in the year 2017. The goal of the new program is to explore the Moon more thoroughly and to make first steps toward the permanent human presence on that body. Landing of astronauts will take place in the year 2026, at the earliest. Several countries have sent robotic probes to the surface of the Moon. China is planning to send astronauts to the Moon in the year 2030.

Key words: the Moon, Program Apollo, Program Artemis, water on the Moon, helium-3 on the Moon, the Orion rocket, the Chandrayaan probes, the Chang'e probes, the Odysseus probe

Súhrn: V rokoch 1969-1972 dvanásť amerických astronautov, členov šiestich NASA Apollo misií, pristálo na Mesiaci. Astronauti prvej misie, Apollo 11, sa zdržali na Mesiaci niekoľko hodín; astronauti poslednej misie, Apollo 17, sa zdržali tri dni. Návštevníci nazbierali vzorky hornín a vrátili sa na Zem. Úspech Programu Apollo znamenal jeho predčasné ukončenie. Objav vodného ľadu na Mesiaci priniesol podstatné zvýšenie záujmu o Mesiac a o vybudovanie permanentne obývaných základní. Základne by prispeli k uľahčeniu ľudských letov na Mars a ďalej do kozmického priestoru. Umožnili by dobývanie nerastného bohatstva Mesiaca pre obyvateľov Zeme. NASA ustanovila Program Artemis v r. 2017. Cieľom je Mesiac lepšie poznať a vykonať prvé kroky k stálej prítomnosti človeka na Mesiaci. S pristátím astronautov sa ráta najskôr v roku 2026. Viac krajín vyslalo robotické sondy na povrch Mesiaca. Čína plánuje vyslať astronautov v roku 2030.

Kľúčové slová: Mesiac, Program Apollo, Program Artemis, voda na Mesiaci, hélium-3 na Mesiaci, vesmírne vozidlo Orion, sondy Chandrayaan, sondy Chang'e, sonda Odysseus

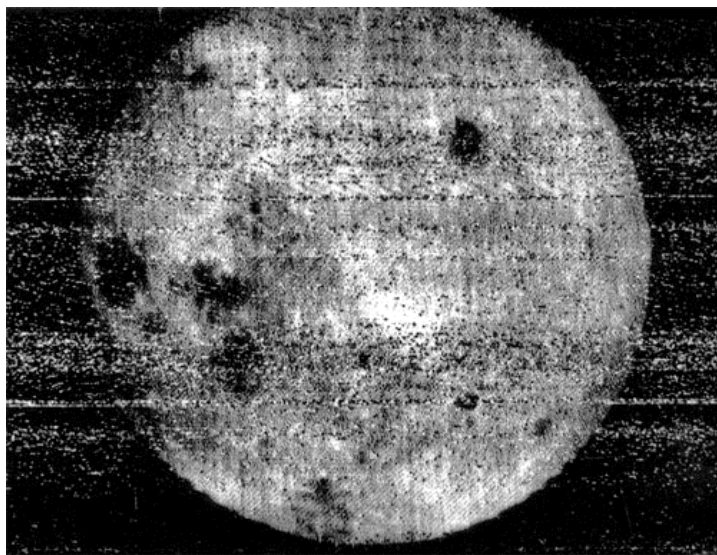
MESC: M50

Pred pol storočím americkí astronauti šesť razy pristáli na Mesiaci a vrátili sa späť na Zem. Pristátia sa udiali v rámci NASA Programu Apollo. Program bol ustanovený ako dôsledok ideologického a mocenského konfliktu medzi Spojenými štátmi a Sovietskym zväzom. Bez ohľadu na politickú motiváciu, cesty na Mesiac predstavovali fenomenálny technický a organizačný úspech pre Spojené štáty. Ukončením Programu Apollo ľudské lety na Mesiac ustali. Nedávno zriadený a nominálne apolitický NASA *Program Artemis* má nadviazať na prerušenú tradíciu Programu Apollo. Má obnoviť prítomnosť človeka na Mesiaci a má ju urobiť dlhodobou, dokonca trvalou. V úvahách o rozsahu Programu Artemis figurujú aj lety astronautov na Mars a na vybrané asteroidy – nie v bezprostrednej budúcnosti, ale v dohľadnej budúcnosti. Lety do kozmu s posádkou v mnohých myšliach sa javia ako podujatia sporné, v iných myšliach ako podujatia nutné a z hľadiska prežitia nášho biologického druhu neodvratné. Pokúsím sa zhrnúť aspoň niekoľko informácií relevantných pre *Program Artemis*, a vložiť ich do súvislosti s históriou ľudského prenikania na Mesiac. Na otázku, či máme Mesiac a iné nebeské telesá kolonizovať, čitateľ si môže utvoriť vlastný názor, ak si ho už neutvoril.

Pripomeňme si, že úvodnú iniciatívu v letoch do kozmu uchopil Sovietsky zväz, vypustením Sputnika 1, prvej umelej družice Zeme (4. októbra 1957). Sovietsky počin, nečakaný a prekvapivý, vyvolal svetovú senzáciu. A hlavne, hodil výzvu Spojeným štátom. Prezident Dwight D. Eisenhower odvetil príkazom Armádnej agentúre pre balistické strely (Army Ballistic Missiles Agency, ABMA), aby použila strelu Jupiter C k bezodkladnému vypusteniu americkej družice. Strelu Jupiter C, už skoršie zaradenú do americkej výzbroje, vyvinuli v ABMA výskumnom stredisku Redstone Arsenal v Huntsville (Alabama). Wernher von Braun zastával funkciu technického šéfa Redstone Arsenalu. Strela Jupiter C poskytla tri stupne výstrelného agregátu. Laboratórium pre prúdový pohon (Jet Propulsion Laboratory, JPL) Kalifornskej technickej univerzity (California Institute of Technology, Caltech) v Pasadene dodalo štvrtý stupeň. Dodalo aj družicu, *Explorer 1*. *Explorer 1*, vypustený 31. januára 1958, sa stal prvou americkou družicou. Na americkej strane Sputnik 1 podstatne posilnil pocit ohrozenia Sovietskym zväzom. Politickí činitelia vyslovili názor, že úsiliu o držanie kroku so sovietskymi kozmickými podujatiami chýbalo strategicky podložené a optimálne koordinované centrálné vedenie. Kongres naslúchal a prijal zákon o zriadení civilnej agentúry, Národnej leteckej a kozmickej agentúry (*National Aeronautics and Space Administration*, NASA). Prijatý zákon Eisenhower podpísal v júli 1958. NASA zahájila činnosť v októbri 1958. Do vena dostala osvedčené pracoviská: Redstone Arsenal (aj s von Braunom) a JPL.

Sovietsky zväz uchopil iniciatívu a náskok v súťaži so Spojenými štátmi nielen vypustením prvej družice Zeme, ale aj prvými pokusmi o poznanie Mesiaca prostredníctvom robotických sond série Luna/Lunik (názvy sú zameniteľné). Tri príklady, všetky tri málo známe. Povšimnutia hodný je ich rýchly časový sled. Sonda

Luna 1 (vypustená 2. januára 1959) mala za cieľ zasiahnuť Mesiac. Minula, Mesiac obletela vo vzdialenosť 5.900 km. Stala sa prvým, ľudskou rukou vyrobeným predmetom, ktorý sa priblížil k inému nebeskému telesu, a ktorý vstúpil na heliocentrickú trajektóriu. Veľmi dôležité je, že *Luna 1* nenašla známky magnetického poľa Mesiaca. Neprítomnosť poľa naznačila, že jadro Mesiaca je vychladnuté, tuhé, geologicky nečinné. Sonda *Luna 2* (vypustená 12. septembra 1959) zasiahla Mesiac. Viacero observatórií na Zemi zachytilo oblak prachu zdvihnutý nárazom. *Luna 2* sa stala prvým umelým predmetom, ktorý sa iného nebeského telesa dotkol. Sonda *Luna 3* vypustená (4. októbra 1959) po trajektórii podobajúcej sa predĺženej osmičke, obletela Mesiac a pri oblete zhotovila 29 snímok odvrátenej strany Mesiaca. Snímky pokrýli približne 70% povrchu odvrátenej strany. Po dosiahnutí najvzdialenejšieho bodu trajektórie, sonda sa obrátila, letela do blízkosti Zeme a obdržaná fotografickú korisť vyslala do prijímacej stanice na Kryme. Mozaika snímok poskytla prvý pohľad na permanentne skrytú stranu Mesiaca. (Obr. 1) Odhalila drsnú, pomerne svetlú, krátermi rozkopanú krajinu. Na privrátenej strane vizuálne prevažujú černasté a hladké „maria” (maria) – v názvosloví siahajúcom do sedemnásteho storočia. Zväčša svetlej lunárnej krajine neurovnaného vzhľadu sa v tomto názvosloví hovorí „pevniny” (terrae). *Luna 3* vyslovila definitívny verdikt: *terrae* dominujú povrchu Mesiaca ako celku.



Obr.1: Prvá fotomozaika odvrátenej strany Mesiaca. (*Luna 3*, 1959) [AN SSSR]

NASA pracovala, odhodlania a dobrej vôle bolo dost'. Chýbal ale postup rovnako prijateľný všetkým účastníkom debaty o držaní kroku so Sovietmi. Išlo o spor medzi dvoma zásadne odlišnými koncepciami: robotickými letmi a letmi s ľudskou posádkou. K tomu pristúpili nezhody týkajúce sa urgency letov, či robotických, alebo ľudských. Eisenhower zastával skeptické, až odmietavé stanovisko k ľudským letom – nielen na Mesiac, ale do kozmického priestoru vôbec. Jeho znepokojenie nad rozpočtovými extravaganciami nebolo tajomstvom. Podobne nebola tajomstvom osobná averzia voči najdôležitejšiemu raketovému expertovi NASA von Braunovi a von Braunovej čate nemeckých inžinierov. Počas druhej svetovej vojny generál Eisenhower velil spojeneckým armádam v Západnej Európe. Major SS von Braun viedol vývoj raketových balistických striel, prvých zbraní toho druhu, pre nacistické Nemecko. Po vojne, vo svojej novej vlasti, von Braun vzal na seba rolu hlasitého proponenta ľudských letov do kozmu. V júli 1960 zišli sa vo Washingtone zástupcovia leteckého priemyslu, ozbrojených síl, vedeckých inštitúcií a vedenia NASA. Predmetom konferencie bol pokus o dosiahnutie kompromisu medzi protichodnými prístupmi k Mesiacu. Dosiahnutý kompromis spočíval v rozhodnutí počúvať nie Eisenhowera, ale von Brauna, a poslať astronautov na Mesiac. Pre nejestvujúci program letov na Mesiac konferencia odhlasovala meno Apollo. Meno nadhodil funkcionár NASA Abe Silverstein. Neskôr vysvetlil: „Myslel som, že obraz boha Apollo v jeho bojovom kočiari križujúceho Slnko dával najlepšiu predstavu o majestátnosti navrhovaného programu.” (“I thought the image of the god Apollo riding his chariot across the Sun gave the best representation of the grand scale of the proposed program.”) [1]

Eisenhowerov viceprezident Richard M. Nixon prehral prezidentské voľby v roku 1960. Víťaz, John F. Kennedy, od základu zmenil prístup Spojených štátov k letom do kozmu. Kennedy vnímal politický význam kozmickej prevahy nad Sovietmi. Ostávalo len tú prevahu realizovať. Ako nový prezident, Kennedy vykonal dva kritické ťahy. V prvom, za NASA šéfa (titul: Administrator) vybral ostrieľaného washingtonského právnika Jamesa E. Webba, niekdajšieho riaditeľa Úradu pre rozpočet (Bureau of the Budget). Katalyzátor pre rýchlu americkú akciu ponúkli Sovieti, keď 12. apríla 1961 vystrelili kozmonauta Jurija Gagarina na obežnú dráhu okolo Zeme. Dva dni po Gagarinovom lete Kennedy zvolal mimoriadnu poradu vlády. Výsledkom porady bolo záväzné rozhodnutie: Nech to stojí čo stojí, na let človeka okolo Zeme Spojené štáty odpovedia letom človeka na Mesiac. Bez otáľania, NASA vystrelila astronauta Alana Shepada do výšky 185 km nad povrch Zeme (5. mája 1961). Použili k tomu von Braunovu strelu Jupiter C. V druhom kritickom ťahu, Kennedy oslovil spoločné zasadanie oboch komôr Kongresu (25. mája 1961). Predniesol historický prejav, v ktorom požiadal o spoluprácu v splnení nového národného cieľa – pristátia astronautov na Mesiaci a ich bezpečného návratu na Zem „pred koncom tohoto desaťročia.” Povedal Kennedy: „Verím, že niet kozmického programu,

ktorý by urobil hlbší dojem na ľudstvo, a ktorý by bol dôležitejší pre dlhodobý prieskum kozmu. A žiadny iný nebude obťažnejší alebo nákladnejší.” (“I believe that this Nation should commit itself to achieving the goal, before this decade is out, of landing a man on the Moon and returning him safely to Earth. No single space project in this period will be more impressive to mankind or more important for the long-range exploration of space. And none will be so difficult or expensive to accomplish.”) Kongres počúval Kennedyho s nie prílišným nadšením, ale nepostavil sa plánom do cesty. Program Apollo dostal zelenú, začal jestvovať. [2]

Začal jestvovať, ale ešte pred pristátím astronautov na Mesiaci začal aj chradnúť. Po zavraždení Kennedyho (22. novembra 1963) viceprezident Lyndon B. Johnson sa ujal úradu prezidenta. Záujem o Mesiac a o dlhodobú prítomnosť človeka v kozme znateľne klesol – u verejnosti, v Bielom dome, v Kongrese. Ročný rozpočet NASA dosiahol vrcholu, 5,25 miliárd dolárov (približne 65 miliárd v dnešnej hodnote meny) v roku 1965. Od toho roku, Kongres systematicky škrtil výšku rozpočtových prídeltov pre NASA. Behom troch rokov po r. 1965, rozpočet NASA klesol o 20%. Znechutený Webb podal demisiu osobne do rúk prezidenta Johnsona (16. septembra 1968). Johnson, predtým silný Kennedyho spojenec, zmenil názor na lety do kozmu. Na vine zmien v postoji ku kozmu bola zmenená politická situácia: bezvýchodná vojna vo Vietname a sociálny nepokoj doma. Historici sa zhodujú aj v tom, že dve osobnosti, John F. Kennedy a James E. Webb, sa viac ako ktokoľvek iný zaslúžili o pristátia astronautov na Mesiaci. Obaja zastávali to isté stanovisko: k trvalej bezpečnosti a prosperite Spojené štáty potrebovali trvalú prítomnosť v kozme. Nepotrebovali prechavé víťazstvá v konfliktoch s rovnako prechavými protivníkmi. NASA, v spolupráci so zahraničnými partnermi, si uctila pamiatku vizionára Webba teleskopom nesúcim jeho meno, James Webb Space Telescope. ESA (European Space Agency) raketa Ariane 5 vyniesla teleskop na obežnú dráhu okolo Zeme (25. decembra 2021).

Hoci aj za zhoršujúcich sa podmienok, práca na dosiahnutí Mesiaca pokračovala tempom vyrazajúcim dych. Tri mesiace po Webbovej demisii a štyri dni pred Vianocami 1968, NASA použila práve dokončený raketový agregát Saturn 5 a vypustila loď Apollo 8, s trojčlennou posádkou na palube, smerom k Mesiacu. Zámer bol vykonať desať obehov vo vzdialenosti medzi 100 a 110 km od povrchu Mesiaca a vrátiť sa na Zem. Alan Shepard označil misiu Apollo 8 za najriskynejšiu možnú (“the greatest gamble in the space flight then, and since”). Všetky systémy fungovali ako mali, risk vyšiel. A tak šťastní astronauti – Frank Borman (veliteľ), William A. Anders, James A. Lovell – sa stali prvými ľuďmi, ktorí dostali príležitosť vidieť Mesiac zblízka. Dojmy? Anders: „Mesiac nie je nič iné, ako pustatina. Úplná prázdnota.” (“The Moon is nothing but a waste. Completely void.”) Lovell: „Nesmierna osamelosť Mesiaca vyvoláva úžas.” (“The vast loneliness of the Moon up here is awe-inspiring.”) Borman: „Mesiac je obrovská, osamelá, hrôzu naháňajúca domovina

ničoho. Určite nie lákavé miesto pre život alebo prácu. Mesiac dáva podnet uvedomiť si, čo máme na Zemi. Pohľad na Zem odtiaľ poskytuje ohromnú úľavu.” (“The Moon is a vast, lonely, forbidding expanse of nothing. It certainly would not appear to be a very inviting place to live or work. It makes you to realize what you have back there on Earth. The Earth from here is a grand relief.”) Anders sekundoval: “Prišli sme takto ďaleko, aby sme poznali Mesiac a najdôležitejšie, čoho sme dosiahli, že sme objavili Zem.” (“We came all this way to explore the Moon and the most important thing is we discovered Earth.”)



Obr.2: *Východ Zeme nad Mesiacom. (Apollo 8, 1968) [NASA]*

Na Štedrý večer (houstonského času) posádka držala vlastnú bohoslužbu a vyslala ju do celého sveta. Odhaduje sa, že prenos sledovalo 500 miliónov divákov. (V roku 1968 Zem mala približne 3,6 miliardy obyvateľov.) Anders otvoril obrad. “Posádka Apollo 8 posielala odkaz všetkým obyvateľom Zeme.” (“For all the people on Earth, the crew of Apollo Eight has a message we would like to send you.”) Pokračoval čítaním verša 1:1 z Knihy Genézy. „Na počiatku, Boh stvoril nebo a Zem. Zem bola beztvárá a prázdna ...” (“In the beginning, God created the heaven and the Earth. Earth was formless and empty ...”) Členovia posádky sa vystriedali v čítaní ďalších deviatich veršov. Kým astronauti čítali, televízna kamera snímala obrazy dezolácie pod letiacou loďou. Borman ukončil obrad želaním a požehnaním: “And from the crew of Apollo Eight, we close with good night, good luck, a Merry



Obr.3: *Východ Zeme nad Mesiacom. (GRAIL, 2012) [NASA/Caltech-JPL/MIT]*

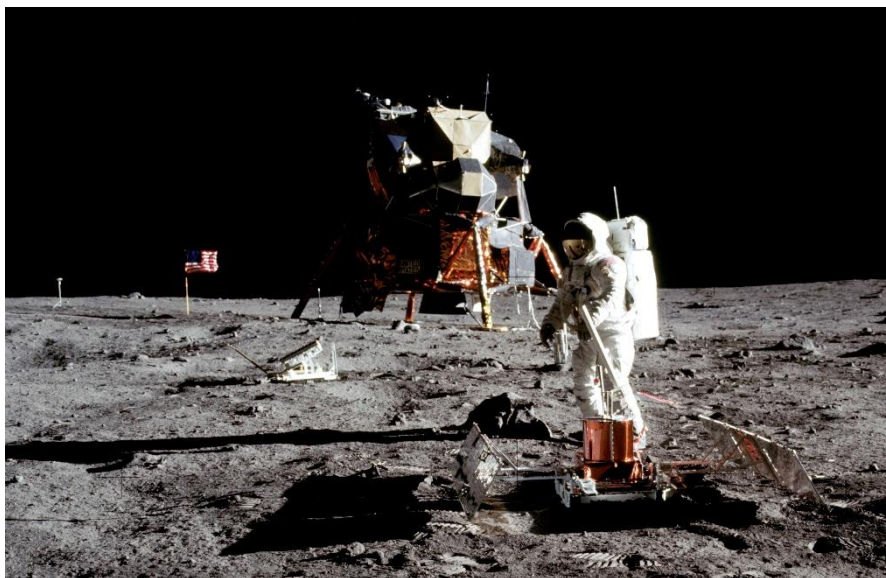
snímku volia za symbol svojho úsilia. Snímka bola takto použitá pri oslavách prvého Dňa Zeme (Earth Day), 22. apríla 1970. Výnimočnosť snímky môžeme oceniť porovnaním so štandardnými snímkami východu Zeme nad Mesiacom, zhotovenými robotickými sondami. (Obr. 3)

Po lete Apollo 8 nasledovali dva úspešné, ale menej nápadné skúšobné lety – Apollo 9 s posádkou, okolo Zeme (štart 3. marca 1969), a Apollo 10, bez posádky, k Mesiacu (štart 18. mája 1969). Po nich prišiel rad na Apollo 11 a cestu na Mesiac naostro. Sedem tisíc pozvaných hostí sa ráno 16. júla 1969 tiesnilo na improvizovaných tribúnach opodiaľ odpaľovacej veže 39A na NASA Kennedyho kozmickom streisku (Kennedy Space Center, KSC) na Floride. Verejné osobnosti a celebrity prišli, aby boli svedkami totálne nebývanej historickej udalosti. Výrečnou charakterizáciou okolností sprevádzajúcich Program Apollo bol fakt, že polovica členov Kongresu a guvernérov amerických štátov pozvanie odmietla. Kritiky a protesty neovplyvnili vykonanie plánovaných akcií. Apollo 11 posádka – Neil A. Armstrong (veliteľ), Edwin E. Aldrin, Michael Collins – nastúpila do modulov pripevnených k špici vozidla Saturn 5. Odpočítavanie do štartu (countdown) prebehlo hladko. O 9:32 (floridského času) motory prvého stupňa agregátu Saturn 5 zapálili. Ligoťajúce sa vesmírna loď

Christmas, and God bless all of you – all of you on the good Earth.” Čítanie zo Starého zákona sa prihodilo z vlastnej iniciatívy členov posádky Apollo 8. Splnilo účel, zabodovalo v súťaži Zimnej vojny. Ukázalo, že na rozdiel od prísne kontrolovaných sovietskych kozmonautov, NASA astronauti si mohli dovoliť verejne vyrieť slová pokladané za závadné, alebo priečiacie sa prijatým zvyklostiam. [3]

Ručne držaným fotoaparátom a cez okienko modulu pre posádku (Command Module, CM), Anders zhotovil niekoľko pamätných snímok. Najčastejšie reprodukováaná je snímka východu Zeme nad Mesiacom. Zobrazuje žiarivú modro-bielu Zem, vynárajúcu sa nad horizont tvorený pustou krajinou Mesiaca. (Obr. 2) Mesiac nemá citeľnú atmosféru, preto sa obloha javí tmavá, čierna, aj uprostred lunárneho dňa. Hnutia venujúce sa ochrane životného prostredia na Zemi si Andersovu

vzniesla a vydala sa na cestu. O štyri dni neskôr, 20. júla 1969, o 16:18, Armstrongom pilotovaný Mesačný modul (Lunar Module, LM) pristál na Mare Tranquillitatis (More pokoja). Armstrong a Aldrin si dopriali krátky odpočinok. Potom otvorili dvierka na LM a spustili rebrík. Armstrong zostúpil na povrch Mesiaca a vyriekol nesmrteľné slová. „Malý krôčik pre jednotlivca, obrovský skok pre ľudstvo.” (“That’s one small step for man, one giant leap for mankind.”) V priebehu dvojhodinovej prechádzky v najbližšom okolí LM, Armstrong a Aldrin nazbierali 21,7 kg vzoriek hornín. (Obr. 4)



Obr.4: Apollo 11 astronaut Neil A. Armstrong zbiera vzorky hornín na Mesiaci. (Apollo 11, 1969)
[NASA]

Po návrate na Zem, astronauti podstúpili 21 dní striktnej karantény v Johnsonovom kozmickom stredisku (Johnson Space Center, JSC) v Houstone. Vzorky boli držané v karanténe 50 dní. Analýzy karanténovaných vzoriek neukázali žiadne stopy biologickej činnosti na Mesiaci. S biologickými karanténami sa prestalo po misii Apollo 14. Aby sa zabránilo okysličeniu, vzorky sú držané v chemickej karanténe – v komore naplnenej dusíkom. Misia Apollo 17 (pristátie 11. decembra 1972) vedecky zavážila najviac. Posádka – Eugene A. Cernan (Čerňan) (veliteľ), Harrison H. Schmitt, Ronald E. Evans – po prvý raz zahrňovala astronauta-geológa. Pocta patrila Schmittovi. Apollo 17 LM pristál v údolí Taurus-Littrow, na úpätí Apeninského pohoria, oblasti Mesiaca, o ktorej sa myslelo, že je posiatá sopečným popolom. Tri terénne exkurzie zabrali Čerňanovi a Schmittovi 21 hodín. Astronauti mali k dispozícii elektrické vozidlo (lunar rover), precestovali ním 35 km. Zhotovili 2.200

snímok geologických formácií, a nazbierali najviac vzoriek (101 kg). Strávili na Mesiaci 75 hodín. Pre cestu domov, na Zem, Čerňan nastúpil do LM po Schmittovi. Ostáva doteraz posledný medzi astronautmi, ktorí zanechali šľapaje na Mesiaci.

Pristátia Apollo astronautov boli prevratné udalosti. Pohotový von Braun ich prirovnal k okamžiku v evolúcii, kedy sa morská biota po prvý raz vyplazila na suchú zem. Zveličoval? História posúdi. Akonáhle *Program Apollo* dosiahol svojho politického cieľa, triumfu nad Sovietmi, nebolo viac dôvodov v ľudských letoch na Mesiak pokračovať – riskovať životy a utrácať peniaze. To hovorila prevládajúca verejná mienka v Spojených štátoch a to hovoril Kongres. Prezident Richard M. Nixon (vítaz volieb v roku 1968) ukončil *Program Apollo* a nariadil NASA, aby sa v ľudských letoch zamerala na blízke okolie Zeme. Nixonove rozhodnutie nám vzalo k letu pripravené misie Apollo 18, Apollo 19, Apollo 20. Dalo nám raketoplán (Space Shuttle) a striedajúcimi sa smenami astronautov obývanú stanicu v obehu okolo Zeme (International Space Station). K vzdialenejším destináciám pokračovali len menej nákladné a bezrizikové robotické lety. Torzá nepoužitých rakiet Saturn 5 dnes slúžia ako parkové ozdoby pred JSC, KSC a MSFC (Marshall Space Flight Center, Huntsville). [4]

Sovieti sa s Mesiacom rozlúčili robotickými sondami, z ktorých tri stoja za zmienku. Mätko pristáli na Mesiaci, zavrtali do pôdy-regolitu, získali stĺpce hornín a hermeticky utesnené stĺpce odoslali na Zem. Boli prvé, ktoré takýto technicky náročný kúsok vykonali. *Luna 16* pristála (20. septembra 1970) na Mare Fecunditatis (More plodnosti). Stĺpec 30 cm vysoký, dominantný nerast bazalt. *Luna 20* pristála (21. februára 1972) v Apollonius pahorkatine. Stĺpec 25 cm vysoký, dominantný nerast anortozit. Materiál tvrdší, ako bazalt *Luna 16*. Vzorky *Luna 16* a *Luna 20* obsahovali aj na prach rozdrvené železo. *Luna 24* pristála (18. augusta 1976) na Mare Crisium (More kríz). Stĺpec 2 m vysoký, dominantný nerast bazalt. Vysoký stĺpec odhalil vrstvenie v náplni Mare Crisium. Vrstvenie upozornilo na opakujúce sa epizódy lávových záplav. Geologická história Mesiaca je zrejme zložitejšia, ako sa predpokladalo.

Rozbor vzoriek hornín *Apollo* a *Luna* ukázal, že Mesiak je približne toho istého veku ako je Zem (~4,6 miliárd rokov), a že má podobné, ale nie identické chemické zloženie. Na samom začiatku svojej existencie Mesiak bol úplne, alebo takmer úplne roztavený. Po vychladnutí časti najbližšej k povrchu a po vytvorení pevnej kôry (pred ~4,3 miliardami rokov) neprestajné bombardovanie masívnymi telesami (asteroidmi, kométami, meteoritmi) začalo zanechávať viditeľné stopy – rozdrvený povrch a všadeprítomné krátery. Záverečná kataklizmatická séria veľkých zásahov (pred ~3,9 miliardami rokov) vytvorila na privrátenej strane najmladšie kruhové kotliny. V priebehu nasledujúcich ~800 miliónov rokov nízko ležiace oblasti a dná nárazmi vykopaných kotlín sa naplnili tmavou bazaltovou lávou. Praskania kôry a toky lávy prestali s pokračujúcim chladením jadra a plášťa (vrstvy medzi jadrom a

kôrou). Láva na tzv. moriach (maria) tvorí zhruba 15% povrchu Mesiaca. Zásahy kamennými zbytkami po formovaní planét neustali. Výsledkom sú na sebe, jeden na druhom, ponakladané krátery širokého rozsahu veku a veľkostí. Základnou charakteristikou situácie na povrchu Mesiaca je neprestajný „dážď“ mikrometeoritov a kozmického prachu. Celý povrch je súvisle posypaný prachom. (Obr. 5)

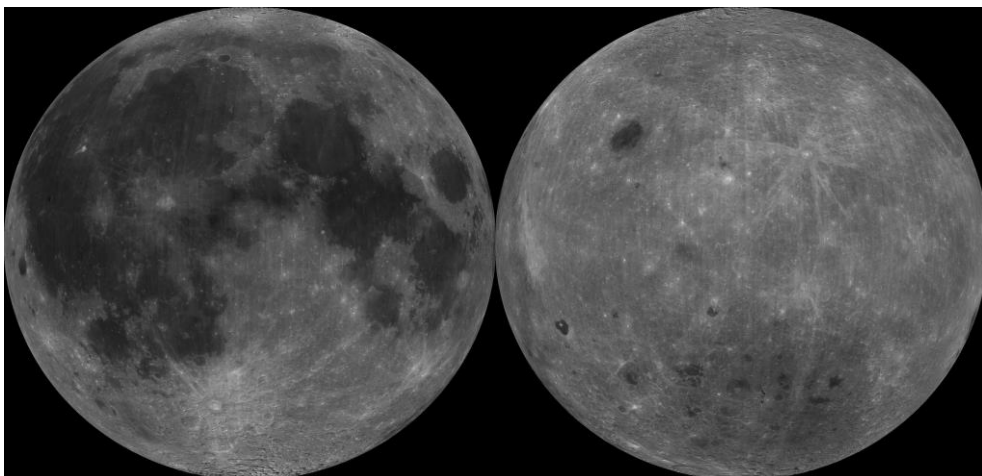
Pod vrstvou prachu leží regolit – vrstva rozdrveného skalného podložia (rhegos prikrývka, lithos skala). Priemerná hrúbka vrstiev regolitu sa odhaduje na 4-5 m na moriach a 10 m na pevninách. [5] Keďže Mesiac nemá atmosféru a magnetické pole, prach a regolit obsahujú aj častice slnečného vetra (solar wind), riedkej plazmy neprestajne vymršťovanej Slnkom. Mesiac nepozná počasie. Povrch Mesiaca sa vyznačuje extrémnymi teplotami. Citujem jeden odhad. Priemerná denná teplota v oblasti rovníka: 107 °C; priemerná nočná teplota v tej istej oblasti: -153 °C. [6] Nehľadiac na autora odhadu, rozdiely medzi dennými a nočnými teplotami dosahujú závažných 250 °C a viac. Hovoríme o teplotách „pôdy pod nohami,“ nie o teplote atmosféry, ako to robíme na Zemi. Deň na Mesiaci, t.j., čas, ktorý Mesiacu zaberie raz sa otočiť okolo rotačnej osi, trvá 29,53 pozemských dní. Poludnie a polnoc sú od seba oddelené niečo viac ako dvoma týždňami. Za najvýznamnejší objav misií Apollo je treba pokladať uvedenie si role kolízií pre vznik a evolúciu planét slnečnej sústavy, vrátane Zeme. Idea považovaná za otázku ešte nie dlho pred érou kozmických letov sa posunula do stredu súčasnej planetárnej geológie a teórií vzniku a vývoja planetárnych telies.

Návrat astronautov na Mesiac s úmyslom dlhodobého pobytu bude vyžadovať spoliehanie sa na miestne zdroje energie a surovín. Energiu poskytne Slnko, prostredníctvom vhodne umiestnených slnečných článkov. Očividne, astronauti budú potrebovať vodu a kyslík. Vodu a kyslík potrebujú aj raketové motory. Elektrolyza vody dáva palivo (vodík) a okysličovadlo (kyslík). Oba plyny sa používajú v tekutom stave. Prvé raketové zbrane, vyvinuté čínskymi alchymistami v jedenástom storočí, používali tuhé palivo, pušný prach. (Paradoxne, pušný prach vyvinuli v priebehu hľadania elixíru predlžujúceho ľudský život.) Ruský fyzik-samouk Konštantín E. Ciolkovskij vo svojich publikáciách (po r. 1902) poukázal na nemožnosť ovládania raketových motorov spaľujúcich tuhé palivá. Raz zapálené, tuhé palivo horí, kým



Obr.5: Prach na povrchu Mesiaca: šľapaj Apollo 11 astronauta Edwina E. Aldrina. (Apollo 11, 1969) [NASA]

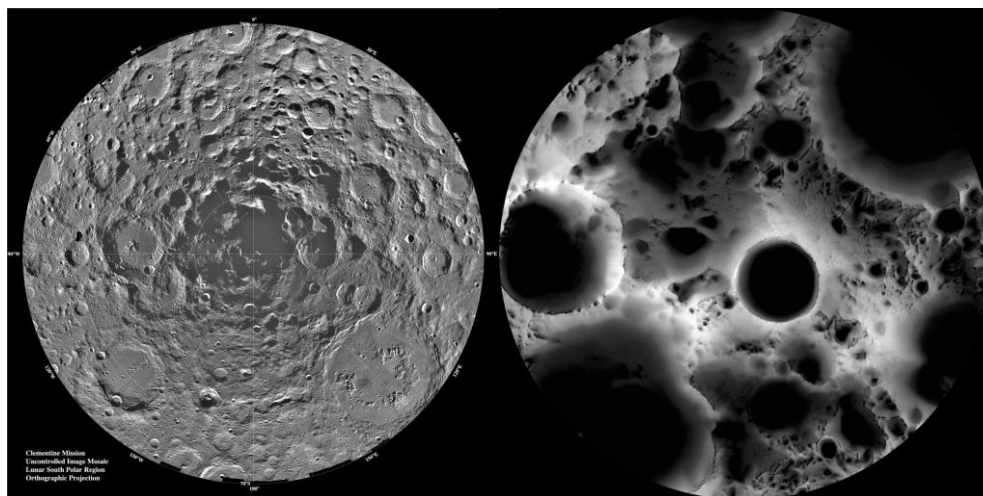
nezhorí. Miesto tuhých palív Ciolkovskij navrhol používať petrolej (kerozín), alebo tekutý vodík. Ciolkovskij bol aj pôvodcom myšlienky viacstupňových rakiet. V Európe a v Spojených štátoch o Ciolkovskom nevedeli. Jeho uzávery dosiahli nezávisle, o generáciu neskôr. Wernher von Braun mal na tom významný podiel. Súčasné raketové nosné vozidlá sú bez výnimky viacstupňové. Prvé tri stupne agregátu Explorer spaľovali zvlášť upravený kerozín a tekutý kyslík; štvrtý stupeň spaľoval tuhé palivo (zloženie nebolo zverejnené). Prvý stupeň agregátu Saturn 5 spaľoval kerozín, vyššie dva stupne spaľovali tekutý vodík. Všetky stupne používali tekutý kyslík. Kombinácia tekutého vodíka a tekutého kyslíka je najúčinnnejšia raketová pohonná hmota. Je treba zdôrazniť: Miestne zdroje energie a vody predstavujú nutnú podmienku pre dlhodobý pobyt človeka na Mesiaci a pre používanie Mesiaca vo funkcii základne k letom na Mars a ďalej do kozmu. Druhá nutná podmienka je nižšia úniková rýchlosť v porovnaní s únikovou rýchlosťou zo Zeme. Následkom nižšej hmotnosti, Mesiac má podstatne nižšiu únikovú rýchlosť (2,38 km/s oproti 11,19 km/s pre Zem). Raketové pohony stoja pred revolučnou zmenou. NASA, v spolupráci s firmou Howe Industries, vyvíja nový koncept – plazmový raketový motor (Pulsed Plasma Rocket, PPR). V porovnaní s klasickými raketovými motormi, PPR motory budú mať podstatne nižšiu váhu a vyšší ťah. Pohonný moment bude poskytovať plazma produkovaná štepým jadrovým reaktorom. [7] Ak sa očakávania splnia a PPR motor sa podarí vyvinúť, viacstupňové rakety poháňané tekutými palivami stratia hodne na význame. Nízka úniková rýchlosť tiež stratí na význame. Mesiac prestane byť nutnou, alebou takmer nutnou medzistanicou pre lety na Mars a ďalej.



Obr.6: Fotomozaika privrátenej strany Mesiaca.
(Clementine, 1994)
[DoD/NASA/Caltech-JPL/USGS]

Obr.7: Fotomozaika odvrátenej strany Mesiaca.
(Clementine, 1994) [DoD/NASA/Caltech-
JPL/USGS] [DoD/NASA/Caltech-JPL/USGS]

Dlhú prestávku v letoch k Mesiacu Spojené štáty prerušili projektom *Clementine*, spoločným podujatím Ministerstva národnej obrany (Department of Defense, DoD) a NASA. Vojaci potrebovali testovať nové mapovacie a navigačné techniky. NASA ponúkla príhodný terč – Mesiac. [8] (Projekt dostal meno po dievčine z piesne “My Dear Clementine,” spadajúcej do obdobia kalifornskej zlatej horúčky, 1848-1855). Sonda *Clementine* (vypustená 25. januára 1994) niesla štyri kamery, laserový výškomer (altimeter) a dopplerovský gravimeter. V prevádzke 73 dní (330 obehov), sonda snala dva milióny záberov, s lineárnym rozlíšením až 15 m. Poskytla prvé kompletne zobrazenie globálnej topografie Mesiaca a prvú kompletnú mapu gravitačného poľa. Predstavu o fotografickej žatve *Clementine* dávajú fotomozaiky privrátenej a odvrátenej strany Mesiaca, každá mozaika pozostávajúca z 15.000 záberov. (Obr. 6, 7) V oblasti južného pólu *Clementine* mapovanie identifikovalo doteraz najväčšiu známu nárazovú kotlinu v celej slnečnej sústave, South Pole – Aitken Basin (priemer 2500 km, hĺbka 12 km; meno po americkom astronómovi R. G. Aitkenovi). Vizualne, kotlina je sotva rozoznateľná od okolitého terénu. Kolízia, ktorá kotlinu vytvorila sa prihodila pred najmenej 4 miliardami rokov. Neskoršie kolízie a nárazy zničili pôvodný okraj kotliny vytvorený rozlámanými a zdvihnutými blokmi lunárnej kôry. (Obr. 8)



Obr.8: Fotomozaika južnej polárnej oblasti Mesiaca. (*Clementine*, 1994)
[DoD/NASA/Caltech-JPL/USGS]

Obr.9: Fotomozaika južnej polárnej oblasti Mesiaca. Kráter Shackleton je uprostred mozaiky. Pól je na ľavom okraji krátera. (LRO, 2009)
[NASA/GSFC/Arizona State University]

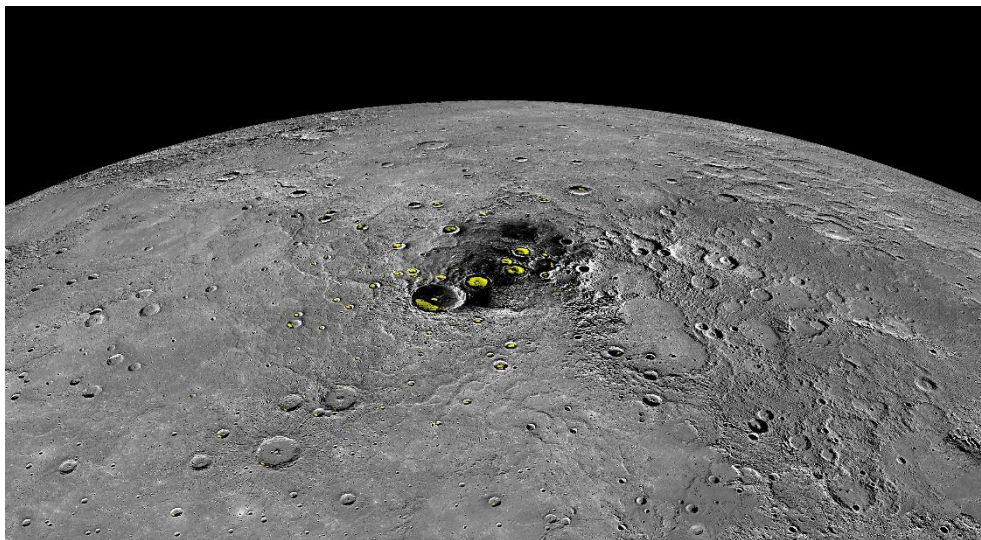
Možno najdôležitejším experimentom *Clementine* sa ukázal byť improvizovaný bistatický radar. (Krátke vysvetlenie: bistatický radar má vysielač a prijímač od seba

oddelené, každý používa svoju vlastnú anténu. Monostatický radar je štandardný radar, ako ho poznáme. Vysielač a prijímač sú spolu a používajú spoločnú anténu.) Bistatický radarový experiment *Clementine*: komunikačná vysielačka na palube sondy vyslala signály (2,27 GHz, 6 W) cielené na terče v polárnych oblastiach Mesiaca. Správne volená geometria triády vysielač-terč-prijímač umožnila, aby odrazené signály prijali 70-metrové antény NASA Kozmickej rádiovej siete (Deep Space Network, DSN) v Austrálii, Španielsku, Kalifornii. V niekoľkých prípadoch odrazené signály boli silnejšie, ako odrazy od nekonsolidovanej, drsnej horniny. Účastníci projektu *Clementine* vyslovili domnienku, že zdrojom silnejších odrazených signálov mohli byť vodným ľadom potiahnuté dna kráterov. [9] Výrazný príklad poskytol kráter Shackleton (priemer 21 km, hĺbka 4 km; meno po britskom polárnom bádateľovi E. H. Shackletonovi), ležiaci priamo na južnom póle. (Obr. 9)

Ložiská ľadu na južnom póle suchého, vyprahnutého Mesiaca? Kde sa vzali? Vysvetlenie je prosté. Rotačná os Mesiaca je odklonená o $1,54^\circ$ od kolmice k ekliptickej rovine – rovine tvorenej obežnou dráhou Zeme okolo Slnka. Malý odklon rotačnej osi znamená, že v polárnych oblastiach Mesiaca Slnko je za dňa len na obzore, nie vyššie. Nízko položené terénne segmenty sú ponorené do permanentnej tmy a chladu. Teplota tých segmentov pravdepodobne neprevyšuje -230°C . [10] Kométy spravidla obsahujú silikátové skaly a vodný ľad. Keď kométy zasiahnu polárnu oblasť Mesiaca, molekuly ľadu padnú do teplotných pascí a v nich zotrávajú. Odhady celkového objemu ľadu akumulovaného na Mesiaci sa rôznia od desiatok miliónov m^3 po stovky miliónov m^3 . V polárnych oblastiach Mesiaca sa nachádzajú aj terénne segmenty vyčnievajúce nad miestny obzor. Vďaka zvýšenej elevácii, väčšinu času sú osvetlené Slnkom. Majú pomerne stále teploty, -30°C až -50°C . Sú vhodné pre umiestnenie slnečných článkov. Vzájomná blízkosť vody a potenciálnych zdrojov elektrickej energie činí z vyvýšených polárnych terénnych segmentov možné lokácie pre ľudské základne na Mesiaci. Mesiace nemá hydrologický cyklus. Musí byť zrejmé, že miestne zdroje ľadu, ak sa ich podarí sprístupniť, nebudú nevyčerpatel'né.

Bistatický radarový experiment *Clementine* je treba vložiť do patričných súvislostí. Ešte pred letom sondy *Clementine* k Mesiacu, vedeckí pracovníci z JPL a viacerých amerických univerzít vykonali dva pozoruhodné bistatické radarové experimenty. Terčom oboch bol Merkúr. Vo funkcii vysielača oba experimenty použili kalifornskú Goldstone DSN 70-metrovú anténu. Jeden experiment pozostával z vyslania signálov (8,51 GHz, 460 kW) na Merkúr a prijatia odrazených signálov rádioteleskopickým systémom VLA (Very Large Array) v Socorro (New Mexico). VLA systém sa skladá z 26 antén, každá o priemere 25 m. V druhom experimente, Goldstone, signály (2,40 GHz, 420 kW) odrazené Merkúrom prijala 300-metrová rádioteleskopická anténa v Arecibo (Puerto Rico). V oboch experimentoch odrazené signály prichádzajúce z niektorých miest v severnej polárnej oblasti Merkúra boli výrazne silnejšie, ako signály od ostatných častí planéty. Podobali sa Goldstone

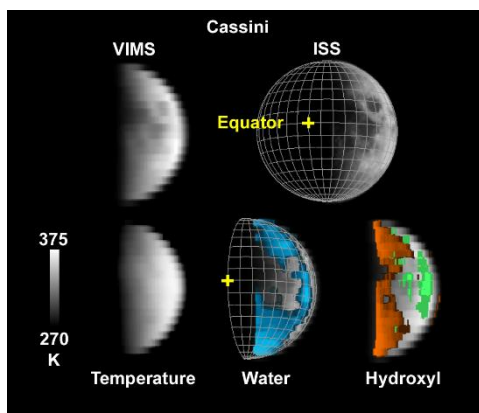
monostatickým odrazom od ľadom pokrytých pólov Marsu a od ľadových mesiacov planéty Jupiter (Callisto, Európa, Ganyméd). Viedli k uzáveru, že na severnom póle Merkúra sa nachádzajú krátery obsahujúce ľad. [11] (Obr. 10)



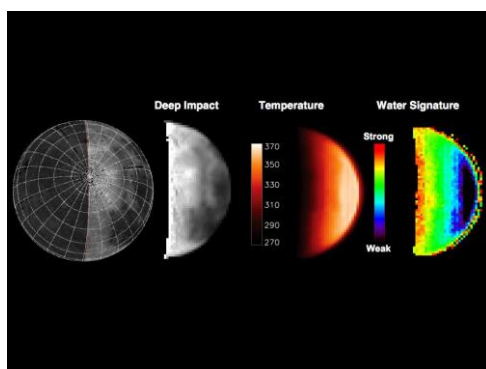
Obr.10: Panoráma severnej polárnej oblasti planéty Merkúr. Lokácie vodného ľadu, zistené bistatickými radarovými experimentmi, sú označené žltou farbou. (MESSENGER, 2004)
[NASA/Johns Hopkins University/Carnegie Institution]

Vzdialenosť medzi Slnkom a Merkúrom sa rovná tretine vzdialenosti medzi Slnkom a Zemou; v priemere 58 miliónov km vs. 150 miliónov km. Rotačná os Merkúra je takmer kolmá k rovine obežnej dráhy okolo Slnka. Geometria slnečného osvetlenia Merkúra je analogická geometrii osvetlenia Mesiaca. Merkúr nemá atmosféru. Má len extrémne riedku, tenkú a nestálu vrstvu atómov uvoľnených z povrchu nepretržitým prúdom častíc slnečného vetra a príležitostnými nárazmi meteoritov. Modely tepelného režimu na povrchu Merkúra hovoria, že teplota osvetlených častí planéty dosahuje 400 °C. Teplota v permanentne tienených polárnych oblastiach sa pohybuje okolo –125 °C. [12] Ak sa vodný ľad nájde v tienených častiach Merkúra, planéte najbližšej k Slnku, nemalo by prekvapovať, že sa nájde aj v tienených častiach Mesiaca.

Radarové experimenty, monostatické alebo bistatické, prinášajú nepriame dôkazy o existencii vodného ľadu na planétach a mesiacoch. Nepriame dôkazy, trebárs presvedčivé a oslavované, nepostačujú. Pomerne hladká bazaltická láva, tvoriaca povrch „morí“ na privrátenej strane Mesiaca, odráža radarové signály takmer ako ľad – znateľne silnejšie, ako drsné silikátové horniny. Sú rozdiely v polarizácii odrazených signálov, ale tie nebývajú dostatočne výrazné. Aby sme sa o vodnom ľade na



Obr.11: Voda a hydroxyl na Mesiaci. Pozorovania vykonané počas obletu Mesiaca sondou Cassini-Huygens, (Cassini, 1997)
[NASA/Caltech-JPL/USGS]



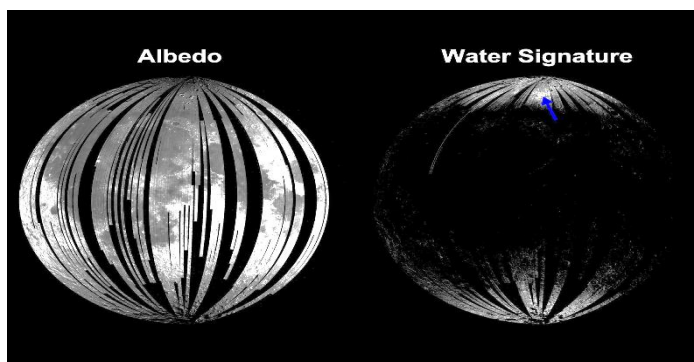
Obr.12: Vodný ľad v severnej polárnej oblasti Mesiaca. (Deep Impact, 2005)
[NASA/Caltech-JPL/University of Maryland]

Mesiaci mohli vysloviť s konečnou platnosťou, potrebujeme dôkazy priame, jednoznačné, nezávislé na interpretácii nejednoznačných meraní. Robotické misie, ktoré po misii *Clementine* nasledovali, potrebné priame dôkazy ponúkli. Misia *Lunar Prospector* mala za cieľ kompletne zmapovať chemické zloženie najvyššej vrstvy povrchu Mesiaca. Sonda (vypustená 7. januára 1998) niesla neutrónový spektrometer. Spektrometer zaznamenal prítomnosť atómov vodíka na povrchu, alebo tesne pri povrchu oboch polárnych oblastí Mesiaca. Objav vodíka misiou *Lunar Prospector* vedenie NASA prijalo za prvý priamy dôkaz existencie vodného ľadu na Mesiaci. [13] Misii *Clementine* dali meno pripomínajúce zlato. Ako sa ukázalo, misia *Lunar Prospector* dostala meno ešte príľahavejšie. Slovo „prospector” znamená „hľadač zlata, zlatokop. “Voda na Mesiaci! Voda nad zlato!”

Priamych meraní prítomnosti vodného ľadu na Mesiaci bolo viac. NASA vystrelila sondu Cassini-Huygens (15. októbra 1997) s cieľom letieť k planéte Saturn. Saturn je takmer desaťkrát ďalej od Slnka ako je Zem. Za podmienok optimálnej spotreby paliva let na Saturn by

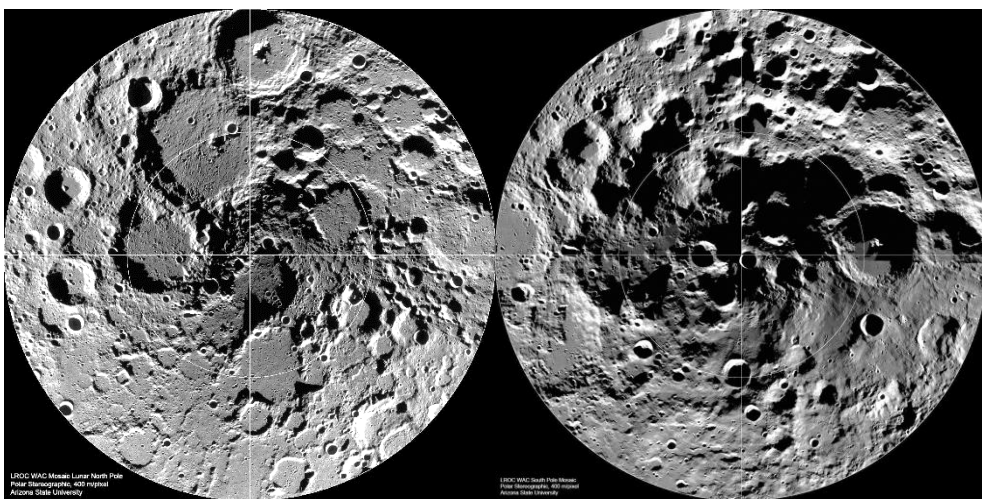
trval približne 40 rokov. Príhodná konfigurácia planét (Zeme, Venuše, Jupitera) dovoľila použiť gravitačný katapult a skrátiť trvanie letu na 7 rokov. Katapult vyžadoval, aby sa sonda Cassini-Huygens vydala na cestu smerom k Venuši, presne opačne od smeru k Saturnu. Po druhom tesnom oblete Venuše (24. júna 1999) sonda obletela Zem a Mesiac (18. augusta 1999) a pokračovala na Saturn. Oblet Mesiaca vedenie projektu Cassini-Huygens využilo ku kalibrácii niektorých prístrojov vo vybavení sondy. Infračervený spektrometer (Visual and Infrared Mapping Spectrometer, VIMS) ukázal, že molekuly vody a hydroxylu (OH) sú na Mesiaci prítomné na všetkých zemepisných šírkach, aj v oblastiach vystavených slnečnému žiareniu. (Obr. 11)

NASA sonda *Deep Impact* (vystrelená 12. januára 2005) mala za úlohu preskúmať zloženie a štruktúru kométy *Tempel 1*. Niesla ďalšiu sondu, ktorú spustila do dráhy kométy. Náraz (impact) nastal 4. júla 2005. Dvoma kamerami a infračerveným spektrometrom nosná sonda zaznamenala následky nárazu. Odhaduje sa, že kométa nárazom stratila $\sim 250.000 \text{ m}^3$ ľadu. Značný objem ľadu uvoľnený vcelku bezvýznamným nárazom posilnil vierohodnosť domnienok o kometárnom pôvode ľadových usadenín v polárnych oblastiach Mesiaca. V predĺženej misii, pri prelete nad Mesiacom (9. júna 2009), sonda *Deep Impact* našla ľad v oblasti severného pólu. [14] (Obr. 12) Pre štvrtý príklad ideme do Indie. Indická organizácia pre kozmický výskum (Indian Space Research Organization, ISRO) vypustila (22. októbra 2008) sondu *Chandrayaan 1*, prvého indického posla smerom k Mesiacu. (V jazyku sanskrit slovo „chandrayaan” znamená „koráb na Mesiac.”) Sonda obliekala Mesiac v polárnych kruhových dráhach, 100 km nad povrchom. *Chandrayaan 1* misiu NASA podporila dvoma prístrojmi: miniatúrnym radarom (Miniature Synthetic Aperture Radar, Mini-SAR) a infračerveným spektrometrom (Moon Mineralogical Mapper, M3). V polárnych oblastiach radar identifikoval cez 40 kráterov s odrazmi signálov charakteristickými pre ľad. Merania infračerveným spektrometrom potvrdili, že molekuly vody a hydroxylu sa v polárnych oblastiach skutočne nachádzajú. [15] (Obr. 13) Piaty príklad. Infračervený teleskop NASA *SOFIA* (Stratospheric Observatory For Infrared Astronomy), inštalovaný na lietadle Boeing 747SP, pozoroval v priebehu rokov 2020–2022 niekoľko razy Mesiac z výšky 12 km nad Zemou. Zvolená výška zaručovala, že 99% pozemskej atmosférickej vlhkosti ostávalo pod dráhou teleskopu. Merania absorpcie slnečného žiarenia na vlnovej dĺžke $6 \mu\text{m}$ naznačili prítomnosť molekúl vody separátne od molekúl hydroxylu v plnom rozsahu zemepisných šíriek. Opakované zistenie: Molekuly vody sú prítomné bez ohľadu na tieň alebo osvetlenie, bez ohľadu na geologické útvary. [16]



Obr.13: Vodný ľad na privrátenej strane Mesiaca. Modrá šípka označuje polohu krátera Goldschmidt (priemer 113 km, hĺbka 2 km). Kráter má pravdepodobne najvyšší obsah ľadu v severnej polárnej oblasti. (*Chandrayaan 1*, 2008) [ISRO/NASA/Caltech-JPL/Brown University]

Plánovanie návratu astronautov na Mesiac s úmyslom využívania miestnych zdrojov energie a surovín vyžaduje povrch telesa čo najdôkladnejšie poznať a zmapovať. Apollo pristávacie miesta boli vybraté na základe informácií poskytnutých sondami Ranger (narazili do Mesiaca), Surveyor (pristáli mätko), Lunar Orbiter (krúžili a fotografovali). Úhrnne, medzi rokmi 1962 a 1968 k Mesiacu letelo deväť NASA mapovacích sond. Vyprodukovali fotografickú mapu 99% povrchu prirátenej strany, s lineárnym rozlíšením 60 m. V kruhoch planetárnych geológov boli vyslovené obavy, že Apollo moduly by sa mohli preboriť do predpokladanej vrstvy prachu pokrývajúcej Mesiac. Sonda Surveyor overili mechanickú nosnosť regolitu a preukázali zbytočnosť obáv. O ľade v blízkosti pólů a možno inde na Mesiaci sa nevedelo, preto Apollo pristávacie miesta padli do lokácií v pomerne bezpečnom, topograficky hladkom rovníkovom páse Mesiaca. Inak je tomu s budúcimi misiami, vrátane misí programu *Artemis*. Čaká ich pristávanie v hornatých, omnoho menej bezpečných polárnych oblastiach. Informácie získané mapovacími sondami programu *Apollo* a sondou *Clementine* nepostačujú. Sondou LRO (Lunar Reconnaissance Orbiter) NASA zahájila kampaň na zmapovanie Mesiaca s najvyššou presnosťou dosiahnuteľnou z obežnej dráhy. LRO nesie jednu širokouhlú kameru (Wide-Angle Camera, WAC) a dve úzkouhlé kamery (Narrow-Angle Camera, NAC). WAC snímky poskytli dokonalé synoptické obrazy povrchu Mesiaca. (Obr. 14, 15) NAC snímky, s lineárnym rozlíšením 0,5 m, dávajú príležitosť posúdiť kvalitu LRO pohľadu na Mesiac.



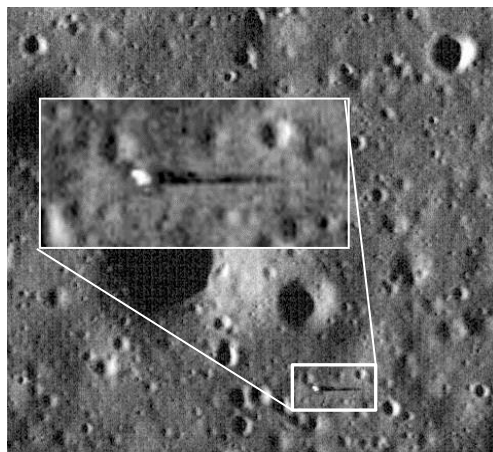
Obr.14: Fotomozaika severnej polárnej oblasti Mesiaca. (LRO, 2009)
[NASA/GSFC/Arizona State University]

Obr.15: Fotomozaika južnej polárnej oblasti Mesiaca. (LRO, 2009)
[NASA/GSFC/Arizona State University]

V NAC snímkach vieme nájsť tak malé objekty ako sú stojace sondy Surveyor a tieň nimi vrhané. Snímky tiež podávajú skutočný obraz Mesiaca – telesa „podobaného” krátermi a jamkami všetkých veľkostí, až na samotné hranice viditeľnosti. (Obr. 16) Sonda LRO (vypustená 18. júna 2009) mala pracovať dva roky. Po pätnástich rokoch neprerušenej prevádzky je stále funkčná.

O správnosti vedeckých dôvodov pre návrat na Mesiac niet pochybností. Dvojica Zem-Mesiac obieha Slnko ako jedna planéta. Poznanie geologickej histórie Mesiaca prispieva k rekonštrukcii histórie Zeme. Vzájomné nárazy kovovými a kamenistými objektmi v priebehu akrécií planét premieňali kinetickú energiu na energiu tepelnú. Teplo zapríčinilo roztavenie vznikajúcich telies. Roztavenie viedlo k vytvoreniu kovových jadier, zmiešaných polokovových plášťov a silikátových kôr. Vnútna diferenciácia jadroplášť-kôra je spoločným rysom všetkých terestriálnych (kamenistých) planét, aj Zeme a Mesiaca. Krátermi zjazvený povrch Mesiaca ponúka svedectvo o kolíznej fáze planetárnej evolúcie. Na Zemi, dynamický vývoj kôry (tektonika, orogenéza, vulkanizmus, erózia) vymazal stopy primárnych kolízií. Povrchy Venuše a Marsu taktiež stratili mnoho z pôvodného vzhľadu. Ak chceme vidieť Zem, ako vyzerala kedysi, musíme sa obťažovať na Mesiac (alebo na Merkúr). Súvislé makroskopické bombardovanie sa utišilo vyčerpaním masívnejších zbytkov po akréciách planét. Mikroskopické bombardovanie galaktickým prachom a časticami kozmického žiarenia a slnečného vetra pokračovalo a pokračuje naďalej. Regolit a prach Mesiaca sa dá pokladať za archív neprerušeneho prúdu mikročastíc udierajúcich povrch. Vzácný archív čaká na detailné rozlúštenie.

Vznik Mesiaca bol dlho záhadou. S rozvojom astrofyziky a geofyziky vynorilo sa viacero teórií. Spadali do troch kategórií. V jednej, Mesiac vznikol niekde ďaleko, blúdil priestorom, kým ho Zem neuchopila do svojho gravitačného poľa. V druhej, Mesiac rástol a narástol akréciou súbežne s akréciou Zeme, v susedstve Zeme a z toho istého materiálu ako Zem. V tretej, vnútorné pochody v už sformovanej proto-Zemi vyhodili materiál, z ktorého sa sformoval proto-Mesiac. [17] Dnes prijatá hypotéza gigantického nárazu (Giant Impact Hypothesis) tvorí štvrtú kategóriu. Hypotéza pripisuje vznik Mesiaca nárazu bludnej proto-planéty do proto-Zeme. Proto-planéta dostala meno Theia (po matke Selény, zosobnenia božskej Luny).



Obr.16: Tieň vrhaný sondou Surveyor 6, stojacou v rovníkovej oblasti Mesiaca. Dĺžka tieňa: 18 m. (LRO, 2009)

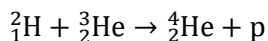
[NASA/GSFC/Arizona State University]

Náraz sa prihodil pred ~4,5 miliardami rokov. Theia vytrhla z proto-Zeme značné množstvo materiálu. Vytrhnutý materiál, spolu s materiálom z Thei, sa nerozptýlil, ale sa spojil do gule. Novovzniknutá guľa ostala v gravitačnom poli Zeme a spolu so Zemou obieha Slnko. [18] Celá Theia zrejme nebola zahrnutá do gule Mesiaca. Kde, teda, je? Nedávne merania rýchlosti šírenia seizmických vln vnútro Zeme naznačili, že rýchlosť je nižšia v dvoch rozsiahlych oblastiach (Large Low-Velocity Provinces, LLVP) na rozhraní jadra a plášťa. Plošný a objemový rozsah oboch je porovnateľný s rozsahom kontinentov na povrchu Zeme. Jedna LLVP leží ~3000 km pod Afrikou; druhá LLVP takisto hlboko pod Tichým Oceánom. Rýchlosť šírenia seizmických vln je nepriamo úmerná hustote prostredia. Cez kovy sa seizmické vlny šíria pomalšie, ako cez silikáty. Masívne provincie nižších seizmických rýchlostí v plášti Zeme normálnym geologickým vývojom vzniknúť asi nemohli. Multidisciplinárny výskumný projekt týkajúci sa štruktúry Zeme, započatý na Caltechu v roku 2019, prišiel s nečakaným výsledkom: Obe LLVP sú zbytkami Thei. Na železo a kovy bohaté jadro Thei sa nárazom rozpoťilo, obe polovice sa vkladli do plášťa Zeme. A tak, náraz Thei vytvoril nielen Mesiac, ale aj mohutnejšiu Zem. Vplyv nárazu na tektonický vývoj Zeme a na vznik a vývoj života na Zemi je predmetom pokračujúceho výskumu. [19]

Príbeh Thei potvrdzuje dávne konštatovanie: Znalosť geologickej histórie Mesiaca prispieva k hlbšiemu poznaniu geologickej histórie Zeme. Apollo 17 astronaut-geológ a profesor geológie na Wisconsinkej univerzite H. H. Schmitt si vo svojich argumentoch pre návrat na Mesiac abstraktnú geológiu nevšíma. Sústreďuje sa na energetickú situáciu na Zemi a na predpokladaný prínos Mesiaca k jej riešeniu. Schmitt kladie dôraz na ťažbu izotopu hélum 3 (He-3) na Mesiaci, a na fúzie tohoto izotopu ako zdroja tepelnej a elektrickej energie. [20] Fúzie, spojovania ľahkých, menej stabilných atómových jadier a tvorba ťažších, stabilných jadier, prebiehajú vnútri Slnka a hviezd. Príklad základnej fúzie:



Na Zemi, vodíková bomba je doteraz jediným „praktickým” použitím fúzie. Technické problémy sprevádzajúce spustenie fúzných reaktorov a ich udržanie v chode predbežne znemožnili naozajstné praktické použitie. Spoločným rysom fúzií zahŕňajúcich H-3 sú zhubné neutróny a rádioaktívny odpad. Schmitt upozorňuje na menej známe fúzie izotopu He-3. Príklad:



Spoločným rysom fúzií zahŕňajúcich He-3 sú neškodné protóny a pomerná rádioaktívna čistota. Prúd protónov, vedľajší produkt reakcií, môže slúžiť za prídavný zdroj elektrickej energie. Na Zemi, zemný plyn obsahuje He-3 v mizivom množstve,

sotva postačujúcom pre výskumné účely. Mesačný regolit obsahuje He-3, súčasť slnečného vetra, v prijateľnom množstve. Predpokladaná čistota He-3 fúzií a pomerhá hojnosť He-3 v regolite a prachu Mesiaca, to sú Schmittove karty. Priemyslová výroba elektrickej energie prostredníctvom He-3 fúzií, podľa Schmitta nevyhnutná k nášmu prežitiu, vyžaduje návrat na Mesiac. Taktiež vyžaduje nový, nesentimentálny prístup k Mesiacu. Komerčné záujmy sú nadovšetko iné! Schmitt sa obracia k súkromným podnikateľom a presviedča ich (a nás), že správne organizované, profitom motivované dolovanie izotopu ^3He na Mesiaci predstavuje jasnú cestu vpred. Ekonomická expanzia na Mesiac sa svojou podstatou nelíši od niekdajších ekonomických expanzií do nových teritórií na Zemi. V druhej polovici dvadsiateho prvého storočia, Schmitt predpovedá, He-3 fúzne reaktory v tandeme s parnými turbínami nahradia dnešné spôsoby produkcie elektrickej energie. Nahradia ich na stá a tisíce rokov.

Schmittova vízia, v prípade že sa ju podarí realizovať, od základu zmení život na Zemi. Pominú obavy z vyčerpania fosilných palív a, hlavne, z existenciálnej hrozby predstavovanej klimatickou zmenou spôsobenou ich spaľovaním. OSN Zmluva o kozmickom priestore (Outer Space Treaty, 1967) hovorí, že žiadna krajina nemá právo prisvojiť si kozmické telesá alebo územia na kozmických telesách. Zmluvu podpísalo 115 krajín, ďalších 23 sa k zmluve pripojilo čiastočne. Dohodu o Mesiaci (Moon Agreement, 1979) prijalo 22 krajín. Veľmoci (SSSR/Rusko, Spojené štáty, Čína, India) medzi nimi chýbajú. Dohoda zakazuje budovanie vojenských základní a opevnení na Mesiaci a používanie Mesiaca k testovaniu zbraní. Otáznik visí nad vlastníctvom kozmických surovínových zdrojov a nad rolou súkromného kapitálu v ich dobývaní. Vedľajšou (a systematicky ignorovanou) otázkou v súvislosti s dobývaním nerastov a prchavín na Mesiaci a na iných kozmických telesách je zachovanie environmentálnej čistoty a vedeckej celistvosti tých telies.

Snahy o návrat astronautov na Mesiac narážali na chronicky zachmúrené politické a rozpočtové počasie. Pri príležitosti dvadsiateho výročia misie Apollo 11, prezident George W. H. Bush vyhlásil novú kozmickú iniciatívu (Space Exploration Initiative, SEI). V rámci SEI astronauti by boli pristáli na Mesiaci pred r. 2000 a na Marse niekedy po r. 2010. Prezident Bush: „Prečo Mars? Lebo údelom ľudstva je usilovať sa, (v dne hľadať, nájsť. A lebo údelom Ameriky je viesť.“ (“Why Mars? Because it is humanity’s destiny to strive, to seek, to find. And because it is America’s destiny to lead.”) Tradičný a prirodzený prístup: Mesiac, medzi stanica k Marsu. Po Mesiaci Mars, koruna našich snáh. Termíny neboli stanovené, len predpokladané. K žiadnym pristátiam nedošlo. Vyhlásená s veľkými fanfárami, SEI zanikla prv, ako sa rozbehla. Podľa vlažnému prijatiu verejnosťou a chladnému prijatiu Kongresom. Bezprostrednou príčinou negatívnych reakcií bol odhad celkového nákladu na uskutočnenie SEI: cez 500 miliárd dolárov (v dnešnej hodnote meny okolo dvoch triliónov). Dôverný odhad unikol jeho autorom a dostal sa do

spravodajských médií. Vyvolal zdesenie medzi politickými komentátormi. Objav ľadu na Mesiaci, ktorý prišiel o päť rokov po SEI, situáciu neovplyvnil. NASA a DoD predložili Kongresu návrh pre ďalší spoločný projekt, misiu *Clementine 2*. Misia mala dokonalejšie zmapovať povrch Mesiaca, so zvláštnym prihliadnutím na existenciu ľadu. Prezident William Clinton použil svoje právo veta a návrh z federálneho rozpočtu vyškrtol.

Prezident George W. Bush, syn G. W. H. Busha, vyhlásil (14. januára 2004) novú kozmickú iniciatívu, Vision for Space Exploration (VSE). V istom zmysle, prezident Bush-syn sa pokúsil oživiť iniciatívu SEI, s ktorou jeho otec prišiel o pätnásť rokov skôr. Odhad nákladov na uskutočnenie VSE, ak bol vykonaný, nebol zverejnený. Do stredobodu NASA činnosti VSE umiestnila návrat astronautov na Mesiac a aspoň jednu cestu na Mars. Termíny opäť neboli formálne stanovené. Neformálne termíny, diskutované v kruhoch NASA, sa pohybovali medzi rokom 2020 (Mesiac) a rokom 2030 (Mars). VSE sa pomaly rozbehla. Vážne programové nezhody sa vyvinuli na najvyšších miestach. Prezidentské voľby v novembri 2008 vyhral Barack H. Obama. Počas volebnej kampane viac razy vyjadril presvedčenie, že federálne finančné prostriedky sa majú venovať na užitočné účely, napríklad vzdelávanie detí, nie na vysielanie astronautov do kozmu. Systémový inžinier Christopher J. Scolese, Obamov prvý šéf NASA, pred Kongresom povedal, že zmysel návratu na Mesiac mu nebol jasný. Niekdajší astronaut Charles F. Bolden, Obamov druhý šéf NASA, urobil verejné vyhlásenia, v ktorých kritizoval ciele VSE, menovite návrat na Mesiac. (Bolden sa Apollo misii nezúčastnil.) Vyslovil želanie letieť priamo na Mars. Pripustil ale, že Mars bol príliš ďaleko, finančne aj časove. John P. Holdren, profesor ekológie na Harvardskej univerzite a Obamov vedecký poradca, vyriekol radikálny názor. NASA, podľa Holdrena, by sa mala sústrediť na pozorovania Zeme a mala by použiť svoj jedinečný technický aparát na sledovanie klimatických zmien na Zemi. A čo Obama? V prejave na KSC (15. apríla 2009) Obama načrtol nové smernice pre NASA. Podstata smerníc, zhrnutá do troch viet: Na Mesiac nejdeme, tam sme už boli. Niekedy v hmlistej budúcnosti pôjdeme na (neurčený) asteroid, potom na ďalší. O ceste na Mars ani slovo. Rozpočtové zásahy Kongres podkopali životnosť VSE iniciatívy. Nové smernice znamenali jej zdanlivý koniec. Zdanlivý, lebo Kongres urobil nečakaný obrat. Značnou väčšinou odhlasoval, aby NASA nahradila vyradenú ťažkú nosnú raketu Saturn 5 a vyvinula nové, rovnocenné alebo výkonnejšiu vesmírnu loď. Kongres dal tomu vozidlu meno Space Launch System (SLS). Vesmírna loď SLS by zachovalo schopnosť dosiahnuť ciele identifikované vo VSE (Mesiac, Mars). Rovnako nečakane, Obama implicitnú kritiku zo strany Kongresu bez zjavných námietok prijal a príslušný zákon podpísal (11. októbra 2010). Vývoj vozidla Saturn 5 pod von Braunovým vedením bol vnútornou záležitosťou NASA. Vývoj SLS sa stal medzinárodným, komerčným podujatím pod vedením firiem Boeing, Lockheed Martin, Airbus. Pre cesty na Mesiac, k špici SLS bude pripútané raketové

vesmírne vozidlo menom Orion MPCV (Multi-Purpose Crew Vehicle). Vesmírne vozidlo poskytne prístrešok štvorčlennej posádke. Po prvý raz v histórii ľudských kozmických letov posádka bude mať ľudskejšie prostredie—kuchyňu a toaletu. Orion, plánovaný ešte v rámci VSE, je tiež produkt medzinárodnej spolupráce. Modul pre posádku (crew module) dodala firma Lockheed Martin, pohon (service module) dodala firma Airbus. [21]

Programovú neistotu a rozháranosť potlačil a do hry o návrat na Mesiace sa vložil nečakaný hráč, prezident Donald J. Trump. Po necelom roku v úrade, prezident Trump vydal (11. decembra 2017) direktívu pre NASA: Obnoviť lety astronautov na Mesiace a položiť základy letom na Mars. [22] Bez mnohých rečí Trumpov šéf NASA James F. Bridenstine oznámil (14. mája 2019) ustanovenie Programu Artemis. (Meno Artemis prišlo prirodzene. Apollo a Artemis boli dvojčatá, deti Zeusa a Leto. Dávni Gréci uctievali Artemis ako bohyňu lovu a Mesiaca.) Vysoko ambiciózný, pritom sotva viditeľný Program *Artemis* má štyri hlavné úlohy: (1) pokračovať vo vedeckom prieskume Mesiaca; (2) rozvíjať novú techniku pre ľudské kozmické lety; (3) učiť ľudí ako žiť a pracovať na iných svetoch; (4) pripraviť astronautov pre lety na Mars. Vzaté dokopy, Program *Artemis* by mal viesť k založeniu prvej stálej kolónie na Mesiaci a k uľahčeniu letov kamkoľvek, vrátane na Mars. Časový rozvrh Programu *Artemis* je voľný, aby pomerne skromný rozpočet mohol byť udržateľný. Po voľbách v r. 2020, Bridenstine odstúpil. Prezident Joseph R. Biden ponechal Trumpovu direktívu v platnosti. Práca na uskutočnení Programu *Artemis* neustala. Misia *Artemis 1* bez posádky (štart 16. novembra 2022) úspešne odskúšala kombináciu vozidiel SLS a Orion. Kabinu Orion niesla tri figuríny vybavené fyziologickými senzormi.



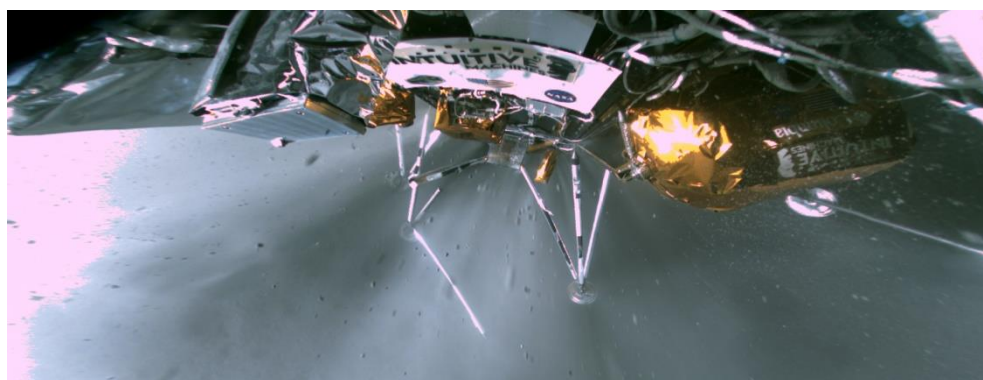
Obr.17 (vľavo): Vesmírne vozidlo Orion na ceste k Mesiacu. (*Artemis 1*) [NASA]

Obr.18 (vpravo): Mesiace a Zem zo vzdialenosti 430.000 km od Zeme, zhotovený kamerou na palube vozidla Orion. (*Artemis 1*) [NASA]

Vesmírne vozidlo sa odpútalo od SLS, letelo smerom k Mesiacu, dva razy dosiahlo najvzdialenejšieho bodu dráhy (430,000 km od Zeme), obrátilo sa, letelo k Zemi a pristálo v Tichom oceáne (11. decembra 2022). (Obr. 17, 18) Misia *Artemis* 2, plánovaná pre koniec roka 2025, bude po *Apollo* misách prvá, ktorá dopraví posádku do blízkosti Mesiaca. Misia *Artemis* 3 bude po *Apollo* misách prvá, ktorá dopraví posádku na Mesiac. Malo by sa tak stať v r. 2026. Miesto pristátia: južný pól. NASA, v spolupráci s komerčnými partnermi, vyvíja stanicu nazvanú Lunar Gateway. Stanica bude slúžiť ako pomocná základňa pre uľahčenie styku medzi Zemou a Mesiacom. Stanica má byť uvedená do prevádzky v roku 2028. Prvú posádku na stanicu dopraví misia *Artemis* 4. NASA sa usiluje zainteresovať do Programu *Artemis* čo najviac krajín. Tridsaťdeväť krajín podpísalo s NASA *Artemis* dohody (stav 1. mája 2024). Európski, kanadskí a japonskí astronauti sa zúčastnia budúcich *Artemis* misií. Čína sleduje podobnú politiku. Čínska kozmická agentúra CNSA (China National Space Administration) držala konferenciu o spolupráci s juhoamerickými krajinami (China - Latin America Space Cooperation Forum, Wuhan, 24.-25. apríl 2024). Nepozorovane, na scénu sa vkradli nové kozmické preteky.

Práve tak nepozorovane, okolo Mesiaca a na Mesiaci nastalo rušno. Čínska robotická sonda *Chang'e 3* (meno po mytologickej krásavici a bohyni Mesiaca) pristála na Mesiaci, na Mare Imbrium (14. decembra 2013). Čína sa tak stala treťou krajinou, po Sovietskom zväze a Spojených štátoch, ktorá sa dotkla povrchu Mesiaca. Sonda *Chang'e 4* bola prvá vôbec, ktorá pristála na odvrátenej strane Mesiaca (3. januára 2019). Pristála v South Pole – Aitken kotline, v kráteri Von Kármán (priemer 186 km, hĺbka 15 km; meno po maďarskom matematikovi Teodorovi von Kármánovi, profesorovi na Caltechu a zakladateľovi JPL). Sonda *Chang'e 5* pristála (1. decembra 2020) na bazaltickej pláni Oceanus Procellarum (Oceán búrok), na úpätí Mons Rümker, pahorku vysokého 1,3 km. *Chang'e 5* vrátila na Zem vzorky hornín. Prekvapivo, horniny sa ukázali byť len ~2 miliardy rokov staré. Zrejme o vývoji povrchu Mesiaca nevieme toľko, koľko si myslíme, že vieme. Sonda *Chang'e 6* pristála (2. júna 2024) v South Pole – Aitken kotline, časti kotliny na odvrátenej strane Mesiaca. Úlohou sondy je zopakovať kúsok dokázaný sovietskou *Lunou 24*: navrátať regolit, získať stĺpec hornín a získaný stĺpec poslať na Zem. Po dvoch dňoch, vzácny náklad nesúci návratný modul sondy sa vydal na spiatočnú cestu, k čínskemu kozmickému stredisku WSLC (Wenchang Space Launch Site) na ostrove Hainan. Pred rokom 2030, CNSA hodlá vyslať na Mesiac ďalšie dve sondy v sérii *Chang'e*. Potom by mali nasledovať pristátia taikonautov (čínskych astronautov). Indická sonda *Chandrayaan 3* pristála na južnej pologuli Mesiaca (23. augusta 2023), približne dvadsať stupňov severne od južného pólu. India – štvrtá krajina so sondou na Mesiaci. Japonská sonda JAXA SLIM (Japan Aerospace Exploration Agency, Smart Lander for Investigating the Moon) pristála na Mare Nectaris (20. januára 2024). Japonsko – piata krajina so sondou na Mesiaci. Sonda KPLO (Korean Pathfinder

Lunar Orbiter) *Danuri* (vystrelená 5. augusta 2022) obieha Mesiac a skúma hlavne oblasť južného pólu. Pripravuje podklady pre pristátie juhokórejskej sondy. Ak všetko pôjde ako má, Južná Kórea sa stane šiestou krajinou, ktorej sonda pristála na Mesiaci. Roskosmos sonda *Luna 25*, ruský pokus o pristátie na Mesiaci, prvý od pamätného úspechu sondy *Luna 24*, sa nevydaril. *Luna 25* havarovala (19. augusta 2023). Ako súčasť Programu Artemis, NASA zriadila komerčný program (Commercial Lunar Payload Services, CLPS) pre podporu prieskumu Mesiaca. Dve firmy využili novú príležitosť. Pittsburgská Astrobotic Technology zostrojila sondu *Peregrine Lunar Lander* a pomocou rakety *Vulcan Centaur*, dodanou konzorciom United Launch Alliance, vypustila ju k Mesiacu (8. januára 2024). Raketu postihol únik paliva. Vrátila sa, aj so sondou, späť k Zemi. Houstonská Intuitive Machines zostrojila sondu *Odysseus*. Vybavila ju šiestimi NASA prístrojmi a raketou *Falcon 9* firmy SpaceX prepravila na Mesiac. Sonda pristála (22. februára 2024) blízko južného pólu, v kráteri Malapert (priemer 69 km, hĺbka neznáma; meno po aristotelíanskom kozmológovi Charlesovi Malapertovi). Pri pristávaní sonda *Odysseus* sa zlomila jedna z jej troch podpier a naklonila sa. (Obr. 19)



*Obr.19: Sonda IM-1 Odysseus v južnej polárnej oblasti Mesiaca. (Artemis 1)
[Intuitive Machines]*

Slnečné panely sa stali nepoužiteľné. Sonda pracovala niekoľko dní a odmlčala sa. Aj tak dosiahla dva významné míľniky. Bola prvou komerčnou sondou na Mesiaci a prvým americkým pristátím od pristátia *Apollo 17*. Problému prchavín a vody v oblasti južného pólu Mesiaca sa bude venovať NASA pohyblivé robotické laboratórium *VIPER* (Volatiles Investigating Polar Exploration Rover), ďalšia súčasť programu Artemis. Predpokladá sa, že laboratórium *VIPER* pristane na Mesiaci koncom roku 2024 a bude v prevádzke sto dní. Japonská JAXA a indická ISRO sa dohodli (v roku 2019) vyslať na južný pól Mesiaca pohyblivé laboratórium *LUPEX* (Lunar Polar Exploration), analogické laboratóriu *VIPER*. S pristátím sa ráta v roku 2025.

Austrálska kozmická agentúra (Australian Space Agency, ASA), v spolupráci s NASA a programom *Artemis*, hodlá vypustiť na Mesiace pohyblivé laboratórium menom *Roo-ver*. (Meno, odvodené od “rover,” tulák, bolo prijaté verejným hlasovaním.) Pristátie by sa mal stať v roku 2026, tiež v oblasti južného pólu. Austrália – potenciálne siedma krajina so sondou na Mesiaci.

Mesiace volá. Mars volá. Planetárne diaľky volajú. Ako na tie neodbytné volania odpovedať? Program *Artemis* predstavuje primeranú inštitucionálnu (prezident, Kongres, NASA) odpoveď; odpoveď primeranú súčasnému stavu techniky a súčasnej politickej nálade v Spojených štátoch. A ako má odpovedať obyčajný občan? Azda najlepšiu individuálnu odpoveď dal Louis Friedman, JPL inžinier a dlhoročný riaditeľ záujmovej organizácie Planetárna spoločnosť (The Planetary Society, sídlo v Pasadene). Svojim vnúcatám odkázal: “Skúmajte iné svety, chráňte náš!” (“Explore other worlds, protect ours!”) [23] Friedmanov odkaz, Friedmanove heslo, oslovuje všetkých občanov Zeme. Skúmajte a, ak sa dá, kolonizujte iné svety. Skúmaniu iných svetov a migrácii do iných svetov sa vyhnúť nemôžeme. Naše evolučné dedičstvo to nedovolí. Poznámkou o plaziacej sa morskej biote von Braun nevyriešol prázdne slová. Biologickú a geologickú evolúciu ponechajme na okamžik bokom, sústreďme sa na prítomnosť a najbližšiu budúcnosť. Ochranu Zeme by ľudstvo malo prijať za najvyššie prikázanie, za existenčný rozkaz dňa. Tvrdá realita ostáva. Prežitie na Mesiaci, na Marse a ďalej, prežitie nezávislé od priemyslovej, potravinovej a zdravotníckej bázy na Zemi patrí do ríše science-fiction. Bude tam patriť ešte dlhý čas.

Medzitým nezabúdajme na najhlbšiu pravdu poznávania: Náš svet je nado všetky iný! Vzácnějšího pokladu v kozme niet. Rešpektujme ho, milujme ho, chráňme si ho.

L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s

- [1] W. E. Burrows, *This New Ocean*, New York: Random House (1998).
- [2] T. Spitzmiller, *The History of Human Spaceflight*. Gainesville: University Press of Florida (2017).
- [3] G. DeGroot, *Dark Side of the Moon*, New York: New York University Press (2006).
- [4] M. Logsdon, *After Apollo?*, New York: Macmillan (2015).
- [5] S. R. Taylor, *Lunar Science: A Post-Apollo View*, New York: Pergamon Press (1975).
- [6] K. Lodders and B. Fegley, *The Planetary Scientist’s Companion*, New York: Oxford University Press (1998).
- [7] S. D. Howe et al., Pulsed Plasma Rocket: Developing a Dynamic Fission Process for High Specific Impulse and High Thrust Propulsion, *Acta Astronautica* 197 (2022), 399.
- [8] P. D. Spudis, *The One and Only Moon*, Washington, DC: Smithsonian Institution Press (1996).
- [9] S. Nozette et al., The Clementine Radar Bistatic Experiment, *Science* 274 (1996), 495.

- [10] D. B. J. Bussey et al., Illumination Conditions at the Lunar South Pole, *Geophysical Research Letters* 26 (1999), 1187; D. B. J. Bussey et al., Constant Illumination at the Lunar North Pole. *Nature* 434 (2005), 842.
- [11] M. A. Slade et al., Mercury Radar Imaging: Evidence for Polar Ice, *Science* 258 (1993), 635; J. K. Harmon et al., “Radar Mapping of Mercury’s Polar Anomalies,” *Nature* 369 (1994), 213.
- [12] D. A. Paige et al., The Thermal Stability of Water Ice at the Poles of Mercury, *Science* 258 (1992), 643; A. P. Ingersoll et al., “Stability of Polar Frost in Spherical Bowl-Shaped Craters on the Moon, Mercury, and Mars, *Icarus* 100 (1992), 40.
- [13] W. C. Feldman et al., Fluxes of Fast and Epithermal Neutrons from Lunar Prospector: Evidence for Water Ice on the Lunar Poles, *Science* 281 (1998), 1496.
- [14] N. T. Tillman, Deep Impact: The Deep-Space Comet Hunter, *Space*, 4 November 2019.
- [15] C. M. Pieters et al., Character and Spatial Distribution of OH/H₂O on the Surface of the Moon Seen by M3 on Chandrayaan 1, *Science* 325 (2009), 568.
- [16] C. I. Hannibal et al., Molecular Water Detected on the Sunlit Side of the Moon by SOFIA, *Nature Astronomy* 5 (2021), 121; S. Kuthunur, ‘First Map of Moon Water Could Help Artemis Astronauts Live at the Lunar South Pole’, www.space.com, 20 March 2023.
- [17] S. G. Brush, *Fruitful Encounters: The Origin of the Solar System and of the Moon from Chamberlin to Apollo*, Cambridge: Cambridge University Press (1996).
- [18] W. K. Hartman and D. R. Davis, Satellite-sized Planetesimals and Lunar Origin, *Icarus* 24 (1975), 504; A. G. W. Cameron and W. R. Ward, The Origin of the Moon, *Lunar and Planetary Science* 7 (1976), 120; R. M. Canup and E. Asphaug, Origin of the Moon in a Giant Impact Near the End of the Earth’s Formation, *Nature* 412 (2001), 708.
- [19] H. Canollas, The Remnants of an Ancient Planet Lie Deep Within Earth, *Caltech Weekly*, 1 November 2023.
- [20] H. H. Schmitt, *Return to the Moon*, New York: Springer (2006).
- [21] P. D. Spudis, *The Value of the Moon: How to Explore, Live, and Prosper in Space Using the Moon’s Resources*. Washington, DC: Smithsonian Institution Press (2016).
- [22] K. Chang, Trump Announces That the Moon Is Astronauts’ Next Destination, *The New York Times*, 11 December 2017.
- [23] L. Friedman, *Human Spaceflight: From Mars to the Stars*, Tucson: University of Arizona Press (2015).

Adresa autora: Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, emeritus,
e-mail: ladislavroth@sbcglobal.net

Zomrela významná osobnosť Teórie vyučovania matematiky na Slovensku docent Ivan Trenčanský



Doc. RNDr. Ivan Trenčanský, CSc.

Dňa 22. apríla 2023, po dlhšej chorobe, vo veku nedožitých 80. rokov zomrel doc. RNDr. Ivan Trenčanský, PhD., významná osobnosť didaktiky matematiky na Slovensku a bojovník za jej uznanie ako samostatného vedného odboru.

Narodil sa 24. júna 1943 v Topoľčanoch a po ukončení štúdia na topoľčianskom gymnáziu pokračoval v štúdiu na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave. Od roku 1967 pôsobil ako odborný asistent na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave a od 1980 na novovzniknutej Matematicko-fyzikálnej fakulte (MFF). V rokoch 1978-1979 absolvoval 16-mesačný pobyt na Univerzite Madam Curie v Paríži. Francúzska didaktická škola

ho výrazne ovplyvnila. Na seminároch oboznamoval doktorandov s Teóriou didaktických situácií, ktorá sa stala teoretickým a analytickým rámcom viacerých obhájených doktorandských prác a iných výskumných štúdií.

Od 1. 9. 1981 sa vo funkcii tajomníka MFF zaslúžil o zriadenie výdajne stravy na fakulte, úpravu okolia fakulty (výsadba stromov, úprava chodníkov). Od roku 1989 pôsobil ako docent v odbore Teória vyučovania matematiky, a keď bola v roku 1993 vymenovaná celoslovenská komisia pre dizertačné skúšky v odbore Teória vyučovania matematiky, bol za MFF spolu prof. Kostyrkom a doc. Rosom jej členom. V rokoch 1997-2006 bol vedúcim Katedry základov a didaktiky matematiky, neskôr po reštrukturalizácii fakulty, Katedry algebry, geometrie a didaktiky matematiky. Začiatkom nového tisícročia, v rokoch 2000-2002 pôsobil na Seychelských ostrovoch ako odborník na didaktiku matematiky a vyučovanie matematiky na stredných školách. V rokoch 2006-2009 bol vo funkcii mimoriadneho profesora, na ktorej zostal až do odchodu do dôchodku.

Venoval sa talentovanej mládeži, či už ako člen krajského výboru matematickej olympiády v Bratislave, poradca pre vzdelávacie programy Slovenskej televízie (napr. *Základy logiky, uvažujme logicky*), alebo spolupracovník pri výrobe diafilmov ako učebnej pomôcky. Za prácu s mládežou bol v roku 1976 ocenený mestom Bratislava. Popri práci na univerzite nestratil kontakt s vyučovaním na strednej škole, učil na štvrtinový úväzok na bratislavskom bilingválnom gymnáziu matematiku vo francúzskom jazyku. Jeho geometrické vzdelanie mu umožnilo spolupracovať aj so Správou cestných stavieb, národný podnik Nitra, kde pomáhal s optimalizáciou prepravy nadrozmerných nákladov a vodorovného značenia.



*Obhajoba dizertačnej práce v rámci celoslovenskej komisie s medzinárodnou účasťou
(zdroj: archív doc. Olivera Žideka)*

Moje spomienky na neho sa spájajú najmä s projektmi, ktoré nielen jeho doktorandom umožnili cestovať a spoznávať svetový výskum v didaktike matematiky. Keď som v roku 2002 nastúpila na doktorandské štúdium, rozbiehal sa na katedre Comenius projekt „*Docente Europeo*“, kde sme sa zúčastňovali už prípravných rokovaní, a vďaka ktorému sme sa ôsmi dostali na stáž na univerzitu v nórskom Bodø, a deviati na univerzitu v talianskom Palerme. Prišli ďalšie európske projekty, do ktorých boli zapojené tímy prof. Spagnola (Taliansko) a prof. Ravnu (Nórsko).

Spolupráca prerástla do priateľstiev a kontakty so zahraničnými kolegami udržoval aj v súkromnej rovine dlho po skončení projektov. S ľuďmi z oboch univerzít, ako aj ďalších svetových univerzít, ktoré sme vďaka nemu mohli navštíviť, kontakty z konferencií, ktorých sme sa mohli aktívne zúčastniť a rôznych stáží, ktoré sme vďaka nemu absolvovali, nám pretrvali dodnes. Na viacerých máme teraz už len tichú spomienku, no práve vďaka nemu sme získali výbornú základňu pre vlastné projekty a výskum.

Relax nachádzal na horách, jeho srdcovkou boli Vysoké Tatry. Z jednej zo spoločných pracovných ciest si pamätám neformálne rozhovory na kopci s výhľadom na fjord a kávou z termosky. Aj keď som si to v tom čase neuvedomovala, ale teraz sa čím ďalej tým viac utvrdzujem, že neformálne stretnutia a diskusie sú rovnako dôležité (ak nie aj dôležitejšie), ako formálne rokovania. Pripravoval nás, aj keď sme neboli jeho doktorandi, na akademickú dráhu. Nerobil medzi nami rozdiely, vkladal do nás nádeje. Robil to vždy s citom, no benevolentným nebol. Prešli mu rukami osobnosti súčasnej generácie odborníčov a odborníkov na didaktiku matematiky.

Docentovi Ivanovi Trenčanskému ďakujeme za angažovanosť pri pozdvíhnutí odboru Teória vyučovania matematiky a uznanie jej miesta medzi ostatnými vednými odbormi.

Česť jeho pamiatke!

Mária Slavičková¹

¹ Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, Mlynský dolina, 842 48 Bratislava

e-mail: slavickova@fmph.uniba.sk

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť

Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť

Jednota slovenských matematikov a fyzikov pobočka Nitra,
(kontaktná adresa: Schurmannova 27, 949 01 Nitra)
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje

JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
kontakt: Prof. Martin Kalina, KMDG SvF STU, Radlinského 11,
810 05 Bratislava (e-mail: martin.kalina@stuba.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
1/2024 ročník 53

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Aba Teleki

Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki

Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková

Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík

Zástupca vydavateľa: Martin Kalina

Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Náklad: 350 kusov

Periodicita vydávania: štvrťročník

IČO vydavateľa: 00 178 705

Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava

Dátum vydania periodickej tlače: marec 2024

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené

Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava

č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

OBSAH

Dag H r u b ý : Užití diskriminantu kvadratické rovnice při určování extrémů funkcí	1
Jaroslav B e r á n e k : Množinové operace ve školské matematice	9
Jaroslav Z h o u f : Jeden způsob generování pythagorejských trojic	20
Katalin S ó s , László N á n a i : The Earth's Magnetism and the Pole Reversal	28
Ladislav E. R o t h : Program Artemis: Návrat astronautů na Měsíc	44
SPOMÍNAME:	
Zomrela významná osobnosť	
Teórie vyučovania matematiky na Slovensku docent Ivan Trenčanský (Mária Slavičková)	70

CONTENTS

Dag H r u b ý : Using the Discriminant of a Quadratic Equation in Determining the Extreme Value of Functions	1
Jaroslav B e r á n e k : Set Operations in School Mathematics	9
Jaroslav Z h o u f : One Way to Generate Pythagorean Triplets	20
Katalin S ó s , László N á n a i : The Earth's Magnetism and the Pole Reversal	28
Ladislav E. R o t h : Artemis Program: The Return of Astronauts to the Moon ...	44
IN MEMORIAM	
A Prominent Figure in the Theory of Mathematics Education in Slovakia, Associate Professor Ivan Trenčanský, Has Passed Away (Mária Slavičková)	70