

OBSOBY

3/2023 (52)

MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2023 ročník 52

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 3/2023 Volume 52

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Znáť, Beloslav Riečan et Daniel Kľuvanec

Editors in Chief: Jozef D o b o š (Mathematics and Computer Sciences)

International Editorial Board:

Anatolij D v u r e č e n s k i j (Slovakia)	Štefan L u b y (Slovakia)
Gábor G a l a m b o s (Hungary)	László N á n a i (Hungary)
Juraj H r o m k o v i č (Switzerland)	Adam P l o c k i (Poland)
Hans J o r d e n s (Netherland)	Zdeněk P ů l p á n (Czech republic)
Martin K a l i n a (Slovakia)	Ladislav Emanuel R o t h (USA)

Executive Editors: Štefan T k a č i k (Mathematics and Computer Sciences)
Aba T e l e k i (Physics)

Editorial Board:

Mathematics and Computer Sciences:

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Peter Maličský	Iveta Scholtzová
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Mariana Marčoková	Milan Turčáni
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Milan Matejdes	Peter Vrábel
	Tomáš Lengyelfalussy	Martin Papčo	

Physics:

Jozef Beňuška	Stanislav Holec	Viera Lapitková	Vladimír Šebeň
Ivo Čáp	Anna Jankovychová	Milan Noga	Boris Tomášik
Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó	Bohumil Vybíral

Reviewers:

Mathematics and Computer Sciences:

Ružena Blašková	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan
Radoslav Harman	Martin Papčo	Marián Trenkler
Mária Kmeťová	Iveta Scholtzová	Dušan Vallo

Physics:

Peter Demkanin	Peter Hanisko	Marián Kíreš	Arnold Pompoš
Jozef Hanč	Ján Klíma	Miroslava Ožvoldová	Mária Rakovská

O funkciách definovaných po častiach

Jozef Doboš

Abstract [On piecewise defined functions]: This article is devoted to piecewise defined functions. Students may encounter some such functions in school mathematics, or when preparing for study abroad.

Key words: piecewise defined functions, absolute value function, floor function, signum function, Dirichlet function

Súhrn: Tento článok je venovaný funkciám, ktoré sú definované po častiach. S niektorými takýmito funkciami sa môžu žiaci stretnúť v školskej matematike, prípadne pri príprave na štúdium v zahraničí.

Kľúčové slová: funkcie definované po častiach, absolútna hodnota, celá časť reálneho čísla, funkcia signum, Dirichletova funkcia

MESC: 97I20, 97I70.

Úvod

Sadzba vnútroštátneho poštovného závisí od hmotnosti listu. Od 1. 3. 2022 bola domáca poštová sadzba pre listy druhej triedy stanovená (v závislosti od hmotnosti v gramoch) takto:

Do hmotnosti	50 g	100 g	500 g	1000 g	2000 g
Predajná cena v €	0,75	1,00	1,30	2,00	2,90

Tieto sadzby môžeme spojiť do jednej funkcie nasledujúcim spôsobom:

$$P(x) = \begin{cases} 0.75 & \text{ak } 0 < x \leq 50 \\ 1.00 & \text{ak } 50 < x \leq 100 \\ 1.30 & \text{ak } 100 < x \leq 500 \\ 2.00 & \text{ak } 500 < x \leq 1000 \\ 2.90 & \text{ak } 1000 < x \leq 2000 \end{cases}$$

V programe Geogebra to urobíme takto:

$P(x) = \text{If}(0 < x \leq 50, 0.75, 50 < x \leq 100, 1, 100 < x \leq 500, 1.3, 500 < x \leq 1000, 2, 1000 < x \leq 2000, 2.9)$

a v programe Wolfram Alpha takto:

$P(x) = \text{piecewise}[\{0.75, 0 < x \leq 50\}, \{1, 50 < x \leq 100\}, \{1.3, 100 < x \leq 500\}, \{2, 500 < x \leq 1000\}, \{2.9, 1000 < x \leq 2000\}]$

Takéto funkcie sa nazývajú *funkcie definované po častiach*. Definičný obor takejto funkcie je rozdelený na dve alebo viac častí, pričom na rôznych častiach je funkcia definovaná pomocou rôznych pravidiel. S funkciami definovanými po častiach sa môžu stretnúť žiaci, ktorí sa pripravujú na štúdium v zahraničí, napr. v SAT testoch¹ (pozri napr. [5]). V tomto článku sa pozrieme na funkcie definované po častiach, s ktorými sa môžeme stretnúť v školskej matematike.

Funkcia absolútnej hodnoty

Väčšina učebníc uvádza ako príklad funkcie definovanej po častiach funkciu absolútnej hodnoty. Napríklad v učebnici [13] sa píše, že funkcia absolútnej hodnoty definovaná predpisom $f(x) = |x|$ môže byť zapísaná ako funkcia definovaná po častiach. Keď $x \geq 0$, potom $|x| = x$. Keď $x < 0$, potom $|x| = -x$.² S odvolaním sa na to, že reálne číslo je buď kladné, buď záporné, alebo nula, sa v učebnici [1] definuje absolútna hodnota takto:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{ak } x < 0, \\ 0, & \text{ak } x = 0, \\ x, & \text{ak } x > 0. \end{cases}$$

Tiež sa tam uvádza, že prípad $x = 0$ môžeme pripojiť nielen k prípadu $x > 0$, ale aj k prípadu $x < 0$, t. j.

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{if } x \leq 0, \\ x, & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

Poznamenajme, že definíciu absolútnej hodnoty môžeme (aj keď to nie je bežné) dokonca zapísať v tvare

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{if } x \leq 0, \\ x, & \text{if } x \geq 0. \end{cases}$$

Aj keď číslo $x = 0$ patrí do oboch častí definičného oboru, v oboch prípadoch dostávame rovnakú hodnotu $|0| = 0$. Preto je táto definícia korektná. Teda nie je pravda, že v prípade funkcie definovanej po častiach sa jednotlivé časti definičného oboru nesmú prekrývať, ako sa to tvrdí v [10]. Možno to iba odporúčať.

¹ SAT (Scholastic Aptitude Test) je štandardizovaný test vytvorený organizáciou College Board využívaný na overenie študijných predpokladov pri prijímaní uchádzačov na vysoké školy v USA.

² Pritom je vhodné žiakom pripomenúť, že $-x = (-1) \cdot x$. Teda napr. $|-3| = (-1) \cdot (-3) = 3$.

Pri pohľade do viacerých učebníc odhalíme jemné rozdiely týkajúce sa funkcií definovaných po častiach. Napríklad v učebnici [3] sa píše, že po častiach definované funkcie sú najlepšie opísané alebo najprirodzenejšie opísané rôznymi vzorcami pre rôzne intervaly nezávislej premennej. Pritom táto učebnica pracuje s funkciou absolútnej hodnoty, ale nezaraďuje ju medzi funkcie definované po častiach.

Na druhej strane, v učebnici [24] na strane 57 sa píše, že funkcie definované po častiach nemožno vyjadriť jednou algebraickou rovnicou.³ Avšak na strane 114 je ako príklad funkcie definovanej po častiach uvedená funkcia absolútnej hodnoty. Stačí si však uvedomiť, že pre každé reálne číslo x platí $|x| = \sqrt{x^2}$. Preto $f(x) = \sqrt{x^2}$ je vyjadrenie funkcie absolútnej hodnoty jednou rovnicou.

Ako vidíme na úvodnom príklade so sadzbou poštovného, niektoré funkcie môžu byť definované len po častiach. Avšak pri zložitejších funkciách môže byť náročné zistiť, či ich možno vyjadriť jedným predpisom. Nasledujúcu ukážku sme prevzali z článku [12]. Funkciu

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < -\pi, \\ \cos x, & x \in (-\pi, 0), \\ e^x, & x \geq 0, \end{cases}$$

možno vyjadriť jedným predpisom takto

$$f(x) = e^{(|x|+x)/2} - 1 + \frac{1}{4(x+\pi)} (2(|x+\pi|+x+\pi) \cos \frac{|x+\pi|-|x|-\pi}{2} + (|x+\pi|-x)^2 - \pi^2).$$

Článok [12] vznikol ako reakcia na to, že v knihe [4] je funkcia absolútnej hodnoty nesprávne zaradená medzi neelementárne funkcie. Môžeme to vidieť aj v knihe [19] a v učebnici [13]. Pretože $|x| = \sqrt{x^2}$, funkcia absolútnej hodnoty je zrejme elementárnou funkciou. Problematike elementárnych funkcií sa venuje nedávno uverejnený článok [15].

Funkcia celá časť

Ďalšou funkciou definovanou po častiach, ktorá sa často vyskytuje v učebniciach, je funkcia *celá časť*. Zaviedol je C. F. Gauss v roku 1808 (pozri [8]) spolu s označením $[x]$, ktoré niektorí autori používajú dodnes (pozri napr. [17]). Postupne sa však čoraz viac uprednostňuje názov *dolná celá časť* s označením $\lfloor x \rfloor$, často spoločne

³The rules for such functions cannot be expressed as a single algebraic equation.

s funkciou *horná celá časť* s označením $\lceil x \rceil$ (pozri [19]), ktoré zaviedol v roku 1962 K. Iverson (pozri [9]). V zahraničných učebniciach (pozri napr. [13]) sa obvykle celá časť reálneho čísla x označuje $\bullet x \bullet$. Niektorí autori označujú celú časť $\text{int}(x)$ (pozri napr. [25]), prípadne $\text{Int}(x)$ (pozri napr. [22]). Dokonca v niektorých učebniciach sa dolná celá časť označuje $\lfloor x \rfloor$ a horná celá časť $\lceil x \rceil$ (pozri napr. [14] alebo [21]). Pri-
pomeňme si definície:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}, \quad \lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}.$$

Na precvičovanie tohto pojmu sú vhodné rovnice s celou časťou – napr. v knihe [2] je takýmto rovniciam venovaná jedna kapitola. Pomocou dolnej celej časti môžeme definovať priame periodické rozšírenie funkcie $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ predpisom⁴

$$\tilde{f}(x) = f\left(x - \left\lfloor \frac{x-a}{b-a} \right\rfloor \cdot (b-a)\right)$$

a pomocou hornej celej časti môžeme definovať priame periodické rozšírenie funkcie $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ predpisom

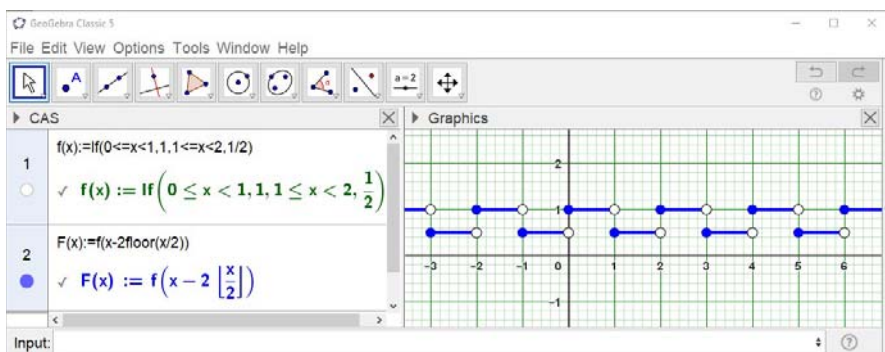
$$\tilde{f}(x) = f\left(x - \left\lceil \frac{x-b}{b-a} \right\rceil \cdot (b-a)\right).$$

Napríklad funkcia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pre ktorú platí

$$f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

musí byť periodická. Konkrétny príklad takejto funkcie (pozri obr. 1) môžeme zostrojiť ako priame periodické predĺženie funkcie definovanej po častiach predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{ak } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$



Obrázok 1. Priame periodické predĺženie

⁴Intervaly označujeme podľa normy STN EN ISO 80000-2. Teda napr. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

Funkcia signum

Ako sme uviedli vyššie, reálne číslo je buď kladné, buď záporné, alebo nula. To nás privádza k ďalšej neelementárnej funkcii. *Funkcia signum* je definovaná predpisom (pozri napr. [18] alebo [19])

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre } x > 0, \\ 0, & \text{pre } x = 0, \\ -1, & \text{pre } x < 0. \end{cases}$$

Funkciu signum zaviedol L. Kronecker v roku 1878 (pozri [11]). Všimnime si, že platí $|x| = x \operatorname{sgn}(x)$. Odtiaľ pre $x \neq 0$ dostávame $\operatorname{sgn}(x) = |x|/x$. Tento vzťah môžeme prepísať do tvaru $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$.

Pomocou doteraz uvedených funkcií definovaných po častiach môžeme funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá je riešením funkcionálnej rovnice

$$f(f(x)) = -x, \quad x \in \mathbb{R},$$

zapísať napríklad takto

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) - (-1)^{\lceil |x| \rceil} \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Graf tejto funkcie si môžeme vykresliť v programe GeoGebra takto:

`f(x)=sgn(x)-(-1)^(ceil(abs(x)))x`

Dirichletova funkcia

V knihe [18] je ešte uvedená *Dirichletova funkcia*, ktorá je definovaná predpisom

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \text{ racionálne,} \\ 0 & \text{pre } x \text{ iracionálne.} \end{cases}$$

Zaviedol ju L. Dirichlet v roku 1829 (pozri [6]). Ide o funkciu, ktorá je nespojitá v každom bode. Na rozdiel od predchádzajúcich funkcií definovaných po častiach, Dirichletovu funkciu nepozná ani GeoGebra ani Wolfram Alpha. Pritom ide o pomerne jednoduchý príklad funkcie, ktorá nie je Riemannovsky integrovateľná. Wolfram Alpha však pozná istú modifikáciu Dirichletovej funkcie, ktorú zaviedol J. Thomae v roku 1875 (pozri [26]) a ktorá sa v našej a ruskej literatúre zvykne nazývať *Riemannova funkcia*. Pôvod tohto názvu sa nám však nepodarilo zistiť. Wolfram Alpha túto funkciu pozná ako *Thomae function*. Môžete si to vyskúšať, napr. takto:

ThomaeFunction[x] where x=sqrt(2)

ThomaeFunction[x] where x=10/6

ThomaeFunction[x] where x=-5/3

Dirichletovu funkciu môžeme potom vyjadriť pomocou Riemannovej funkcie:

sgn[ThomaeFunction[x]] where x=sqrt(2)

sgn[ThomaeFunction[x]] where x=10/6

sgn[ThomaeFunction[x]] where x=-5/3

Riemannova funkcia je definovaná predpisom (pozri napr. [23])

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ak } x = \frac{p}{q}, \text{ kde zlomok } \frac{p}{q} \text{ je v základnom tvare,} \\ 0, & \text{ak } x \text{ je iracionálne.} \end{cases}$$

Napríklad $R(\sqrt{2}) = 0$, $R(10/6) = 1/3$, $R(-5/3) = 1/3$. Môžete si to porovnať s výpočtami v programe Wolfram Alpha, ako je uvedené vyššie.

Riemannova funkcia je nespojitá v racionálnych číslach a spojitá v iracionálnych číslach. Vyjadrenie $\chi(x) = \text{sgn}(R(x))$ sa v učebniciach uvádza na ilustráciu toho, že kompozícia dvoch Riemannovsky integrovateľných funkcií nemusí byť Riemannovsky integrovateľnou funkciou.

Úlohy

Na záver uvedieme na precvičenie niekoľko úloh zo zahraničnej literatúry.

Úloha 1. (Pozri [20]) Nech

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{ak } x \leq -3, \\ 2x^2 - 1 & \text{ak } -3 < x \leq 2, \\ -x/2 & \text{ak } x > 2. \end{cases}$$

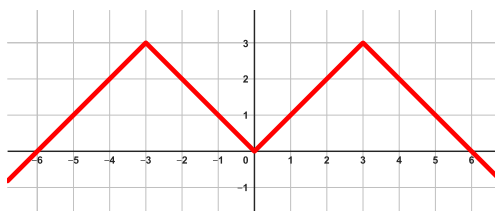
Pre ktoré hodnoty x je $f(x) = x$?

Úloha 2. (Pozri [16]) Nakreslite graf funkcie

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{4-x^2} & \text{pre } -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 - 4 & \text{pre } x > 0 \end{cases}$$

Nájdite všetky hodnoty k , pre ktoré rovnica $f(x) = k$ má (a) 0 (b) 1 (c) 2 korene.

Úloha 3. (Pozri [16]) Hamburgery McMaths majú modernizovať svoje logo, ako je uvedené na obr. 2. Vyjadrite túto funkciu ako funkciu definovanú po častiach, pomocou (a) 4 (b) 3 (c) 2 častí (t. j. pravidiel, ktoré definujú funkciu).



Obrázok 2. Návrh loga pre McMaths

Úloha 4. (Pozri [7]) Nech $f(x) = \begin{cases} 3 - x & x < 1 \\ ax^2 + bx & x \geq 1 \end{cases}$, kde a, b sú konštanty.

- Ak funkcia f je spojitá pre všetky x , aký je vzťah medzi a, b ?
- Nájdite také hodnoty a, b , pre ktoré je funkcia f spojitá a diferencovateľná.

Literatúra – References

- [1] Arnold, D., Intermediate Algebra, LibreTexts, 2007. [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Algebra/Intermediate_Algebra_\(Arnold\)](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Algebra/Intermediate_Algebra_(Arnold))
- [2] Calda, E., Rovnice ve škole neřešené, Prometheus, Praha, 1995.
- [3] Crauder, B., Evans, B., Noell, A., Functions and Change: A Modeling Approach to College Algebra and Trigonometry, Houghton Mifflin Company, 2008.
- [4] Данко, П. Е., Попов, А. Г., Кожевникова, Т. Я., Высшая математика в упражнениях и задачах, Учеб. пособие для втузов, Москва, Высшая школа, 1986.
- [5] Diehl, J., McGraw-Hill's SAT Subject Test: Math Level 2, McGraw-Hill Companies, 2009.
- [6] Dirichlet, J. P. G. L.: Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, Journal für die reine und angewandte Mathematik. 4, 1829, 157–169.
- [7] Garner, C., The AP Calculus Problem Book, Rockdale Magnet School for Science and Technology, 2008.
- [8] Gauß, C. F., Theorematis arithmetici demonstratio nova, Comment. Soc. Regiae Sci. Göttingen 16 (1808), 1–8.
- [9] Iverson, K. E.: A Programming Language, John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- [10] Johnson, G., Piecewise Defined Functions, Math Teacher's Resource, 2015. <https://mathteachersresource.com/instructional-content.html>
- [11] Kronecker, L.: Über Sturm'sche Functionen, Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin von Jahre 1878, 95–121.
- [12] Кузнецов, В. О.: Об элементарных и неэлементарных функциях, Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2014, 133–137.
- [13] Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. H.: Precalculus Functions and Graphs. A Graphing Approach, Houghton Mifflin Company, 2008.

- [14] Mishra, S., Fundamentals of Mathematics. Functions and Graphs, Pearson India Education Services, 2016.
- [15] Muleshkov, A. S., Sweat, K. R., Elementary Functions, College Mathematics Journal, vol. 53 (2021), 54–63. DOI: 10.1080/07468342.2022.1990675
- [16] Nicholas, J., Hunter, J., Hargreaves, J., Functions and Their Graphs, Mathematics Learning Centre, University of Sydney, 2006.
- [17] Odvárko, O., Ryšánková, M.: Matematika pre 2. ročník gymnázia. Funkcie II, SPN, Bratislava, 1998.
- [18] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, SPN, Praha, 1972.
- [19] Polák, J.: Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně, Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2014.
- [20] Ruczyk, R., Introduction to Algebra, AoPS Incorporated, 2007.
- [21] Senk, S. L., et al., Advanced Algebra, Scott, Foresman and Co., 1990.
- [22] Sisson, P., Precalculus, Hawkes Learning Systems, 2015.
- [23] Snoha, E.: Úvod do teórie funkcií. Záznam prednášok, UMB, Banská Bystrica, 2019. <https://www.fpv.umb.sk/l Snoha/ucebne-texty-k-vyucovaniu.html>
- [24] Stewart, J., Redlin, L., Watson, S., Panman, P., College Algebra: Concepts and Contexts, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
- [25] Sullivan, M., Sullivan, M. III., Algebra & Trigonometry: Enhanced with Graphing Utilities, Pearson Education, 2013.
- [26] Thomae, J.: Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale, Verlag von Louis Nebert, Halle, 1875.

Pod'akovanie: Článok vznikol s podporou grantu KEGA 012UPJŠ-4/2021 *Vývoj digitálnej knižnice interdisciplinárnych STEAM projektov a jej implementácia do informatického, matematického a prírodovedného vzdelávania na stredných školách.*

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: jozef.dobos@upjs.sk

Zadania úloh kategórie A

39. ročníka Olympiády v informatike

Informácie a pravidlá

Pre koho je súťaž určená?

Do kategórie A sa môžu zapojiť všetci žiaci (základných aj) stredných škôl.

Odovzdávanie riešení domáceho kola

Riešitelia domáceho kola odovzdávajú riešenia sami, v elektronickej podobe, a to priamo na stránke olympiády: <http://oi.sk/>.

Riešenia kategórie A je potrebné odovzdať najneskôr 15. 11. 2023.

Priebeh súťaže

Za každú úlohu domáceho kola sa dá získať od 0 do 10 bodov. Na základe bodov domáceho kola stanoví Slovenská komisia OI (SK OI) pre každú kategóriu bodovú hranicu potrebnú na postup do *krajského kola*. Očakávame, že táto hranica bude približne rovná *tretine maximálneho počtu bodov*.

V krajskom kole riešitelia riešia štyri teoretické úlohy, ktoré môžu tematicky nadväzovať na úlohy domáceho kola.

V kategórii A je približne najlepších 30 riešiteľov krajského kola (podľa počtu bodov, bez ohľadu na kraj, v ktorom súťažili) pozvaných do *celoštátneho kola*. V celoštátnom kole účastníci prvý deň riešia teoretické a druhý deň praktické úlohy. Najlepší riešitelia sú vyhlásení za víťazov. Približne desať najlepších riešiteľov následne SK OI pozve na týždňové výberové sústreďenie. Podľa jeho výsledkov SK OI vyberie družstvá pre Medzinárodnú olympiádu v informatike (IOI) a Stredoeurópsku olympiádu v informatike (CEOI).

Ako majú vyzerat' riešenia úloh?

V praktických úlohách je vašou úlohou vytvoriť program, ktorý bude riešiť zadanú úlohu. Program musí byť v prvom rade korektný a funkčný, v druhom rade sa snažte aby bol čo najefektívnejší.

V kategórii A musíte riešenia praktických úloh písať v jednom z podporovaných jazykov (napr. C++, Pascal alebo Java). Odovzdaný program bude automaticky otestovaný na viacerých vopred pripravených testovacích vstupoch. Podľa toho, na koľko z nich dá správnu odpoveď, vám budú pridelené body. Výsledok testovania sa dozviete krátko po odovzdaní. Ak váš program nezíska plný počet bodov, budete ho môcť vylepšiť a odovzdať znova, až do uplynutia termínu na odovzdávanie.

Presný popis, ako majú vyzeráť riešenia praktických úloh (napr. realizáciu vstupu a výstupu), nájdete na webstránke, kde ich budete odovzdávať.

Ak nie je v zadaní povedané ináč, riešenia teoretických úloh musia v prvom rade obsahovať *podrobný slovný popis použitého algoritmu, zdôvodnenie jeho správnosti* a diskusiu o efektívnosti zvoleného riešenia (t. j. posúdenie časových a pamäťových nárokov programu). Na záver riešenia uveďte program. Ak používate v programe netriviálne algoritmy alebo dátové štruktúry (napr. rôzne súčasti STL v C++), súčasťou popisu algoritmu musí byť dostatočný popis ich implementácie.

Usporiadateľ súťaže

Olympiádu v informatike (OI) vyhlasuje *Ministerstvo školstva SR* v spolupráci so *Slovenskou informatickou spoločnosťou* (odborným garantom súťaže) a *Slovenskou komisiou Olympiády v informatike*. Súťaž organizuje *Slovenská komisia OI* a v jednotlivých krajoch ju riadia *krajské komisie OI*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia informatiky.

Celoštátne kolo OI, tlač materiálov a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje NIVAM v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou OI.

A-I-1 Potrubná pošta

Toto je praktická úloha. Pomocou webového rozhrania odovzdajte funkčný, odladený program.

V budove úradu pre zbytočné otázky je dokopy n kancelárií. Majú na dverách čísla od 0 po $n - 1$. V každej kancelárii sedí jeden úradník, ktorý sa špecializuje na zbytočné otázky nejakého konkrétneho typu.

V každej miestnosti je terminál pre potrubnú poštu. Každý terminál má na sebe k koncoviek pre potrubia. Keď dve takéto koncovky prepojíme potrubím, vedú si potom prepojené kancelárie preposielať kapsuly so správami. To je veľmi praktické – umožní to úradníkom konzultovať s kolegami, ak dostanú klienta s neznámou témou zbytočnej otázky. Každé potrubie sa dá používať oboma smermi. Niektoré koncovky už sú prepojené potrubiami. Týchto už existujúcich potrubí je p .

Hovoríme, že dve kancelárie spolu vedú komunikovať, ak existuje spôsob, ako dostať poštu potrubiami z jednej z nich do druhej. Toto nemusí ísť priamo: správa

môže postupne prejsť cez viacero potrubí a viacero kancelárii, v ktorých ju vždy tamjší úradník prepošle ďalej iným potrubím.

Žiadne z už existujúcich potrubí nie je zbytočné. Inými slovami, pre každé z týchto potrubí platí, že keby sme ho odstránili, kancelárie, ktoré spája, už spolu nebudú vedieť komunikovať (ani nepriamo).

Úrad práve dostal nového riaditeľa. Ten sa rozhodol, že keďže je úplne zbytočné, aby úradníci medzi sebou vedeli komunikovať, je v duchu poslania úradu, aby mohli spolu komunikovať úplne všetci. Riaditeľ preto rozhodol, že je treba pridať nejaké nové potrubia – a to tak, aby po ich pridaní už vedeli komunikovať každé dve kancelárie.

Súťažná úloha

Tvojou úlohou je pridať nové potrubia tak, aby vo výslednej sieti potrubí vedela každá kancelária komunikovať s každou inou. Nové potrubia môžeš pridávať úplne ľubovoľne – niektoré z nich môžu byť aj zbytočné. Musíš si len dať pozor na to, že v každej miestnosti máš k dispozícii len obmedzený počet koncoviek na potrubia. (Ak pridáš zbytočné potrubie, ktoré má oba konce v tej istej kancelárii, spotrebuješ tým v nej dve koncovky.)

Formát vstupu a výstupu

V prvom riadku vstupu sú tri medzerou oddelené celé čísla: n , k a p .

Zvyšok vstupu tvorí p riadkov popisujúcich už existujúce potrubia. V každom z týchto riadkov sú dve celé čísla: čísla dvoch kancelárií prepojených potrubím. Je zaručené, že žiadne potrubie na vstupe nie je zbytočné a že v každej miestnosti je použitých najviac k koncoviek.

Ak žiadne riešenie neexistuje, vypíš na výstup jeden riadok a v ňom číslo -1 .

Ak riešenie existuje, ľubovoľné jedno zostroj a vypíš v nasledovnom formáte: v prvom riadku vypíš počet q nových potrubí, ktoré chceš pridať, a následne vypíš q riadkov popisujúcich tieto potrubia. V každom z týchto riadkov vypíš čísla dvoch kancelárií, ktoré chceš prepojiť.

Ľubovoľné platné riešenie s $q \leq 500\,000$ bude akceptované. (Pre každý vstup, pre ktorý existuje riešenie, existujú riešenia s výrazne menším q .) Nové potrubia môžeš vypisovať v ľubovoľnom poradí. Ich počet nemusí byť minimálny.

Obmedzenia a hodnotenie

Vstupy sú rozdelené do piatich sád. Za každú sadu, ktorú tvoje riešenie celú správne vyrieši, dostaneš príslušný počet bodov.

V každom vstupe platí $1 \leq n \leq 100\,000$, $0 \leq k \leq 100\,000$ a $0 \leq p \leq n - 1$.

V každej sade platia iné dodatočné obmedzenia pre veľkosť vstupu. Nájdeš ich v nasledujúcej tabuľke.

číslo sady	1	2	3	4	5
body	1	3	2	2	2
obmedzenia	$n = 5$	$2 \leq n \leq 10$	$2 \leq n \leq 10^2$	$2 \leq n \leq 3 \cdot 10^3$	$1 \leq n \leq 10^5$
	$k = 4$	$2 \leq k \leq 10$	$1 \leq k \leq 10^2$	$2 \leq k \leq 3 \cdot 10^3$	$0 \leq k \leq 10^5$

Príklady

vstup

5	2	2
0	3	
1	4	

výstup

3
0 2
2 1
4 3

Vstup popisuje päť kancelárií. V každej sú dve koncovky na potrubia. Máme dve už existujúce potrubia: jedno medzi kancelárkami 0 a 3, druhé medzi 1 a 4.

Vo vyššie ukázanom výstupe sme pridali tri nové potrubia, čím sme vyrobili „kruh“ potrubí vedúci cez všetky kancelárie. Tým sú zjavne všetky prepojené.

Existuje aj veľa iných platných riešení. Napr. ak by sme vynechali ľubovoľné jedno z týchto troch potrubí, ešte stále by sme mali platné riešenie.

vstup

6	4	4
0	1	
1	2	
3	4	
4	5	

výstup

2
1 4
5 5

V tomto príklade stačí na prepojenie všetkých kancelárií pridať jedno nové potrubie, ktoré bude mať na jednom konci niektorú z kancelárií 0, 1, 2 a na druhom konci niektorú z 3, 4, 5.

Na hociktoré z týchto potrubí máme v miestnostiach dosť voľných koncoviek, každé z nich teda predstavuje platné riešenie.

V našom príklade výstupu sme pridali potrubie 1 – 4 a okrem neho ešte jedno zbytočné potrubie, ktoré má oba konce v kancelárii 5. Toto potrubie ničomu nepomôže, ale ani nič nepokazí.

vstup

9	1	1
4	7	

výstup

-1

A-I-2 Farebný plot

Toto je praktická úloha. Pomocou webového rozhrania odovzdajte funkčný, odladený program.

Nedávno sme dostali oznam, že do nášho mestečka príde na návštevu pani prezidentka. Zavládla mierna panika: čo jej tu ukážeme? Nakoniec sa všetci zhodli na tom, že najzaujímavejšia vec, čo tu máme, je krásny dlhý a farebný plot. Pôjdeme ju previesť okolo neho. Hm, ale možno by bolo lepšie ten plot predtým premaľovať, nech vyzerá reprezentatívnejšie.

V celom mestečku si jediným vlastníkom štetca, preto niet divu, že ťa zvolili do jednočlenného výboru na revitalizáciu plota.

Súťažná úloha

Existuje 10^9 rôznych farieb. Majú priradené čísla od 0 po $10^9 - 1$.

Plot je tvorený n blokmi. Tie sú za radom očíslované od 0 do $n - 1$. Blok číslo i má momentálne farbu f_i .

Do návštevy prezidentky ostáva d dní. Za každý deň stíhaš premaľovať presne jeden blok plota. A aby to nevyzeralo, že prípravu flákaš, každý deň si **musíš vybrať** jeden blok plota a premaľovať ho – teda daný blok **musí zmeniť farbu** z tej, ktorú práve mal, na nejakú inú.

Chceš dosiahnuť, aby pri návšteve prezidentky bol celý plot jednej farby (je jedno ktorej). Ak to nejde, chceš aspoň dosiahnuť, aby bol na plote čo najdlhší súvislý úsek ktorý má celý jednu farbu.

Formát vstupu a výstupu

V prvom riadku vstupu je číslo $t \in \{1, 2\}$ udávajúce typ testu. V druhom riadku vstupu sú celé čísla n a d . V treťom riadku vstupu je n medzerami oddelených celých čísel $f_0, \dots, f_{n-1}$: začiatkové farby jednotlivých blokov plota.

Prvý riadok výstupu má obsahovať dĺžku najdlhšieho jednofarebného úseku, ktorý vieš vyrobiť.

Pre testy s $t = 1$ je dôležitý len tento riadok. Za ním môže vo výstupe nasledovať čokoľvek.

Pre testy s $t = 2$ je potrebné následne vypísať jeden konkrétny postup maľovania. Tento má tvoriť presne d ďalších riadkov. V j -tom z nich majú byť dve celé čísla: poradové číslo bloku b_j , ktorý chceš prefarbiť v j -ty deň, a číslo g_j novej farby pre tento blok. (Pripomíname, že nová farba sa vždy musí líšiť od aktuálnej farby daného bloku.)

Vypísaná postupnosť akcií musí viesť k tomu, že po poslednej z nich bude niekde na plote najdlhší možný jednofarebný úsek blokov. Ak existuje viacero optimálnych postupností akcií, môžeš vypísať ľubovoľnú z nich.

Obmedzenia a hodnotenie

Vo všetkých vstupoch platí $1 \leq n \leq 250\,000$ a $0 \leq d \leq 250\,000$.

Testovacie vstupy sú rozdelené do desiatich sád v ktorých platia rôzne ďalšie obmedzenia. Za každú sadu, ktorej všetky vstupy tvoj program správne a dostatočne efektívne vyrieši, dostaneš bod.

Sady s číslom 1 až 5 obsahujú len vstupy s $t = 1$. Sady s číslom 6 až 10 obsahujú presne tie isté vstupy ale s $t = 2$. Dodatočné obmedzenia, ktoré platia v jednotlivých sádach, uvádzame v nasledujúcej tabuľke.

číslo sady	obmedzenia
1, 6	malé čísla farieb, $d = 0$
2, 7	malé čísla farieb, $2 \leq n \leq 100$, $1 \leq d \leq 100$
3, 8	malé čísla farieb, $2 \leq n \leq 5\,000$, $1 \leq d \leq 5\,000$
4, 9	malé čísla farieb, primálo času, $2 \leq n$
5, 10	

Obmedzenie „malé čísla farieb“ znamená, že všetky farby použité vo vstupe majú čísla menšie ako 250 000. (Tvoje riešenie stále môže používať aj farby mimo tohto rozsahu.)

Obmedzenie „primálo času“ znamená, že v každom vstupe tejto sady je primálo času na to natrieť celý plot jednou farbou.

Príklady

vstup	výstup
2 5 2 7 3 7 7 9	5 4 7 1 7

Jediné optimálne riešenie je prefarbiť celý plot na farbu 7. Na to treba prefarbiť bloky s číslom 1 a 4. Tieto dve akcie môžeme spraviť v ľubovoľnom poradí.

vstup	výstup
2 5 1 10 20 30 40 50	2 1 30

Najlepšie, čo vieme tu dosiahnuť, je vyrobiť dva bloky rovnakej farby vedľa seba. Je veľa spôsobov, ako toto dosiahnuť. Po tom z ukázkového výstupu budú mať bloky 1 a 2 oba farbu číslo 30.

vstup	výstup
1	5
5 3	trikrat prefarbim
7 7 7 7 7	ten isty blok

Keďže ide o vstup s $t = 1$, dôležitý je len prvý riadok výstupu. Za ním môže nasledovať čokoľvek.

A-I-3 Policajti a zlodej

Toto je teoretická úloha. Pomocou webového rozhrania odovzdajte súbor vo formáte PDF, obsahujúci riešenie, spĺňajúce požiadavky uvedené v pravidlách.

Peter a Zuzka sa hrajú jednoduchú stolnú hru.

Jej hrací plán je obdĺžnikového tvaru. Je rozdelený na políčka, ktoré tvoria mriežku s r riadkami a s stĺpcami. Riadky sú očíslované od 0 po $r - 1$ zhora dole, stĺpce od 0 po $s - 1$ zľava doprava. Na hracom pláne sú tri figúrky: dvaja policajti a jeden zlodej. Peter posúva po pláne policajtov, Zuzka zase zlodeja.

Hráči ťahajú striedavo, Peter začína. Hráč, ktorý je na ťahu, si pre každú svoju figúrku vyberie jeden z piatich možných pohybov: buď ju nechá na mieste alebo ju pohne na jedno zo štyroch susedných políčok. Pohnúť figúrku mimo plánu je zakázané. Na každom políčku môže stáť ľubovoľne veľa figúrok naraz.

Peter hru vyhrá, ak niekedy aspoň jeden z policajtov príde na políčko, kde práve stojí zlodej. Zuzka hru vyhrá, ak to nikdy nedopustí – teda ak vie zlodejom hýbať tak, aby hra bežala do nekonečna.

Súťažná úloha

Napíš program, ktorý bude hrať hru za Petra. Po spustení by mal najskôr načítať zo vstupu rozmery hracieho plánu a súradnice všetkých figúrok. Potom by mal v cykle striedavo vypísať na výstup nasledujúci ťah, ktorý má spraviť Peter, a následne načítať zo vstupu popis ťahu, ktorý spravila Zuzka. (Detaily formátu vstupu a výstupu si zvol, ako uznáš za vhodné.)

Ak existuje v začiatkovej pozícii vyhrávajúca stratégia, tvoj program musí eventuálne hru vyhrať. Ak nie, musí korektne hrať do nekonečna.

Obmedzenia a hodnotenie

Plných 10 bodov môžu získať riešenia efektívne pre $r, s \leq 100\,000$. Takéto riešenie by malo obsahovať dostatočne podrobný popis stratégie pre Petra (program alebo pseudokód + slovný popis) a taktiež dostatočný **dôkaz správnosti** implementovanej stratégie.

Nanajvýš 6 bodov môžu získať riešenia efektívne pre $r, s \leq 8$.

Čiastočné body môžete získať aj za riešenie, ktoré len načíta popis konkrétnej začiatkovej pozície a zistí, ktorý z hráčov v nej má vyhrávajúcu stratégiu.

Príklad priebehu hry

Hrací plán má $r = 3$ riadky a $s = 4$ stĺpce. Policajti začínajú na pozíciách $(2, 0)$ a $(0, 1)$, zloděj na pozícii $(1, 2)$. Situácia teda vyzerá takto:

.	P	.	.
.	.	Z	.
P	.	.	.

Z tejto začiatkovej pozície mohla prebehnúť napríklad takáto partia hry:

- Peter: Pohnem prvého policajta doprava na $(2, 1)$ a druhého tiež doprava na $(0, 2)$.
- Zuzka: Jediný pohyb, po ktorom ma okamžite nechytí, je ten, čo spravím: pohnem zlodēja doprava na $(1, 3)$.
- Peter: Pohnem prvého policajta doprava na $(2, 2)$ a druhého dodola na $(1, 2)$.
- Zuzka: Mohla by som hru ešte o jeden môj ťah natiahnuť tým, že teraz pohnem zlodēja dohora, ale to by bol tento príklad zbytočne dlhý. Radšej už nechám zlodēja na mieste na políčku $(1, 3)$.
- Peter: Prvého policajta nechám na mieste a druhého pohnem na políčko $(1, 3)$, čím som chytil zlodēja.

A-I-4 O Vekslákbotovi a Pokladničke

Toto je teoretická úloha. Pomocou webového rozhrania odovzdajte súbor vo formáte PDF, obsahujúci riešenie, spĺňajúce požiadavky uvedené v pravidlách. K tejto úlohe patrí študijný text uvedený na nasledujúcich stranách. Odporúčame najskôr prečítať ten a až potom sa vrátiť k samotným súťažným úlohám.

Jednotlivé podúlohy sú hodnotené nezávisle, môžete ich riešiť v ľubovoľnom poradí. Pri hodnotení úloh domáceho kola budeme prihliadať len na korektnosť vašich programov – na ich efektívnosť (časovej zložitosti) nám nebude záležať. Vo všetkých troch podúlohách je na začiatku v Pokladničke $c > 0$ červených žetónov, $m > 0$ modrých žetónov a nič iné.

Podúloha A (3 body).

Napište program, po skončení ktorého bude v Pokladničke opäť $c + m$ žetónov, ale inej farby: ak bolo na začiatku viac červených ako modrých, majú byť všetky žetóny ružové, inak majú byť všetky žetóny tyrkysové.

Podúloha B (3 body).

Napište program, po ktorého skončení bude v Pokladničke presne c červených, m modrých a $c + m$ fialových žetónov. (Navyše v nej môže byť aj ľubovoľne veľa žetónov iných farieb.)

Upozorňujeme, že váš program musí skončiť – v záverečnej situácii sa už nesmie dať vykonať žiadna z jeho inštrukcií.

Podúloha C (4 body).

Napište program, po ktorého skončení bude v pokladničke presne $c \cdot m$ fialových žetónov a nič iné.

(Ak vyrobíte presne $c \cdot m$ fialových žetónov ale ešte vám ostanú aj žetóny iných farieb, dostanete 3 body. Ak navyše potrebujete mať pred začiatkom výpočtu okrem červených a modrých žetónov aj vami presne špecifikovanú sadu žetónov iných farieb, dostanete 2 body.)

Študijný text: O Vekslákbotovi a Pokladničke

Za 111 horami a 111 dolinami leží jedna prazvláštna krajina. V tejto krajine žijú samí roboti a ako platidlá používajú žetóny všetkých možných farieb od výmyslu sveta. V domčeku na úpätí ďalšej hory si tam spolu nažívajú dvaja hrdinovia nášho príbehu: roboti Vekslákbot a Pokladnička.

Ako možno tušíte z jej mena, Pokladnička v sebe rada uskladňuje všetky možné žetóny. Ako zrejme netušíte z jej mena, Pokladnička tiež veľmi rada vykonáva rôzne programy. A ako ste si po prečítaní predchádzajúcej vety úplne istí (koniec koncov, toto je študijný text Olympiády v informatike a nie len taká rozprávka), práve tieto programy pre ňu budete písať vy ako riešenia súťažných úloh.

Vekslákbot je majster vo vymieňaní žetónov: či už chcete vymeniť dva červené za tri modré alebo žltý a čierny za miliónpäť sivých, Vekslákbot určite pozná robota, ktorý pozná robota, ktorý s ním práve takú výmenu rád spraví. Vekslákbot má veľmi rád Pokladničku, a tak keď ho ona o hocikakú výmenu poprosí, okamžite (alebo, ako hovoríme my, v konštantnom čase) jej ju zabezpečí.

Podme sa teda pozrieť na to, ako vlastne budú vyzerat' programy pre našu Pokladničku.

Základy: vstup, výstup, program

„Vstupom“ pre Pokladničku budú jednoducho žetóny, ktoré má na začiatku v sebe. Neexistuje nijaký výstup. V zadaní rôznych úloh budeme rôzne definovať ciele, ktoré majú vaše programy dosiahnuť.

Program pre Pokladničku sa skladá z dvoch častí: *obmedzení*, ktoré musí dodržať, a *pokynov*, ktoré má vykonávať.

Obmedzenia

Prvou časťou programu pre Pokladničku je **konečná množina** obmedzení. (Táto množina môže byť aj prázdna.) Obmedzenia pre Pokladničku hovoria, najviac koľko žetónov konkrétnej farby, prípadne kombinácií žetónov rôznych farieb, smie mať naraz v sebe.

Formálne, obmedzenia sú lineárne nerovnosti nasledovného tvaru:

$$k_1 \cdot \text{farba}_1 + k_2 \cdot \text{farba}_2 + \dots + k_n \cdot \text{farba}_n \leq \text{limit}$$

pričom všetky koeficienty k_i aj limit sú konkrétne kladné celé čísla, zatiaľ čo farba_i sú premenné označujúce počet žetónov príslušnej farby v Pokladničke.

Príkladmi obmedzení sú napríklad nerovnosti „modrá ≤ 7 “ a „modrá + 2 · červená ≤ 3 “.

Ak sa nejakej farby netýka žiadne obmedzenie, môže byť v Pokladničke ľubovoľne veľa žetónov tejto farby.

Jedna inštrukcia

Každá inštrukcia pre Pokladničku má nasledovný tvar:

$$k_1 \cdot \text{farba}_1, \dots, k_n \cdot \text{farba}_n \rightarrow \ell_1 \cdot \text{farba}_{n+1}, \dots, \ell_m \cdot \text{farba}_{n+m}$$

Všetko naľavo od $\rightarrow$ budeme volať ľavá strana inštrukcie, všetko napravo zase pravá strana.

Všetky k_i aj ℓ_j musia byť kladné celé čísla. V rámci ľavej aj v rámci pravej strany inštrukcie musia byť všetky použité farby rôzne. Je povolené použiť tú istú farbu na oboch stranách inštrukcie. Je povolené mať $n = 0$ alebo $m = 0$, teda inštrukciu, ktorá má niektorú stranu prázdnu.¹

¹Povolené je mať prázdne aj obe strany inštrukcie, ale ako sa čoskoro dozvieme, program, v ktorom takúto inštrukciu použijeme, zaručene nikdy neskončí.

Príklady inštrukcií:

- 2 červená → 3 modrá
- 1 žltá, 1 čierna → 1 000 005 sivá
- 3 červená → 333 červená, 334 cyklámenová, 335 purpurová
- 2 zelená → $\emptyset$

Posledná inštrukcia z príkladu má prázdnu pravú stranu. Na zápis prázdnej strany inštrukcie budeme používať symbol prázdnej množiny, aby bolo jasné, že je prázdna úmyselne.²

V našich príkladoch budeme používať reálne názvy farieb. Vo svojich programoch môžete ako názvy farieb používať aj ľubovoľné iné alfanumerické reťazce. Je tiež OK pri zápise vynechať koeficient 1. Druhú z vyššie uvedených inštrukcií teda môžete zapísať aj „žltá, čierna → 1 000 005 sivá“.

Pokladnička vykoná inštrukciu tak, že zo seba vyberie sadu žetónov na ľavej strane inštrukcie, dá ich Vekslákbotovi a poprosí ho, aby jej za ne priniesol sadu žetónov z pravej strany. Vekslákbot to samozrejme promptne zabezpečí a Pokladnička do seba vloží žetóny, ktoré jej priniesol.

Ak v sebe Pokladnička nemá všetky žetóny, ktoré si vyžaduje ľavá strana inštrukcie, tak danú inštrukciu v danej chvíli vykonať nevie. Ak by napríklad mala len dva červené žetóny, nevie vykonať inštrukciu „3 červené → 333 červených“.

Pokladnička tiež nevie vykonať inštrukciu, ak by po jej vykonaní bolo porušené hociktoré z obmedzení.

Pokyny

Pokyny pre Pokladničku tvorí **konečná postupnosť** inštrukcií vyššie uvedeného typu. Zdôrazňujeme, že ide o postupnosť, a teda **záleží** na poradí inštrukcií.

Vykonávanie programu

Program sa vykonáva v krokoch. V každom kroku Pokladnička začne čítať pokyny od začiatku a číta ich, až kým nenájde prvú inštrukciu, ktorú vie momentálne vykonať. Tú inštrukciu vykoná. (Na zvyšok pokynov sa v tomto kroku už ani nepozrie. V ďalšom kroku začne znova čítať postupnosť inštrukcií od začiatku.)

Vykonávanie programu skončí, keď sa už žiadna inštrukcia v pokynoch nedá vykonať.

²Formálne môžeme povedať, že aj pravá aj ľavá strana každej inštrukcie obsahuje nejakú multimnožinu farieb. Prázdna strana inštrukcie je teda naozaj prázdna multimnožina.

Príklad 1: viac červených

Úloha: Na začiatku sú v Pokladničke nejaké červené a nejaké modré žetóny. Napíšte program, po ktorého skončení bude v Pokladničke práve jeden zlatý žetón a nič iné, ak bolo červených žetónov viac ako modrých. Vo všetkých ostatných prípadoch musí Pokladnička skončiť úplne prázdna.

Riešenie 1: bez obmedzení

Nebudeme mať žiadne obmedzenia. Pokyny budú vyzerat' takto:

1. červená, modrá $\rightarrow \emptyset$
2. červená, zlatá $\rightarrow$ zlatá
3. červená $\rightarrow$ zlatá
4. modrá $\rightarrow \emptyset$

Pri vykonávaní tohto programu bude Pokladnička najskôr používať inštrukciu 1, kým to ide. Keď to prestane ísť, má už v sebe buď len červené alebo len modré žetóny. Ak sú len modré, jediná inštrukcia, ktorá sa dá používať, je inštrukcia 4. Jej opakovaným použitím sa Pokladnička vyprázdni a program skončí.

Ak sú po skončení používania inštrukcie 1 v Pokladničke len červené žetóny, bude to o čosi komplikovanejšie. Jediná inštrukcia, ktoré sa dá v tejto situácii použiť, je inštrukcia 3: vymeníme jeden červený žetón za jeden zlatý. Od tejto chvíle sa už inštrukcia 3 nepoužije, a to preto, že už sa dá používať inštrukcia 2. Tou sa Pokladnička postupne zbaví zostávajúcich červených žetónov. Akonáhle v nej ostane len samotný zlatý žetón, už sa nedá použiť žiadna inštrukcia, a teda výpočet končí.

Riešenie 2: s obmedzením

Budeme mať jedno obmedzenie: $\text{zlatá} \leq 1$.

Pokyny budú vyzerat' takto:

1. červená, modrá $\rightarrow \emptyset$
2. červená $\rightarrow$ zlatá
3. červená $\rightarrow \emptyset$
4. modrá $\rightarrow \emptyset$

Tentokrát sa v situácii, kedy sú v Pokladničke len samé červené žetóny, najskôr raz vykoná inštrukcia 2 (jeden vymeníme za zlatý) a potom sa už bude používať inštrukcia 3, až kým sa všetky červené neminú. Obmedzenie, ktoré sme si zvolili, totiž bráni Pokladničke opakovane využiť inštrukciu 2.

Príklad 2: súčet

Úloha: Na začiatku je v Pokladničke $c > 0$ červených žetónov, $m > 0$ modrých a jeden zelený. Napíšte program, po ktorého skončení bude v Pokladničke presne c červených, m modrých a $c + m$ fialových žetónov.

Riešenie: Keby sme len chceli dostať $c + m$ fialových žetónov, stačilo by vymeniť všetky červené aj všetky modré za fialové „s kurzom jedna k jednej“. Ako ale nestratiť pôvodné žetóny?

Naše riešenie nebude mať žiadne obmedzenia a bude mať nasledujúce inštrukcie:

1. červená, zelená $\rightarrow$ tmavočervená, zelená
2. modrá, zelená $\rightarrow$ tmavomodrá, zelená
3. zelená $\rightarrow$ žltá
4. tmavočervená, žltá $\rightarrow$ červená, fialová, žltá
5. tmavomodrá, žltá $\rightarrow$ modrá, fialová, žltá
6. žltá $\rightarrow \emptyset$

Všimnite si, ako náš program používa prítomnosť zeleného a žltého žetónu v Pokladničke: pomocou nich vieme rozlíšiť, či ešte premieňame pôvodné červené a modré žetóny alebo či už naspäť vznikajú nové.

Za Slovenskú komisiu Olympiády v informatike spracovali

Michal Anderle <zaba@ksp.sk> a Michal Forišek <misof@ksp.sk>.

Sedem desaťročí Matematickej olympiády

Vojtech Bálint

Abstract: A subjective view of seven decades of the Mathematical Olympiad and the connection with the teaching of mathematics in schools.

Keywords: Mathematical Olympiad

Súhrn: Subjektívny pohľad na sedem desaťročí Matematickej olympiády a súvislosť s vyučovaním matematiky na školách.

Kľúčové slová: matematická olympiáda

MESC: M50

Dokončenie z predchádzajúceho čísla¹.

Záverečné poznámky a úvahy

Ja som pri MO od roku 1973 vďaka doc. Janke Feťkovej, ktorá ma k tej práci priťahovala. Najprv som robil ako vedúci pre kategóriu C v Stredoslovenskom výbore MO (okrem organizovania kôl a koordinácie riešení aj sústredenia), neskôr ako predseda KVMO. Je takmer isté, že keby som nevenoval toľko času matematickej olympiáde, mal by som viac peňazí. Ale napriek tomu: Janka, ďakujem.

Nepísal som tu o všetkých akciách v rámci MO, napr. Česko-poľsko-slovenské stretnutie, Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov, výberové sústredenia, EGMO, KMS a iné semináre; ba ani o sústreďení českého a slovenského družstva, ktoré bolo vždy financované českou stranou zo súkromných zdrojov pod záštitou *Společnosti Otakara Borůvky* - za toto patrí českým kolegom veľké ďakujem.

Úsmevná spomienka. V roku 2003 na IMO v Tokiu som na zasadnutiach Jury sedel v lavici s lídrom Švédska, Paulom Vaderlindom. Po hodinku po odovzdaní *HARD-NICE* formulárov, keď som videl ich sumarizovanie, položil som na stôl malý papierik so zoznamom 6 úloh aj s poradím, ako ich vyberieme. Paul sa usmial. Keď sme po troch dňoch úlohy vybrali, Paul sa prihlásil o slovo a povedal, že mohli sme si tri dni hádania ušetriť, lebo líder SVK mal výsledok po hodinu po odovzdaní *HARD-NICE* formulárov.

¹ Obzory matematiky, fyziky a informatiky, volume 52, number 2, pages 34-57, ISSN 1335-4981, 2023. Vojtech Bálint, Sedem desaťročí Matematickej olympiády

Pretože vhodnej študijnej literatúry pre riešiteľov MO bolo počas prvých 10 ročníkov súťaže málo (a pre mladších dodávam neuveriteľnú informáciu, že web ešte neexistoval), začal ÚVMO od roku 1961 vydávať v nakladateľstve Mladá fronta edíciu Škola mladých matematikov, v ktorej do roku 1980 vyšlo 47 zväzkov a aj tri zbierky vybraných riešených úloh. Mnohokrát vyšli reedície a postupne aj nemálo ďalších zväzkov. Ak sú moje informácie správne, tak posledný zväzok mal poradové číslo 61 a vyšiel v roku 1988 pod názvom *Úlohy o veľkých číslach* (Ivan Korec).

Potom prišla Nežná revolúcia a postupom času začali vychádzať najrôznejšie „učebnice“ pochybnej kvality. Neboli určené ako doplnková literatúra pre MO, ale bolo to oveľa horšie, lebo boli určené pre školstvo, teda pre najširšiu množinu žiakov. Nikto odborne fundovaný to nedokázal zastaviť, ba ani naše cechové organizácie JSMF a SMS; každý sa bál obvinenia, že nie je demokrat, lebo rôznosť názorov je predsa v demokracii vítaná... Nuž, rôznosť názorov je vítaná, napr. vo filozofii, ale v exaktnej disciplíne, akou matematika je, nemá čo hľadať. A nikto z autorov tých „učebníc“ nie je ochotný priznať, že o peniaze išlo (a stále ide) až v prvom rade; učebnice, cvičebnice, osvetľovníky, pracovné listy a podobné materiály pre ZŠ (a dnes už aj pre stredné školy) sa totiž vydávajú opakovane a v takých počtoch, o ktorých sa kvalitným učebniciam matematiky pre vysoké školy môže len snívať. Môžeme sa teda spýtať: naozaj urobili JSMF, SMS, MÚ SAV SR a vlajkové lode vyučovania všetko na obranu kvality vyučovania matematiky?

Korešpondenčné semináre KMS, STROM a mnohé ďalšie (ich zoznam je dlhý) sú veľmi užitočné, lebo umožňujú žiakom dlhšie premýšľať a pracovať aj s literatúrou, čím sa významne rozširujú a prehlbujú vedomosti súťažiacich. Toto sa najviac podobá práci matematika alebo iného vedca: môžeš použiť čo chceš, naštudovať problematiku, máš viac času... Je to obrovský rozdiel s MO, kde ide o prácu na čas a bez akejkoľvek pomoci, takže: *tu a teraz!* Ale MO a jej vrcholná časť IMO je práve typu *tu a teraz*. A keď o tom viac premýšľame, tak zistíme, že činností typu *tu a teraz* je v skutočnosti veľmi veľa: vodič autobusu, hasič, lekár záchrannej služby, športovec, ...

Politické problémy v minulosti vznikali nielen s usporiadaním športových súťaží. Okrem postupu Rumunov s nepozvaním silných súperov v roku 1978 a okrem spomínaného absolútne neprijateľného zásahu ministerstva školstva do MO v ročníku 1982 – 83 sa v roku 1987 prof. J. Gillis, ktorý bol vedúcim izraelskej delegácie na niekoľkých IMO, poťažoval listom tajomníkovi výboru IMO prof. Johnu Herseemu, že Izrael nebol pozvaný na IMO ani Kubou v roku 1987, ani Československom v roku 1984. Výhovorka, že Izrael v tej dobe nemal diplomatické styky s ČSSR, bola detinská, lebo napriek chýbajúcim diplomatickým stykom bol Izrael pozvaný na IMO do Maďarska v roku 1982 a aj do Poľska v roku 1986. Odmietnutie vstupných víz Pakistanským žiakom do Španielska v roku 2008 som už tiež spomenul v príslušnom ročníku. Boli ale aj iné problémy tohto typu.

Matematická indukcia, ročenka č. 15, str. 166-167 o 8. IMO: „*Naši žiaci robia chyby v dôkaze matematickou indukciou a pritom ide o matematické remeslo, ktoré by mal ovládať každý priemerný stredoškolač. Z riešení našich žiakov je zrejmé, že sa zanedbáva aj logická stránka výuky; je to vidieť na ich vyjadrovaní, ktoré je nedbalé a často nesprávne... Žiaci sa často pachtia za štúdiom tzv. vyššej matematiky, ale tento aparát používajú nevhodne alebo dokonca nesprávne, pričom stredoškolskú látku do hĺbky nepoznajú.*“

O tom, že naši žiaci ani po 46 rokoch nevedia použiť matematickú indukciu, sme sa presvedčili na IMO v roku 2013 (viac o tom nájdete v článkoch [9] a [10] od Paľka Novotného a mňa). Dovolím si tu apelovať na tých – najmä mladých – kolegov a kolegyné, ktorí s obľubou používajú slovné spojenie „*školská matematika*“ a v horšom prípade dokonca „*škaredá školská matematika*“: netreba lietieť veľmi vysoko, lebo pád je potom tvrdý; pre dosiahnutie vyšších sfér neraz stačí použiť klasický rebrík, ktorý by sme nemali vyhodíť...

Už na 1. IMO v roku 1959 vznikla debata aj o modernizácii vyučovania. Maďarský delegát reagoval tak, že skôr ako sa zavedú nové partie, bude treba rozhodnúť o tom, ktoré doterajšie partie osnov sa vynechajú. Sovietsky a Bulharský delegát konštatovali v súlade s reakciou Maďarského delegáta, že predsa žiaci sú preťažení už teraz.

Téma modernizácie rezonuje aj dnes a objavuje sa vo volaní po permanentnej reforme školstva najmä u tých, ktorí látku síce do hĺbky neovládajú, ale chceli by žiakom uľahčiť získanie vedomostí. A tak sami seba pasujú do role, že oni to vysvetlia... Tak vznikajú „nové metódy“: funkcia je automat na žuvačky; funkcie sú maľovanky; vyrieš funkciu; odmocninu zo záporného čísla mať nemôžeš (to všetko pre strednú školu); autorka nerozlišuje (v 9. ročníku ZŠ) medzi definíciou a vetou; v lichobežníku sa z daných údajov vo vzorovom príklade dvomi spôsobmi vypočíta výsledok, v ktorom je súčet dĺžok troch jeho strán menší ako dĺžka štvrtej strany (skúste si to nakresliť); pravouhlosť nakresleného trojuholníka sa dokazuje meraním dĺžok jeho strán (to je obzvlášť vhodné v slávnom prípade, keď prepona je uhlopriečkou jednotkového štvorca, ale navyše platí, že pravouhlých trojuholníkov s racionálnymi dĺžkami všetkých strán je zanedbateľne málo v porovnaní so všetkými pravouhlými trojuholníkmi, takže meraním nám to vyjde málokedy); alebo ak výsledok je napr. zlomok $30/42$, tak čísla sa dajú zmenšiť napr. na $5/7$, pričom autor sa striktne vyhne každému pravidlu, v tomto prípade pre krátenie zlomkov, lebo *odovzdávanie hotových vedomostí je intelektuálne príživníctvo* (čo Vy na to, sir Isaac Newton, so svojou polohou na pleciach obrov)... Potom majú fyzici problém vysvetliť, že 1 meter a 2 litre sa nedajú sčítať a určite to nie sú 3 kilogramy, ale čo má robiť dieťa, ktoré sa učilo, že $1 \text{ myš} + 1 \text{ myš} = 1 \text{ mačka}$, čo je zaujímavé aj číselne.

Pozoruhodné je aj posmešné používanie slova *bifľovanie*. Napr. je zakázané *bifľovať* sa násobilku, násobenie treba predsa chápať. Nuž čo, $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$ je

na pochopenie výborná vec a dobrý učiteľ to vysvetlí napr. na 6 osobách v dvoch radoch a troch stĺpcoch alebo naopak – ak sa na tie osoby pozrieme zboku, máme hneď aj komutatívnosť. Ale už pri 7×8 je rýchlejšie namiesto chápania zapojiť nabíľňovaný výsledok 56. Herci musia mať nabíľňované takmer všetko a ten kto chce predniesť Sládkovičovu *Marínu*, tak všetko. A všimnite si, čo robí Mikaela Shiffrin a ďalší lyžiari tesne pred súťažou: opakujú si čerstvo nabíľňovanú trať. Lekári a právnici by mali mať nabíľňované naozaj veľa strán a aj najmenšia odchýlka od presnej formulácie môže byť veľmi drahá. Ale v matematike vraj žiak na všetko príde aj sám, takže zakážeme nabíľňovať sa, napr. 3 strany definícií a 5 strán viet (čím by študent ukázal, že aspoň o niečo sa snažil).

Samozrejme, vývoj sa nedá zastaviť, napr. klasická deskriptívna geometria už dávno nie je v osnovách stredných škôl, do popredia sa dostala teória grafov a diskretná matematika vo všeobecnosti – právom. Lenže nezaškodí si uvedomiť, že napr. László Lovász, jeden z najvýznačnejších matematikov za posledných asi 40 rokov (na IMO 3-1-0 a ešte dve špeciálne ceny; PhD dostal o rok skôr, ako univerzitný diplom; nositeľ množstva najvyšších ocenení, napr. *Abel Prize*, *Kyoto Prize*, *Wolf Prize*, ...), tak tento Laci Lovász na otázku čo by sa mohlo zo stredoškolských osnov vynechať odpovedal, že určite nie klasická euklidovská geometria, lebo tá je najnázornejším základom logického myslenia a štruktúry vedeckej disciplíny axióm – definícia – veta – dôkaz. Lenže podľa reformátorov on tomu predsa nerozumie...

V kategóriách MO pravdepodobne dôjde k možno aj výrazným zmenám, pretože už neexistujú celoštátne osnovy a v dôsledku školských vzdelávacích programov vznikajú niekedy až neprekonateľné rozdiely v obsahu učiva na rôznych školách. Zásadná zmena sa bude týkať najprv ZŠ, kde budú možno len dve kategórie. Pre zaujímavosť pripomínam, že už koncom 19. storočia Henri Poincaré a podobní „bezvýznamní vedci“ spustili iniciatívu zjednotiť osnovy matematiky v Európe tak, aby maturitné vysvedčenie od Lisabonu po Lemberg malo rovnakú výpovednú hodnotu o vedomostiach. Viac o tom nájde záujemca napr. v [12], [15].

Čitateľ si zrejme všimol, že zakladateľ MO, profesor Čech, mal výborné kontakty s neskorším ministrom školstva, dr. Františkom Kahudom. Takže zakladateľ MO bol partnerom pre ministra školstva. Dokonca ešte aj ja som mal možnosť priamej komunikácie s ministrom školstva, i keď sa už bolo treba prebojovať cez ľudí, ktorí sa stavali do pozície nutného prostredníka medzi mnou a ministrom. Ale Murphyho zákony fungujú neúprosne, takže čitateľ môže popremýšľať o tom, kto je dnes partnerom predsedu matematickej olympiády. Presnejšie: koľko osôb je medzi ministrom školstva a predsedom SKMO?

Keď v roku 1951 v ČSR ministerstvo školstva vyhlásilo súťaž zvanú MO, samozrejme poskytlo na ňu aj peniaze a učitelia matematiky tú súťaž organizovali. Bolo to v čase, keď email ani mobil nebol, kopírovať sa dalo naozaj len cez kopirák, alebo

neskôr tzv. modráskom, ale na to už bolo treba povolenie... Určite nie všetko bolo ideálne, ale naši veľkí predchodcovia to zvládli.

Dnes je situácia mierne dramatická. Pokiaľ sú moje informácie správne (a mám ich od predsedu doc. Tomáša Bártu), v ČR už nie je ministerstvo školstva vyhlasovateľom olympiád, teda nie sú zaručené financie. Preto predsedovia českých olympiád spoločne napísali na ministerstvo list. Odpoveď bola, že peňazí je dosť, len treba napísať projekty. Je absurdné, ak sa musia písať projekty na súťaž s jasnými pravidlami a vyše 70-ročnou tradíciou. Navyše, čo v prípade, ak o takom projekte bude rozhodovať človek typu „mne matematika nikdy nešla“ – lebo takých je aj v ČR na vysokých postoch dosť...

Na Slovensku je toho času situácia iná; pokiaľ viem, MŠ SR stále je vyhlasovateľom súťaží – aspoň tak je to napísané na stránkach NIVaM (nový úrad, ktorý nahradil Iuventu). Ale nie je možné zistiť úroveň dnešného financovania MO a už vôbec nie je možné porovnať ho s inými súťažami. Pritom NIVaM má peniaze od ministerstva školstva, ktoré má peniaze samozrejme od daňových poplatníkov... Platí to isté, čo som napísal vyššie, ale pre istotu to zopakujem. Je absurdné, ak sa budú musieť písať projekty na súťaž s vyše 70 ročnou tradíciou a jasnými pravidlami zakotvenými v Organizačnom poriadku. Navyše, čo v prípade, ak o takom projekte bude rozhodovať človek typu „mne matematika nikdy nešla“? Majú naše cechové organizácie JSMF a SMS silu, aby takej situácii zabránili a ak taká predsa len nastane, tak aby presadili zdravý rozum?

Zrejme by ministrom školstva bolo treba znovu pripomenúť dôvody vyslania observera: aby líder nespal len dve hodiny zo 60 veľmi tvrdých pracovných hodín, a aby mladší získali skúsenosti, ktoré im umožnia tých starších plnohodnotne nahradiť.

Dovolím si na záver malú úvahu o (ne)vzdelanosti. Podnetom bola okrem iného nedávna správa, že pán D. H. sa zúčastnil ako porotca na jednej literárnej súťaži pre deti. To je v poriadku, lebo pán D. H. je človek od pera, teda literát. Lenže pán D. H. pri tej sláve redaktorovi povedal, že všetko bolo výborné, až kým neprišiel niekto, kto povedal „definuj to“. A toto už v poriadku nie je. Pán D. H. (a nielen on) sa totiž dehonestujúco vyjadruje o veciach, ktorým vôbec nerozumie. Pojmy sa definujú nie len preto, aby vyjadrovanie sa bolo kratšie, ale najmä preto, aby napr. Francúz, Austráľčan, Japonec a aj Ján Ponec vedeli, že hovoria o tom istom. Je to dôležité, lebo ak ľudia nemajú jasno o pojmoch, tak nevedia o čom hovoria a vznikajú úplne zbytočné a neraz hodne drahé debaty. Toto platí úplne všeobecne, teraz sa ale vráťme k matematike. Takže si dovoľm pridať malý dodatok pre D. H. a pre všetkých, ktorí sa v súvislosti s matematikou neraz pýtajú, že načo je to dobré. Dalo by sa ironicky odpovedať, že veľmi veľa ľudí sa v plnom šťastí dožilo vysokého veku aj bez toho, aby vedeli, kedy bola bitka na Bielej Hore, ba dokonca nikdy sa nedozvedeli ani to, že tam nejaká bitka bola. Alebo nikdy nepočuli o dramatikovi Williamovi

Shakespearovi. Alebo nevideli muzikál Povolanie pápež. Ale sme za širšiu vzdelanosť, takže lepšia odpoveď je asi táto: „*Keby sme ľudom, čo kladú také otázky, odobrali všetko, čo pri svojej výrobe použilo matematiku, tak by nemali nielen mobil a iné vymoženosti, ale dnes by už väčšina z nich nemala ani oblečenie.*“

Na ilustráciu skrátenia vyjadrovania sa uvediem odstrašujúci príklad, ako by vyzerala veľmi užitočná a krásna teórema, ktorú si aj veľmi slabý študent zapamätá aspoň v skrátenom tvare: „*Súčet spojitých funkcií je spojitá funkcia.*“ Takže najprv definícia spojitosti funkcie v bode b sprava.

Budeme hovoriť, že funkcia f je spojitá v bode b sprava práve vtedy, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x \in (b, b + \delta)$ je $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$.

Potom sa dokáže napr. táto

Veta. *Ak funkcie f, g sú spojité v bode b sprava, tak aj ich súčet je funkcia spojitá v bode b sprava.*

Tú vetu zďaleka nie každý študent vie dokázať (a dnes sa to už požaduje len pre študentov matematiky), ale určite si ju vie zapamätať, prinajmenšom v skrátenej (nie celkom presnej) verzii, ktorú som uviedol už vyššie: Súčet spojitých funkcií je spojitá funkcia.

A teraz napíšeme tú vetu bez definície spojitosti, ale samozrejme tak, aby presnosť ostala zachovaná.

Veta. *Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Nech existuje $\delta_1 > 0$ také, že pre každé $x \in (b, b + \delta_1)$ je $|f(x) - f(b)| < \varepsilon/2$ a nech existuje $\delta_2 > 0$ také, že pre každé $x \in (b, b + \delta_2)$ je $|g(x) - g(b)| < \varepsilon/2$. Označme δ menšie z čísel δ_1, δ_2 . Potom pre každé $x \in (b, b + \delta)$ platí $|(f(x) + g(x)) - (f(b) + g(b))| < \varepsilon$.*

Tak túto formuláciu tej užitočnej a krásnej vety by sme ani my, učitelia matematiky, neradi používali...

Ak niekto bude chcieť písať podrobnejšie o histórii MO, tak jeden z najprirodzenejších zdrojov informácií budú zrejme Ročenky. Dovolím si upozorniť, že najmä v starších Ročenkách sa dosť málo pozornosti venovalo správneho zápisu geografických názvov a mien účastníkov. Takže budúci pisatelia by mali čerpať aj z iných zdrojov. (Z tohto hľadiska je situácia rovnaká v tom najširšom slova zmysle: znalosť dejepisu len z jedného zdroja svedčí o neznalosti problematiky dejín. Lebo dejiny a dejepis nie sú to isté, zhodujú sa len v niektorých faktoch...)

Aj touto cestou ďakujem Dr. Jaroslavovi Švrčkovi, ktorý má nehynúcu zásluhu na tom, že v nakladateľstve UP Olomouc boli vydané niektoré chýbajúce ročenky MO, na ktoré sa po roku 1989 nenašli peniaze, ba dokonca bola snaha zrušiť MO.

Na záver ďakujem všetkým učiteľkám a učiteľom, ktorí podporujú účasť svojich žiakov v MO, opravujú riešenia a venujú im svoj čas, pričom odmenou je im obvykle len úspech ich žiakov v súťaži.

L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s ²

- [1] Pohľad na vyučovanie matematiky na stredných školách SR cez optiku medzinárodných súťaží. In: *Obzory matematiky, fyziky a informatiky* 31 (1) (2002), 31-38. ISSN 1335-4981.
- [2] Matematická olympiáda v rokoch 1999-2001. In: *Zjazdový zborník JSMF*, Nitra 2002, 55-61.
- [3] Správa o konci (?) Matematickej olympiády. In: *Zborník 35. konferencie JSMF s medzinárodnou účasťou*, Jasná pod Chopkom, november 2003, 29-33. ISBN 80-8070-144-X.
- [4] Prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc. sedemdesiatročný. In: *Obzory matematiky, fyziky a informatiky* 33 (1) (2004), 65-68. ISSN 1335-4981.
- [5] Matematická olympiáda v rokoch 2002 – 2004. In: *Zborník zjazdu JSMF*, Nitra 2005, 53-60.
- [6] Medzinárodná matematická olympiáda v Slovinsku. In: *Obzory matematiky, fyziky a informatiky* 35 (4) (2006), 64-67. ISSN 1335-4981.
- [7] Matematická olympiáda v rokoch 2005 – 2007. In: *Zborník zjazdu JSMF*, Nitra 2008, 45-50.
- [8] Je treba pestovať súťaže pre talenty? In: *Obzory matematiky, fyziky a informatiky* 38 (2) (2009), 17-21. ISSN 1335-4981.
- [9] Úplná indukcia (prvá časť). In: *Obzory matematiky, fyziky a informatiky* 43 (1) (2014), 3-10. ISSN 1335-4981. Spoluautor: Pavel Novotný.
- [10] Úplná indukcia (druhá časť). In: *Obzory matematiky, fyziky a informatiky* 43 (3) (2014), 1-12. ISSN 1335-4981. Spoluautor: Pavel Novotný.
- [11] Hungarian Mathematics Development Stimuli, In: *Antiquitates Mathematicae*, 14 (2020), 39-53.
- [12] The Development of Mathematics Between the World Wars, Martina Bečvářová (ed.), World Scientific 2021, 604 pages.
- [13] Leo Boček, Jaromír Šimša, Pavel Töpfer: 70 let matematické olympiády. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, ročník 66 (2021), č. 2, str. 120-125.
- [14] Spomienka na vzácného človeka – Doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc. by sa v tomto roku dožil 75 rokov. In: *Obzory matematiky, fyziky a informatiky* 52 (1) (2023), 55-58. ISSN 1335-4981.
- [15] László Rácz – učiteľ géniov, In: *Obzory matematiky, fyziky a informatiky* 49 (4) (2020), 22-28. ISSN 1335-4981.
- [16] Ročenky MO č. 1-63; tlačené verzie sú dostupné v knižniciach niektorých stredných škôl, na webe SKMO sú dostupné ročníky 43-63.
- [17] Na oficiálnych stránkach SKMO, IMO resp. Českej komisie MO <https://www.skmo.sk>; <https://www.imo-official.org>; www.matematickaolympiada.cz nájde záujemca aj odkazy na iné súvisiace stránky, napr. korešpondenčné semináre, matematické súťaže iných krajín a podobne.

Adresa autora: Vojtech Bálint, Nám. L. Fullu 21, 010 08 Žilina,
e-mail: vojtech.balint@gmail.com

² Položky [9]-[12] a [15] použitej literatúry sú na príslušnom mieste citované; pri ostatných (ktoré som písal v čase, keď som bol predsedom SKMO) už ich názvy ukazujú, o čom sú, takže som nepovažoval za nutné citovať ich explicitne.

Energia odrazených loptičiek

Jozef Beňuška

Abstract: The article deals with real collisions of bodies in the form of a research activity. Real body-body collisions differ from perfectly elastic or perfectly inelastic collisions. Real precipitation is influenced by a number of parameters of the substance as well as the environment (for example, temperature). At the end of the article, there are attached tested worksheets that the author's students work with.

Keywords: collision of bodies, transformation of mechanical energy, research activity, worksheets

Súhrn: Článok sa venuje reálnym zrážkam telies formou bádateľskej aktivity. Reálne zrážky telies sa líšia od dokonalo pružných, či dokonalo nepružných zrážok. Na reálne zrážky vplyva množstvo parametrov látky ako aj okolia (napríklad teplota). V závere článku sú priložené odskúšané pracovné listy, ktorými žiaci autora pracujú.

Kľúčové slová: zrážka telies, premena mechanickej energie, bádateľská aktivita, pracovné listy

MESC: M50

1 Úvod

Deti sú zvedavé a ich zvedavosť by sme mali podporovať. Existujú aktivity, ktoré sú pre žiakov motivujúce a majú potenciál zaujať žiakov, zároveň súvisia s obsahom učiva a umožňujú osvojiť si poznatok bádaním.

Bádanie z pohľadu žiaka súvisí s aktivitami, prostredníctvom ktorých si žiaci budujú poznatky a porozumenie javom ako aj pochopenie toho, ako vedci svet okolo nás skúmajú. Bádanie predstavuje spektrum činností, ktoré zahŕňajú pozorovanie, kladenie otázok, štúdium literatúry a ďalších informačných zdrojov na posúdenie toho, čo je už známe; plánovanie skúmania; posúdenie a zhodnotenie toho, čo je už známe vo svetle experimentálnych dôkazov; používanie nástrojov na zber, analýzu a interpretáciu dát; návrh odpovedí, vysvetlení a predpovedí a zdieľanie výsledkov.

Žiaci na všetkých úrovniach prírodovedného vzdelávania by mali mať dostatok príležitostí realizovať bádanie a rozvíjať schopnosti myslieť a konať bádateľským spôsobom.

Bádateľské aktivity v pravom slova zmysle, t.j. so všetkými jej elementmi nie je jednoduché uskutočniť v triede. Od žiakov nemôžeme očakávať, že budú schopní okamžite navrhnuť a realizovať skúmanie so všetkým, čo k tomu patrí.

V tomto príspevku poskytujeme užívateľom pracovné listy pre žiakov, ktoré umožňujú realizovať:

-potvrdzujúce bádanie (*Confirmation inquiry*). Žiaci potvrdzujú platnosť nejakého zákona (poznatku, súvislosti) v aktivite, ktorej výsledok už poznajú.

-štruktúrované bádanie (*Structured inquiry*) Žiaci riešia problém sformulovaný učiteľom na základe pripraveného postupu.

Veríme, že tu prezentovaná problematika lôpt a loptičiek je deťom natoľko blízko, že ich zaujme.

2 Energia odrazených loptičiek

Lopta je guľatý predmet používaný v mnohých športoch a hrách. Obvykle je vyrobená z kože, gumy alebo plastickej hmoty. Lopty sú väčšinou duté, naplnené stlačeným vzduchom. V niektorých športoch sa používajú guľaté predmety vyrobené z kovu, dreva alebo pevnej umelej hmoty. V takých prípadoch obvykle hovoríme o guli (napr. biliard).

Lopty boli využívané na hry už v staroveku Egypte, Grécku a Ríme, aj Aztékmi v Strednej Amerike. Počas storočí sa vyvinulo veľké množstvo rôznych loptových hier.

Zatiaľ čo pre väčšinu ľudí sú lopty skôr nenáročné objekty určené na zábavu, v skutočnosti slúžia ako zaujímavý odrazový mostík do poznávania mnohých fyzikálnych javov. Ak budeme hľadať fyziku pri odraze a pohybe, naučíme sa veľa o zrýchlení, rýchlosti, energii, pružnosti a pod.

Prečo lopty „skáču“? Premýšľali ste niekedy nad tým, prečo sa niektoré loptičky odrazia vyššie ako iné?

Schopnosť lopty odraziť má veľa čo do činenia s **pružnosťou**, alebo tzv. **elasticitou**. Elasticita je schopnosť objektu vrátiť sa do pôvodného tvaru po jeho **deformácii** - rozťahnutí alebo stlačení. Objekty, ktoré sú viac elastické, sú zvyčajne pružnejšie.

Pružnosť objektu znamená aj to, že má tendenciu vracieť sa do svojho rovnovážneho stavu, nadobúdať svoj prirodzený tvar. Tvar, keď je teleso deformované, nie je jeho prirodzený tvar.

Ak objekt nie je v prirodzenom tvare pôsobí naň sila, spôsobujúca obnovenie rovnovážneho tvaru, nazývame ju **obnovujúca sila** alebo **sila pružnosti**. Obnovujúca sila pružnosti je vždy nasmerovaná proti deformácii objektu.



Obr. 1: Deformované elastické lopty – neprirodzený tvar. Zľava lopta squashová, baseballová a golfová.

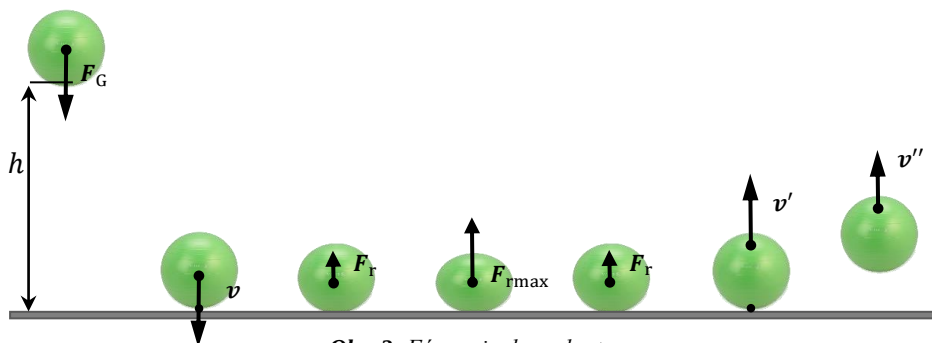
Takmer všetky pevné telesá sú elastické, t.j. majú určitý stupeň pružnosti. Triviálnym príkladom elastického predmetu je pružina. Pravdepodobne máte skúsenosť, že pružina má tendenciu obnoviť svoju pôvodný tvar, keď ju natiahnete, aby bola dlhšia.

Pri každom odraze loptičky existuje 7 fáz, ktorými loptička postupne prechádza. Poďme sa pozrieť na fyziku loptičiek pri odraze. **Pri tomto opise sa budeme pozerať na pád loptičky zjednodušene, budeme ignorovať všetky ostatné sily okrem tiažovej.**

Fáza 1: Pád

Prvá etapa pred každým odrazom lopty je jej pád, pri ktorom sa potenciálna energia lopty E_p premieňa na jej kinetickú energiu E_k . V zjednodušenom prípade je pád lopty spôsobený tiažovou silou F_G , ktorá vždy smeruje zvislo nadol.

1. fáza	2. fáza	3. fáza	4. fáza	5. fáza	6. fáza	7. fáza
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------



Obr. 2: Fázy pri odraze lopty.

Fáza 2: Začiatkový kontakt

Je okamih, keď sa lopta práve dotkne povrchu zeme. Po tomto okamihu **začína** proti tiažovej sile F_G pôsobiť obnovujúca sila pružnosti F_p .

Fáza 3: Spomalenie

Po prvotnom náraze sa pohyb lopty veľmi rýchlo spomalí. Materiál lopty je elastický, deformuje sa najmä v mieste styku s podložkou. Lopta tlačí na zem dokonca väčšou silou, ako je jej vlastná tiažová sila.

Fáza 4: Maximálna deformácia

V tomto bode je rýchlosť lopty nulová, materiál lopty dosiahol maximálnu deformáciu. Sila pružnosti F_p je maximálna, má smer nahor.

Fáza 5: Začiatok odrazu

V tejto etape začína pohyb lopty späť na miesto, kde sa jej pohyb začal. Lopta je postupne menej a menej deformovaná ako v maximálnej deformačnej fáze.

Fáza 6: Nulový kontakt

Pri nulovom kontakte už materiál lopty nie je deformovaný, sotva sa dotýka povrchu, v podstate len na jednom bode. Vektor rýchlosti lopty smeruje nahor. Pružná sila už nepôsobí, nepôsobí teda žiadna sila, ktorá by ju urýchl'ovala smerom nahor.

Fáza 7: Úplný odraz

Lopta opustila povrch podložky. Ak predpokladáme, že lopta je úplne elastická a ignorujeme iné energetické straty, aké spôsobuje je zvuk a teplo, potom sa lopta odrazí späť do pôvodnej výšky z akej pôvodne padala.

3 Koeficient reštitúcie

Opísaný prípad odskoku lopty bol veľmi zjednodušený, so zanedbaním akýchkoľvek iných síl ako odpor vzduchu, nedokonalá elasticita, rotácia, trenie, deformácia zo začiatočného hodu atď. Toto však nie je reálny odraz. Pri reálnom odraze to vyzerá podstatne ináč.

Skákacia lopta zachytená stroboskopickým bleskom rýchlosťou 25 snímok za sekundu. Keď lopta padá voľne pod vplyvom gravitácie, zrýchľuje sa nadol a jej počiatočná potenciálna energia sa premieňa na kinetickú energiu. Pri náraze s tvrdým povrchom sa lopta deformuje a premieňa kinetickú energiu na elastickejšiu potenciálnu energiu. Keď sa lopta vracia späť, energia sa najskôr premení späť na kinetickú energiu a potom, keď lopta znova získa výšku do potenciálnej energie. Straty energie spôsobené nepružnou deformáciou a odporom vzduchu spôsobujú, že každé následné odrazenie je menšie ako posledné.



Obr. 3: Stroboskopická fotografia pádu a odrazu skáčucej lopty.

Lopta sa pri zrážke deformuje, na čo sa nutne spotrebuje istá deformačná energia. Pri pružnej zrážke sa časť tejto energie zvyčajne premení späť na kinetickú energiu loptičky, a časť sa spotrebuje na plastickú deformáciu telies – uvoľní sa z väčšej časti v podobe tepla, ale tiež v trvalej zmene štruktúry deformovaných materiálov. To, do akej miery dôjde k spätnej premene deformačnej energie na kinetickú energiu, popisuje **koefficient reštitúcie** e (reštitúcie – návratu – to dáte späť).

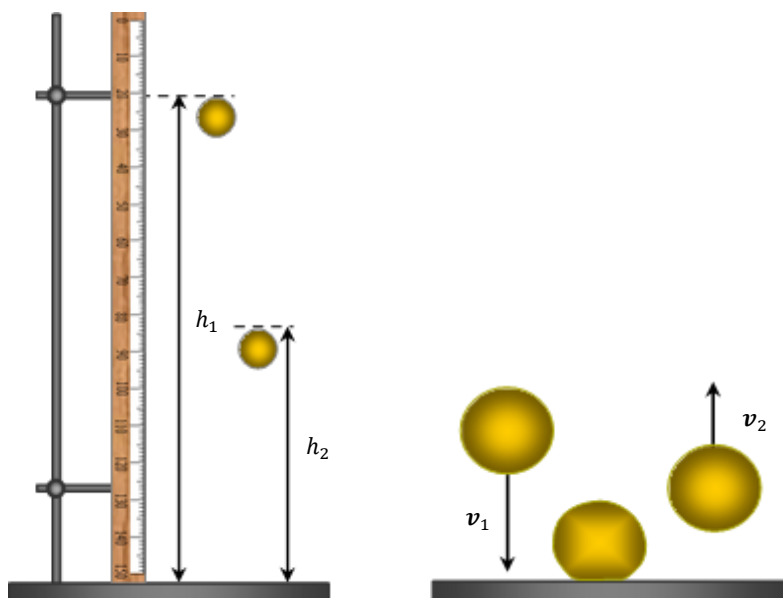
Koefficient reštitúcie e je definovaný ako pomer rýchlosti v_2 a v_1 , kde v_1 je rýchlosť lopty tesne pred jej dopadom a v_2 tesne po jej odraze.

$$e = v_2/v_1$$

Zo zákona zachovania mechanickej energie pre koefficient reštitúcie platí aj:

$$e = h_2/h_1,$$

kde h_1 je výška, z ktorej lopta padá a h_2 je maximálna výška, do ktorej vystúpi po odraze (pozri obr. 3).



Obr. 4: K definícii koeficientu reštitúcie.

Štandardné hodnoty koeficientu reštitúcie sú z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$, pričom nule zodpovedá dokonale nepružná zrážka a jednotke dokonale pružná zrážka.

Malá ukážka z praxe.

„COR“ je skratka pre *Coque of Restitution*. Je to síce termín zo sveta vedy a fyziky, ale poznajú ho aj hráči golfu. *Koeficient reštitúcie* je termín opisujúci prenos energie medzi dvoma objektmi. Koeficient reštitúcie objektu A je miera schopnosti objektu A prenášať energiu do objektu B, keď sa zrazia A a B.

Výrobcovia golfových palíc pracujú na zefektívnení prenosu energie z palice na loptičku pri údere. Tým golfisti dosiahnu väčšiu vzdialenosť doletu lopty.

V minulosti európsky štandard povoľoval koeficient COR v neobmedzenej výške a americký štandard ho obmedzoval. Preto výrobcovia golfových palíc vyrábali dve verzie palíc. Avšak od roku 2008 sa tieto rozličné normy zjednotili a platí jednotná norma – COR v hodnote 0,830.

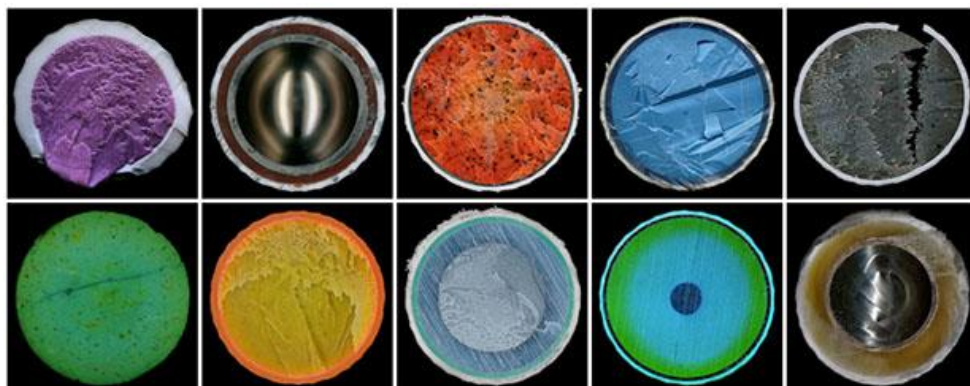
Odraz lopty od povrchu ihriska, časti tela alebo športového nástroja môže byť zapríčinený:

- 1) pružnosťou materiálu lopty, tzv. elasticitou,
- 2) pružnosťou vzduchu, ktorým je lopta nafúkaná.



Obr. 5: Golfové palice Great Big Bertha – vľavo.

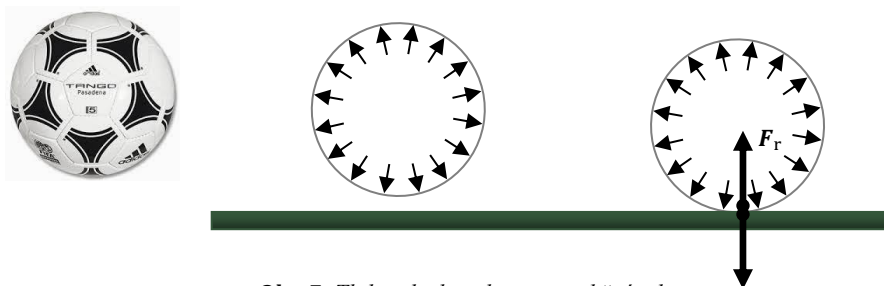
Odraz futbalovej lopty od povrchu trávniku alebo od futbalistovej nohy má inú fyzikálnu príčinu než napríklad odraz golfovej alebo squashovej loptičky od tuhého povrchu.



Obr. 6: Rez golfovou loptou vyplnenou elastickým materiálom.

Zatiaľ čo odraz squashových loptičiek je spôsobený elasticitou (pružnosťou) materiálu loptičky, plášť futbalovej lopty nemá v podstate žiadnu pružnosť - nenaľúknutá lopta sa po dopade na zem vôbec neodrazí.

Ak dopadne na zem nalaľúknutá futbalová lopta, dôjde k splošteniu jej spodnej časti. Z fyziky vieme, že tlak v plyne pôsobí všetkými smermi. Na dopadom sploštenú časť lopty pôsobí teda zvnútra smerom nadol (na zem) tlak vzduchu - no a podľa zákona akcie a reakcie pôsobí na túto sploštenú časť zdola nahor reakčná sila podložky, teda ihriska (to isté vysvetlenie platí pri odraze od futbalistovej nohy).



Obr. 7: Tlak vzduchu v lopte a reakčná sila.

Testovanie pružnosti futbalovej lopty je veľmi dôležité. Lopta musí mať ideálny odskok, čo je veľmi dôležité pre hráčov, či už pri spracovaní lopty nohou, na hrudi, alebo hlavou. Kvalitná futbalová lopta musí byť natoľko pružná, že keď ju pustíte voľným pádom z 2 m výšky, tak musí dosiahnuť nasledujúci minimálny odskok (pri teplote vzduchu 5 stupňov až 20 stupňov):

- futbalová lopta veľkosť 5 - musí mať odskok - 125 cm - 155 cm.
- futbalová lopta veľkosť 4 - musí mať odskok - 115 cm - 155 cm.

Pri nižšej teplote ako je 5 stupňov Celzia môže byť tolerancia minimálneho odskoku futbalovej lopty v rozmedzí 10 cm.

V závislosti na druhu povrchu, od ktorého sa lopta odráža, je rýchlosť odrazenej lopty o väčšiu či menšiu hodnotu nižšia než rýchlosť dopadajúcej lopty (len v ideálnom prípade dokonale pružného odrazu sú obe rýchlosti rovnaké). Na tvrdom povrchu je rýchlosť odrazenej lopty 0,8-násobkom rýchlosti dopadu, na trávniku s krátko zostrihanou trávou je to len 60 % pôvodnej hodnoty.

4 Squashové loptičky

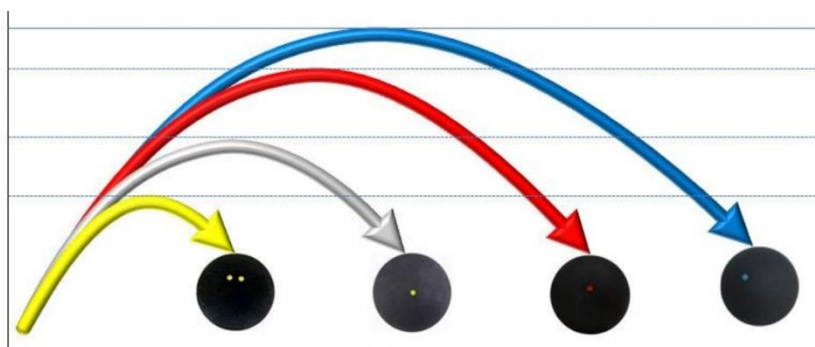
Špeciálny prípad v odraze loptičiek sú **squashové loptičky**.

Ak si niekto myslí, že nezáleží na tom, s akou squashovou loptičkou hrá, tak je na omyle. Jednotlivé loptičky na squash sa rozdeľujú do skupín, ktoré sú určené pre rozdielne kategórie hráčov squashu.

Každá skupina squashových loptičiek je určená pre inú výkonnosť, iné herné schopnosti a iný štýl hráčov. Loptičky sú odlíšené farebnými bodkami modrou, červenou, bielou a žltou. Čierna squashová loptička s modrou bodkou je rýchla loptička, ktorá je určená pre začiatočníkov. Čierna squashová loptička s dvomi žltými bodkami je veľmi pomalá loptička, ktorá je určená pre profesionálnych hráčov squashu.



Obr. 8: Squashová hra.



Obr. 9: Odraz squashových loptičiek s rôznym označením.

V odraze squashovej loptičky sa prejavujú dva hlavné prvky pružnosti - gumené telo a vzduch vo vnútri lopty. Typ použitej gummy je elastický polymér, ktorý sa skladá z molekúl podobných dlhému reťazcu. Po roztiahnutí sú molekuly nútené prijať lineárny tvar, a zahrejú sa. Keď sa elastický polymér zohreje, stáva sa pružnejším a tlak vzduchu vo vnútri sa zvyšuje, čím sa squashová loptička viac odrazí.



Obr. 10: Profesionálny zahriech squashových loptičiek.

Elastické polyméry majú veľmi vysokú elasticitu, to je schopnosť deformovať sa akýmkoľvek spôsobom a stále sa môže vrátiť do svojho pôvodného tvaru a veľkosti. Schopnosť materiálu rýchlo sa vrátiť do pôvodného stavu je daná pomerom energie získanej k použitej energii. V špecifikáciách pre squashové loptičky je odrazová schopnosť pri 23° Celzia minimálne 12%.

Materiál loptičiek má veľmi nízku priepustnosť, čo znamená, že vzduch vo vnútri squashovej loptičky nie je schopný uniknúť ani pri zvýšení tlaku v dôsledku zmien teploty.

Pred začatím samotnej hry je dôležité squashovú loptičku zahriať na určitú teplotu. Čím je vyššia teplota squashovej loptičky, tým je jej odskok väčší. Studená loptička má ďaleko horší odskok než loptička zahriata.

Aktuálna teplota squashovej loptičky je závislá na dvoch faktoroch, a to na teplote squashového kurtu a na hráčskej úrovni.

Ako môžeme squashovú loptičku zahriať? Tak, že sa silnými údermi hrá loptičkou o bočnú stenu kurtu. Čím väčšiu silu vynaložíte, tým rýchlejšie sa loptička zahreje – toto však vedia iba dobrí hráči. Iná možnosť je použiť ohrievač squashových loptičiek – pozri obrázok.

V reálnom živote lopty pri skákaní strácajú energiu a nakoniec sa zastavia. Keď lopta zasiahne stenu alebo povrch, vytvorí hluk, čo je strata energie z odrazu lopty. To tiež bude generovať určité množstvo tepla, ďalšie straty energie. Trenie zo steny spôsobí stratu energie, ako aj odpor vzduchu, keď sa lopta pohybuje.

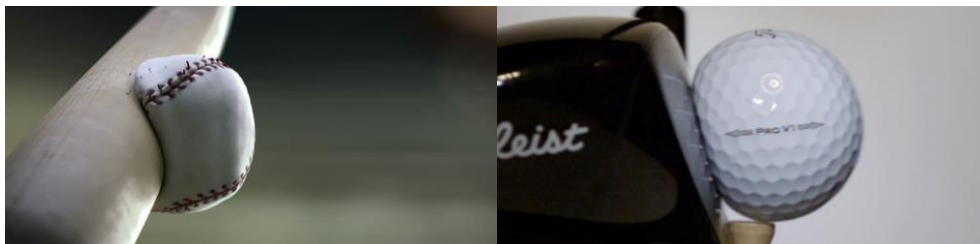
Keď majú loptičky akúkoľvek rotáciu, a keď povrch, ktorý zasiahli, nie je bez trenia, loptičky sa otáčajú po dopade. Je to spôsobené silou trenia. O týchto vplyvoch na pohyb lopty sme teraz nechceli písať.

Na nasledujúcom uvádzame dva pracovné listy určené žiakom. V jednom z nich testujú pružnosť loptičiek používaných v rôznych športoch. V druhom skúmajú vlastnosti rozličných squashových loptičiek.

5 Pracovné listy

Meno a priezvisko:		Trieda:	
Škola:		Dátum:	

O PRUŽNOSTI LÔPT



Premýšľali ste niekedy nad tým, prečo sa niektoré loptičky odrazia lepšie ako iné?

Aká je príčina dobrého, či horšieho odrazu loptičky?

Ktoré loptičky sú duté a ktoré plné?

Viete, že tenisový výplet môže byť mŕtvy?

Zamyslenie na úvod

Dôležitý parameter v teste kvality lopty je pružnosť. Pružnosť, alebo elasticita, je schopnosť objektu nadobudnúť pôvodný tvar po deformácií.

Napríklad futbalová lopta musí mať ideálny odskok, čo je dôležité pre hráčov pri spracovaní lopty. Kvalitná futbalová lopta musí byť natoľko pružná, že keď ju pustíte voľným pádom z 2 m výšky, tak musí dosiahnuť minimálny odskok 125 cm - 155 cm.

Fyzikálne príčiny odrazu lôpt:

- 1) Odraz squashovej loptičky od tuhého povrchu je spôsobený elasticitou materiálu loptičky. Na obrázku je prierez golfovou loptičkou Srixon Z-Star.



- 2) Odraz futbalovej lopty nohy má inú fyzikálnu príčinu. Plášť futbalovej lopty



nemá žiadnu pružnosť – nenafúknutá lopta sa po dopade na zem vôbec neodrazí. Ak však dopadne na zem nafúknutá lopta, dôjde k splošteniu jej spodnej časti. Tlak v plyne pôsobí všetkými smermi. Na dopadom sploštenú časť lopty pôsobí teda zvnútra smerom nadol (na zem) tlak vzduchu - a podľa zákona akcie a reakcie pôsobí na sploštenú časť zdola nahor re-

akčná sila podložky.

V závislosti na druhu povrchu, od ktorého sa futbalová lopta odráža, je rýchlosť odrazenej lopty menšia než rýchlosť dopadajúcej lopty. Na tvrdom povrchu je rýchlosť odrazenej lopty 0,8-násobkom rýchlosti dopadu, na trávniku je to len 0,6-násobok (60 %) pôvodnej hodnoty. Rýchlosť lopty po odraze sa samozrejme prejaví vo výške odskoku lopty.

Pre odraz lopty platí zákon zachovania energie. Čím má lopta lepšiu pružnosť, tým viac mechanickej energie jej po odraze ostane a menej energie sa premení na iné formy energie.

Úloha 1

Zarad'te loptičky pre uvedené športy podľa príčiny ich odrazu.

Basketbal, squash, bejzbal, volejbal, hopka, stolný tenis, golf, hokejbal, florbal, tenis.

Pružnosť materiálu	Vzduch v lopte	Neviem sa rozhodnúť
	basketbal	
		squash
bejzbal		
	volejbal	
hopka		
	Stolný teniss	
golf		
		hokejbal
	tenis	

Ak ste sa nevedeli rozhodnúť, kam niektorú loptu zaradiť, napíšte dôvod.

Napr.

Nemám skúsenosť s loptami squash a hokejbal. Nikdy som ich v ruke nemal.

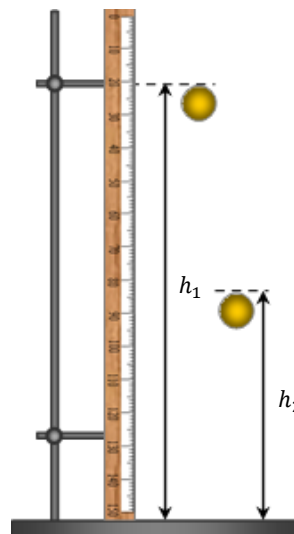
Úloha 2

Skúmanie pružnosti loptičiek

- a) Odhadnite poradie pružnosti piatich loptičiek. Zorad'te ich tak, že 1 znamená najpružnejšia.
- b) Preskúmajte pružnosť piatich loptičiek na základe ich odrazu od rovnakej podložky a výšky do ktorej po odraze odskočia. Loptičky voľne púšťajte z výšky 1 m.

Loptička (názov)	Poradie pružnosti odhadom	E x p e r i m e n t				
		$\frac{h_1}{m}$	$\frac{h_2}{m}$	e	$\frac{E_m}{\%}$	Poradie pružnosti

E_m – zachovaná mechanická energia



Poznanie:

Úloha 3**K pružnosti odrazovej plochy**

- a) Oceľovú guľičku voľne pustite z výšky 10 cm na drevený stôl. Odrazí sa? Ak áno, odhadnite koľkokrát pokiaľ nezastane.
- b) Na rám natiahnite balón. Tú istú oceľovú guľičku opäť voľne pustite na natiahnutý balón. Odrazí sa? Ak áno, odhadnite koľkokrát pokiaľ nezastane.
- c) Na malú sklenenú misku natiahnite balón. Tú istú oceľovú guľičku opäť voľne pustite na natiahnutý balón. Odrazí sa? Ak áno, odhadnite koľkokrát pokiaľ nezastane.
- d) Teraz guľičku skutočne nechajte odrážať sa od všetkých troch povrchov. Výsledky zapíšte.



<i>Oceľová guľička</i>	<i>Približný počet odskokov</i>	
	<i>Odhad</i>	<i>Skutočnosť</i>
<i>Odraz na drevenom stole</i>		
<i>Odraz na balóne na miske</i>		

Poznanie:**Úloha 4****Silové pôsobenie pri údere do lopty**

Typická futbalová lopta má hmotnosť 0,45 kg, jej obvod meria 70 cm a v jej vnútri je pretlak 0,85 atmosféry. Doba dotyku takejto lopty pri odraze je približne 8 milisekúnd, teda osem tisícín sekundy – tento vypočítaný údaj bol potvrdený analýzou údajov z vysokorýchlostných kamier. Merania ukázali, že pri

podarenom pokutovom kope dosahuje lopta rýchlosť až 130 km/h.

Určte priemernú silu, ktorou hráč pri pokutovom kope na loptu pôsobí.

Priemerná sila odhadom: $F_p = 50 \text{ N}$

Priemerná sila výpočtom:

$$m = 0,45 \text{ kg}$$

$$\Delta v = 130 \text{ km/h} = 36,11 \text{ m/s}$$

$$\Delta t = 0,008 \text{ s}$$

$$F_p = ? \text{ N}$$

Z druhého Newtonovho pohybového zákona pre pôsobiacu silu platí:

$$F_p = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m \Delta v}{\Delta t}$$

$$F_p = \frac{0,45 \times 36,11}{0,008} \text{ N} = 2031,18 \text{ N}$$

Poznanie:

Skutočná priemerná sila je oveľa väčšia ako odhadovaná.

Úloha 5

Rýchlosť a reakčný čas

Rýchlosť lopty 130 km/h pri pokutovom kope je úctyhodná. To znamená, že jedennásť metrov k bráne preletí lopta skutočne za krátky čas.

Vypočítajte čas potrebný na preletenie futbalovej lopty pri pokutovom kope k bráne.

Porovnajte tento čas s reakčným časom človeka a posúďte šancu brankára loptu chytiť.

$$v = 130 \text{ km/h} = 36,11 \text{ m/s}$$

$$s = 11 \text{ m}$$

$$t = ? \text{ s}$$

Ak predpokladáme, že lopta letí rovnomerným pohybom, potom pre čas, za ktorý preletí k brankovej čiare platí:

$$s = vt, \quad t = \frac{s}{v},$$

$$t = \frac{11}{36,11} \text{ s} = 0,3 \text{ s}$$

Poznanie:

Meno a priezvisko:		Trieda:	
Škola:		Dátum:	

TAJOMSTVO BODIEK NA SQUASHOVÝCH LOPTÁCH



**Čím je daná kvalita odrazu squashovej loptičky?
Aký je význam farebných bodiek na loptičkách?
U squashovej lopty môže nastávať mŕtvy odraz?**

Zamyslenie na úvod

V odraze squashovej loptičky sa prejavujú dva hlavné prvky pružnosti - gumené telo a vzduch vo vnútri lopty. Typ použitej gumeny je elastický polymér, ktorý sa skladá z molekúl podobných dlhému reťazcu. Po roztiahnutí sú molekuly nútené

prijat' lineárny tvar, a zahrejú sa. Keď sa elastický polymér zohreje, stáva sa pružnejším a tlak vzduchu vo vnútri sa zvyšuje, čím sa squashová loptička viac odrazí.

Elastické polyméry majú veľmi vysokú elasticitu, to je schopnosť deformovať sa akýmkoľvek spôsobom a stále sa môže vrátiť do svojho pôvodného tvaru a veľkosti. Schopnosť materiálu rýchlo sa vrátiť do pôvodného stavu je daná pomerom energie získanej k použitej energii. V špecifikáciách pre squashové loptičky je odrazová schopnosť pri 23° Celzia minimálne 12%.

Materiál loptičiek má veľmi nízku priepustnosť, čo znamená, že vzduch vo vnútri squashovej loptičky nie je schopný uniknúť ani pri zvýšení tlaku v dôsledku zmien teploty.

Pred začatím samotnej hry je dôležité squashovú loptičku zahriať na určitú teplotu. Čím je vyššia teplota squashovej loptičky, tým je jej odskok väčší. Studená loptička má ďaleko horší odskok než loptička zahriata.

Aktuálna teplota squashovej loptičky je závislá na dvoch faktoroch, a to na teplote squashového kurtu a na hráčskej úrovni.

Ako môžeme squashovú loptičku zahriať? Tak, že sa silnými údermi hrá loptičkou o bočnú stenu kurtu. Čím väčšiu silu vynaložíte, tým rýchlejšie sa loptička zahreje – toto však vedia iba dobrí hráči. Iná možnosť je použiť ohrievač squashových loptičiek – pozri obrázok.



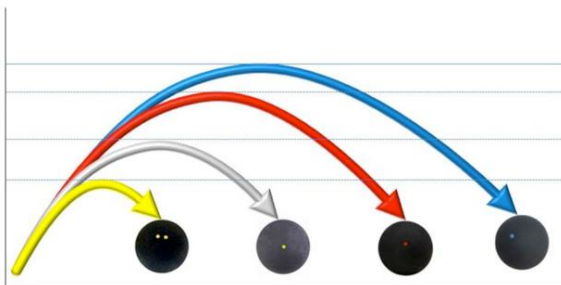
Úloha 1

Čo napovedajú farebné bodky?

Na obrázku je graficky znázornené správanie sa loptičiek s rôznym označením po odraze.

Opíšte pružnosť jednotlivých druhov loptičiek a základe informácií z obrázka.

Akú loptičku by ste si zvolili pre hru ako začiatočník? Svoj výber zdôvodnite.

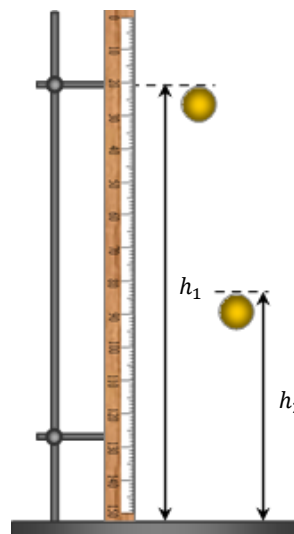


Poznanie:**Úloha 2 Experimentálne overenie pružnosti**

Preskúmajte pružnosť squashových loptičiek s rozličným označením na základe ich odrazu od rovnej podložky a výšky do ktorej po odraze odskočia. Loptičky voľne púšťajte z výšky 1 m.

Experiment realizujte pri izbovej teplote - cca. 20°C.

Loptička (označenie)	Teplota loptičiek.....°C				
	$\frac{h_1}{m}$	$\frac{h_2}{m}$	e	$\frac{E_m}{\%}$	Poradie pružnosti
modrá bodka					
červená bodka					
jedna žltá bodka					
dve žlté bodky					



E_m – zachovaná mechanická energia (v percentách)

Poznanie:**Úloha 3****Experimentálne overenie závislosti pružnosti od teploty**

Preskúmajte pružnosť squashových loptičiek s rozličným označením na základe ich odrazu od rovnej podložky a výšky do ktorej po odraze odskočia. Loptičky voľne púšťajte z výšky 1 m.

Experiment realizujte pri teplotách loptičiek približne 30°C a 40°C. Presnú teplotu zapíšte do tabuľky. Loptičky zohrejte v teplom kúpeli.

Loptička (označenie)	Teplota loptičiek.....°C				Teplota loptičiek.....°C			
	$\frac{h_1}{m}$	$\frac{h_2}{m}$	e	$\frac{E_m}{\%}$	$\frac{h_1}{m}$	$\frac{h_2}{m}$	e	$\frac{E_m}{\%}$
modrá bodka								
červená bodka								
jedna žltá bodka								
dve žlté bodky								

E_m – zachovaná mechanická energia (v percentách)

Poznanie:

6 Záver

Deti sú zvedavé a ich zvedavosť by sme mali podporovať. Existujú aktivity, ktoré sú pre žiakov motivujúce a majú potenciál zaujať žiakov, zároveň súvisia s obsahom učiva a umožňujú osvojiť si poznatok bádáním. Loptové hry sú pre mladú generáciu určite príťažlivé.

Testovanie vlastností rôznych loptičiek a špeciálne squashových loptičiek je zaujímavé aj preto, lebo prepája zdanlivé odlišné časti fyziky – mechaniku, molekulovú fyziku a fyziku pevných látok.

Získané informácie napríklad o odraze golfových loptičiek a squashových loptičiek sú pre neznalých až extrémne prekvapivé a veríme, že žiakov zaujmú.

Ďalšie čítanie – Readings

- [1] Master sport equipment: Loptičky na squash a jeho rozdelenie a vlastnosti. [Online 21.10.2023] <https://www.najlacnejsisport.sk/lopticky-na-squash-a-jeho-rozdelenie-a-vlastnosti-a-129.html>
- [2] Squash Point - Silena: How to choose the right squash ball? Published Oct. 29th 2018, [Online: 21.10.2023] <https://www.squashpoint.com/blogs/blog/how-to-choose-the-right-squash-ball/>
- [3] PSA World Tour: Squash Balls Explained, published Aug. 1st 2016, Online [21.10.2023] <https://psaworldtour.com/news/view/3939/squash-balls-explained>
- [4] Wikipedia contributors. (2023, October 20). Golf ball. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved 14:52, October 21, 2023, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Golf_ball&oldid=1181113831
- [5] Matabunk: Mick West: 150mph Golf Ball at 70000 fps [Foam Ball?], published Dec. 26th, 2016, [Online 20.10.2023] <https://www.metabunk.org/150mph-golf-ball-at-70-000-fps-foam-ball.t8277/>

Adresa autora: Jozef Beňuška, Gymnázium Viliama Paulinyho-Tótha, Malá hora 3, 03601 Martin
e-mail: jbenuska@nextra.sk.

Texty úloh 1. kola 65. ročníka Fyzikálnej olympiády (šk. r. 2023-2024) kategória A, kategórie B, C, D, úlohy 1 až 4

Kategória A

1. Štart rakety

Ako poznáme z výťahu, pri štarte smerom nahor sa naša tiaž zväčší, pri dobiehaní do hornej stanice sa naša tiaž pred zastavením zmenší oproti tiaži počas stúpania výťahu konštantnou rýchlosťou. Môžeme sa o tom presvedčiť, ak si zoberieme do výťahu osobnú váhu, postavíme sa na ňu a pozorujeme údaj krátko po štarte výťahu, počas rovnomerného stúpania a krátko pred zastavením. Určíte viete, čím je to spôsobené.

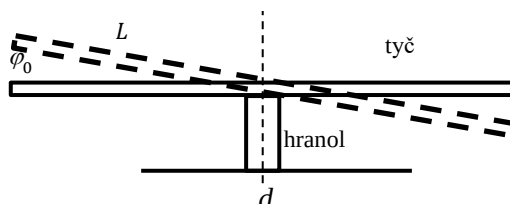
Raketa má vyniesť na obežnú dráhu okolo Zeme nové zariadenie. Raketa štartuje zvislo nahor pomocou raketového motora, ktorý spaľuje palivo rovnomerne, tzn. za jednotku času spotrebuje palivo vždy rovnakej hmotnosti. V čase $t_1 = 10$ s po štarte bola tiaž zariadenia $k_1 = 1,2$ -krát väčšia ako pred štartom a v čase $t_2 = 30$ s už $k_2 = 1,4$ -krát väčšia ako pred štartom.

- Vysvetlite, ako dochádza k zrýchleniu rakety a prečo zrýchlenie s časom narastá.
- Určte zrýchlenie a_2 rakety v čase t_2 , rýchlosť u výtoku plynov z dýzy motora rakety a rýchlosť v_2 rakety v čase t_2 .

Tiažové zrýchlenie $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Predpokladajte, že výtoková rýchlosť u sa s časom nemení.

2. Pohyb tyče

Na hornej vodorovnej obdĺžnikovej ploche zvislej dosky s hrúbkou $d = 50$ mm je položená kolmo na dosku tenká homogénna tyč s dĺžkou $L = 60$ cm. Ťažisko tyče sa nachádza nad stredom rozmeru d dosky, obr. A-1.



Obr. A-1

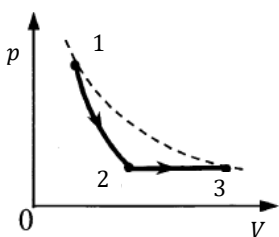
Tyč vychýlime o malý uhol $\varphi_0 = 5,0^\circ$ okolo dlhej hrany dosky do začiatocnej polohy a uvoľníme.

- Opíšte pohyb tyče po jej uvoľnení z vychýlenej polohy.
- Určte čas T , za ktorý sa tyč vráti do začiatocnej vychýlenej polohy.

Predpokladajte, že tyč je stále v kontakte s doskou, na jej povrchu sa neprekíza a pri jej kontakte s doskou nedochádza k žiadnej strate mechanickej energie.

Pozn.: Pre malé uhly možno využiť približné vzťahy $\sin \varphi \approx \varphi \approx \tan \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$.

3. Tepelné čerpadlo



Obr. A-2

Pri samovoľných termodynamických dejoch sa teplo odovzdáva z prostredia s vyššou teplotou do prostredia s nižšou teplotou, podobne ako tečie voda zhora nadol. Opačný tok tepla je možný iba vynútené, pričom je potrebné vykonať určitú prácu. Hovoríme potom o tepelnom čerpadle. Efektivitu čerpadla potom posudzujeme podľa tepla odovzdaného zohrievanému prostrediu v pomere k vykonanej práci.

Ako príklad uvažujeme termodynamický dej plynom jednoatómových molekúl s látkovým množstvom $n = 2,0$ mol, ktorý je znázornený p - V diagramom na obr. A-2. Po adiabatckej expanzii 1-2 zo stavu s tlakom $p_1 = 300$ kPa a teplotou $T_1 = 300$ K do stavu s tlakom $p_2 = 100$ kPa nasleduje izobarická expanzia 2-3 a následne izotermická kompresia do začiatocného stavu 3-1.

- Určte teplo Q_1 , ktoré plyn prijme absorbérom od okolia a teplo Q_2 odovzdané radiátoru v zohrievanom priestore počas jedného cyklu.
- Určte prácu W_{12} vykonanú vonkajšou silou počas adiabatckého deja a celkovú prácu W vykonanú vonkajšou silou počas cyklu.
- Určte efektivitu čerpadla $\eta = P_Q/P$ ako pomer tepelného výkonu radiátora a mechanickeho výkonu pohonu čerpadla.

Molárna plynová konštanta $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

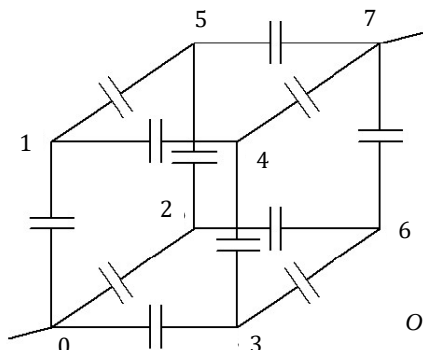
4. Kocka kondenzátorov

Dvanásť rovnakých kondenzátorov s kapacitami C je zapojených do tvaru kocky, obr. A-3. Vzniká tak jeden veľký kondenzátor s rôznymi kapacitami, podľa toho, ku ktorým uzlom kocky pripojíme zdroj.

- Uveďte, koľko rôznych kapacít takto môžeme realizovať. Svoju odpoveď zdôvodnite.

b) Určte všetky rôzne kapacity, ktoré takto môžeme realizovať.

Pozn.: Pri riešení úlohy využite symetriu sústavy kondenzátorov.



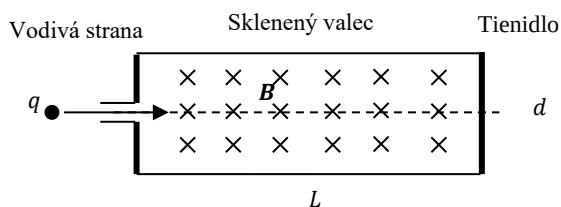
Obr. A-3

5. Guľôčka s nábojom v magnetickom poli

V laboratóriu robili experiment s pohybom častíc s nábojom v magnetickom poli.

Do vákuovej sklenenej trubice s priemerom $d = 50$ mm a dĺžkou $L = 20$ cm vnikajú pozdĺž jej osi malé guľové častice s merným nábojom $\gamma = q/m = 20,0$ C/kg,

obr. A-4. Predná strana trubice



Obr. A-4

je fluorescenčné tienidlo, ktoré zviditeľňuje dopad častíc. Zadná strana trubice je vodivá a častica, ktorá na ňu dopadne, sa od nej neodrazí a vo valci sa ďalej nepohybuje. Trubica sa nachádza v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 10,0$ T kolmom na os trubice. Častice sú pred vstupom do trubice urýchlené z nulovej rýchlosti napätím U . Ak častice dopadnú na valcovú stenu trubice, dochádza k ich dokonale pružnému odrazu, pričom ich náboj sa nemení.

- Určte hodnoty napätia U , aby častice dopadali do stredu tienidla.
- Určte maximálnu a minimálnu hodnotu napätia U , pri ktorej je splnená podmienky z časti a).
- Určte vzťah pre čas t_n prechodu častice trubicou od vstupu do trubice po dopad na tienidlo. Určte najmenšiu a najväčšiu hodnotu tohto času.

6. Objem krvi v tele

Rádioaktívne látky majú bohaté využitie v medicíne, či ide o diagnostiku alebo terapiu, napr. gama kamera, PET–Positron Emission Tomography, Lekselov gama nôž, atď. Jedným z používaných izotopov je rádioaktívny sodík, keďže ide o fyziologický prvok obsiahnutý v telesných orgánoch. Zatiaľ čo izotop ^{22}Na sa používa ako zdroj pozitronov, izotop ^{24}Na sa využíva ako γ -žiarič najmä na vyšetovanie krvnej sústavy.

Izotop ^{24}Na s polčasom β -premeny $T = 15$ h vyžaruje elektróny s kinetickou energiou $E_k = 1\,393$ keV a γ -fotóny s energiou $E_\gamma = 2\,754$ keV.

- Napište rovnice premeny izotopov ^{22}Na a ^{24}Na a uveďte, aké stabilné atómy premenou vznikajú.
- Určte vlnovú dĺžku λ a rýchlosť v emitovaných β -častíc (elektrónov).

Fyziologický roztok obsahujúci NaCl sa vystaví neutrónovému žiareniu, čím zo stabilných nuklidov ^{23}Na vzniká rádioaktívny nuklid ^{24}Na . Vzorka rádioaktívneho roztoku s objemom $V_1 = 2,0$ cm³ a aktivitou $A_1 = 2,0$ kBq sa vstrekuje do krvného obehu pacienta.

- Určte koncentráciu n_1 rádioaktívnych iónov $^{24}\text{Na}^+$ vo vzorke roztoku (počet iónov na 1 ml roztoku)
- Po uplynutí času $t_2 = 5,0$ h, keď sa rádioaktívny roztok dokonale rozptýli v celej krvnej sústave, odobrali pacientovi krv s objemom $V_2 = 1,0$ cm³ a meraním určili vyžarovanie vzorky $A_2 = 16$ γ -fotónov za 60 s. Určte objem V_k krvi v tele pacienta.

7. Meranie indukčnosti cievky – experimentálna úloha

Hlavnou vlastnosťou indukčnej cievky je jej indukčnosť L . Pri prechode prúdu cievkou však dochádza k jej zohrievaniu, čo znamená, že cievka má určitý stratový odpor R_s . Ten závisí jednak od frekvencie prúdu, jednak od amplitúdy. Pri nízkej frekvencii < 10 kHz možno cievku nahradiť sériovou kombináciou ideálneho induktora s indukčnosťou L a rezistora s odporom R_s .

Úlohou je meraním určiť náhradné parametre cievky pri zvolenej frekvencii (napr. 1 kHz).

Použite dve metódy:

1. metóda:

K cievke pripojte zdroj konštantného napätia a meraním napätia a prúdu určte jej odpor R_s .

Potom pripojte zdroj striedavého prúdu a meraním napätia a prúdu určte impedanciu Z_C cievky.

Z vypočítaných veličín určte indukčnosť L cievky.

2. metóda:

K cievke pripojte do série rezistor so známou hodnotou R odporu porovnateľnou s hodnotou Z_C impedancie určenej v 1. metóde. K tejto kombinácii pripojte zdroj striedavého napätia a zmerajte tri napätia – U_Z na celej kombinácii, U_R na rezistore a U_C na cievke. Z uvedených hodnôt napätí a odporu R určte náhradné parametre cievky L , R_S .

Príslušné vzťahy pre výpočet náhradných parametrov odvodíte.

Výsledky získané prvou a druhou metódou porovnajte a prípadné rozdiely zdôvodnite.

Pomôcky:

Pre meranie použite cievku s čo najväčším počtom závitom navinutú z tenkého drôtu (vhodná cievka sa určite nájde v kabinete). Vhodné je použiť cievku bez feromagnetického jadra a potom nasadenú na feromagnetické jadro, zmerať náhradné parametre v oboch prípadoch a zistiť, aký vplyv na parametre cievky má jadro.

Použite zdroj nízkeho napätia s nastaviteľnou frekvenciou – použite hodnoty približne 10 V a 1 kHz.

Na meranie elektrických veličín použite digitálny multimeter.

Kategória B

1. Družica

Organizácia pre vesmírne lety sa rozhodla umiestniť družicový modul na geostacionárnu trajektóriu okolo Zeme. Táto orbita sa vyznačuje tým, že pri pozorovaní z povrchu Zeme sa modul nachádza stále na rovnakom mieste.

- Uveďte, v akej rovine sa družica pohybuje a aká je jej obežná doba okolo Zeme. Určte výšku h_{GS} nad povrchom Zeme, v ktorej sa geostacionárna družica nachádza.

Najprv modul vyniesla nosná raketa na obežnú kružnicovú parkovaciu trajektóriu s výškou $h_p = 200$ km nad povrchom Zeme, a potom ho pomocou vlastných raketových motorov premiestnili na geostacionárnu orbitu. Hmotnosť modulu na parkovacej orbite $m_1 = 3,0$ t zahŕňa aj hmotnosť paliva pre raketové motory.

- Opíšte spôsob, ako sa môže dostať modul z parkovacej orbity na orbitu geostacionárnu.
- Určte hmotnosť m_p paliva, ktoré sa spotrebuje pri prechode modulu z parkovacej orbity na geostacionárnu orbitu. Plyny vznikajúce spálením paliva tryskajú z dýzy motora rýchlosťou $v_r = 4\,500$ m · s⁻¹.

2 Exoplanéty

V roku 2019 získali časť Nobelovej ceny za fyziku švajčiarski astronómovia Michel Mayor a Didier Queloz za objav vôbec prvej exoplanéty 51Pegasisb. Podarilo sa im to už v roku 1995, na Nobelovu cenu si však museli počkať ďalších 24 rokov. Exoplanéta je všeobecne akákoľvek planéta, ktorá obieha okolo inej hviezdy ako naše Slnko. Exoplanéta 51 Pegasi-b je od nás vzdialená približne 50 svetelných rokov. Mnohé objavené exoplanéty sú extrémne veľké a obiehajú okolo svojich hviezd v pomerne malej vzdialenosti. Kvôli týmto vlastnostiam prischla takýmto objektom prezývka „horúci Jupiter“.

Pozri: <https://exoplanets.nasa.gov/exoplanet-catalog/7001/51-pegasi-b/>.

Uvažujme pozorovanie planéty Jupiter našej Slnčnej sústavy z veľkej vzdialenosti mimo Slnčnú sústavu ako pozorovanie exoplanéty Slnka. Obežná doba Jupitera $T_J = 11,9$ roku, hmotnosť Jupitera $M_J = 1,90 \times 10^{27}$ kg, hmotnosť Slnka $M_S = 1,99 \times 10^{30}$ kg. Vieme, že rýchlosť pohybu Zeme po jej obežnej trajektórii $v_Z = 29,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Predpokladajme, že planéty sa pohybujú po kružnicových trajektóriách.

Jupiter sledujeme pomocou spektrometra vo veľkej vzdialenosti za hranicami Slnčnej sústavy tak, že pozorovateľ sa nachádza v rovine pohybu sústavy Slnko-Jupiter.

- Vysvetlite, ako je možné zistiť existenciu exoplanéty na základe pozorovania svetla hviezdy pomocou spektrometra.
- Určte najmenšiu rozlišovaciu schopnosť spektrometra $R_{\min}$, ktorý umožní objaviť pri hviezde s vlastnosťami Slnka existenciu ťažkej exoplanéty s vlastnosťami Jupitera. Rýchlosť svetla $c = 2,99 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Poznámka 1: Rozlišovacia schopnosť spektrometra je jeho schopnosť rozlíšiť dve žiarenia (svetlo), ktorých vlnová dĺžka λ sa líši len o malú hodnotu $\Delta\lambda$. Je charakterizovaná bezrozmerným parametrom $R = \lambda/\Delta\lambda$, kde $\Delta\lambda$ je najmenší rozdiel vlnových dĺžok dvoch spektrálnych čiar, ktoré ešte spektrometer rozlíši, λ je stredná (priemerná) vlnová dĺžka dvoch rozlíšiteľných čiar.

Poznámka 2: Svetlo exoplanéty je príliš slabé na pozorovanie z veľkej vzdialenosti. Na existenciu exoplanéty sa usudzuje z pozorovania svetla hviezdy, napr. periodickej zmeny jasnosti alebo vlnovej dĺžky svetla vyžarovaného hviezdou v dôsledku obiehania exoplanéty.

Pozri: <https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/1>.

3. Tepelný dej

V laboratóriu robili pokusy s dusíkom, ktorý bol uzatvorený vo valci s pohyblivým piestom. Chceli zistiť, či a za akých podmienok možno dosiahnuť závislosť tlaku od teploty

$$p = \frac{4}{5} p_0 \left(1 + \frac{T^2}{4T_0^2} \right). \quad (1)$$

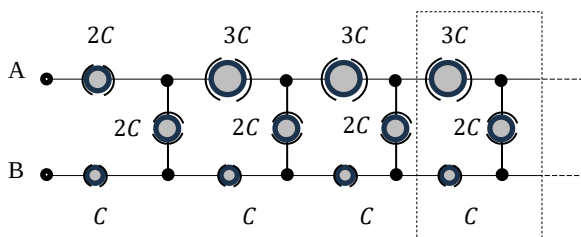
Teplotu menili z hodnoty $T_0 = 100 \text{ K}$ do hodnoty $T_1 = 500 \text{ K}$. Začiatočná hodnota tlaku bola $p_0 = 50 \text{ kPa}$.

- Vyjadrite hustotu ρ plynu ako funkciu relatívnej teploty $x = T/T_0$ za predpokladu, že platí (1). Zostrojte graf funkcie $\rho = f(x)$. Určte vhodným spôsobom najmenšiu hustotu ρ_m plynu počas zmeny teploty z hodnoty T_0 na hodnotu T_1 a teplotu T_m , pri ktorej sa táto hodnota hustoty dosiahne.
- Určte závislosť relatívneho objemu plynu $y = V/V_0$ od relatívnej teploty x tak, aby sa dosiahla požadovaná teplotná závislosť tlaku. Závislosť $y = g(x)$ znázorníte pomocou y - x diagramu.
- Vyjadrite závislosť relatívneho tlaku $z = p/p_0$ plynu od relatívneho objemu y a výslednú funkciu $z = h(y)$ znázorníte graficky v z - y diagrame. .

Molárna hmotnosť dusíka $M_m = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, molárna plynová konštanta $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. Plyn považujte za ideálny.

4. Kapacita retiazky

Na obr. B-1 je retiazka vytvorená z drobných guľôčok zasadených do striebra. Guľôčky sú z polodrahokamu a sú elektricky nevodivé. Každá guľôčka v uchytení v striebre predstavuje malý kondenzátor. Kapacity jednotlivých kondenzátorov sú označené v obrázku, pričom $C = 5,0 \text{ pF}$.



Obr. B-1

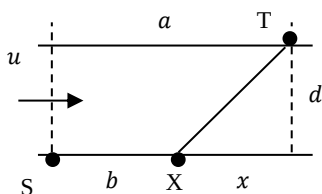
Retiazka je veľmi dlhá a opakuje sa v nej základná bunka označená čiarkovaným boxom.

Určte kapacitu C_{AB} retiazky vzhľadom na koncové body A a B.

Pri riešení pre zjednodušenie predpokladajte, že retiazka je nekonečne dlhá.

Katéria C

1. Strážca rieky



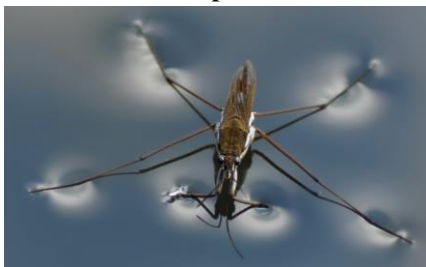
Obr. C-1

Na pravom brehu rieky je strážca rieky S. Na druhom brehu vo vzdialenosti $a = 100$ m v smere toku rieky táboria trampy T, obr. C-1. V určitom okamihu zbadá strážca z tábora núdzové volanie trampov o pomoc. Strážca okamžite vyrazí na pomoc. Aby sa dostal k trampom čo najskôr, prebehne najprv po brehu dráhu b rýchlosťou $v_1 = 18$ km/h a potom skočí v bode X do vody a pláva cez rieku k táboru po spojnici XT. Šírka rieky je $d = 40$ m a voda v rieke tečie rýchlosťou

u , rovnakou po celej šírke rieky. V pokojnej vode strážca pláva rýchlosťou $v_2 = 5,4$ km/h.

- Odvoďte vzťah pre čas t , za ktorý sa strážca dostane do tábora, ako funkciu vzdialenosti $x = a - b$ podľa obr. C-1.
- Určte najkratší možný čas t_1 a zodpovedajúcu dráhu b_1 pre prípad, že rýchlosť vody v rieke je nulová $u = 0$ m/s.
- Zostrojte graf závislosti času t od vzdialenosti x pre rýchlosť toku vody $u = 1,2$ m/s. Z grafu určte najkratší možný čas t_2 , za ktorý sa môže strážca dostať do tábora, a dráhu b_2 bežca po brehu.

2. Povrchové napätie



Korčuliarka (*gerris lacustris*).

Niektoré druhy hmyzu, napr. vodomerka (*hydrometra stagnorum*) alebo korčuliarka (*gerris lacustris*), sa dokážu pohybovať po hladine vody. Väčšinu života trávia na vodnej hladine, po ktorej sa dokážu elegantne pohybovať. Aby sme si tento zaujímavý jav priblížili, vyriešime nasledujúci prípad.

Na hladinu vody opatrne položíme tenký hliníkový valcový kotúčik – ten je dokonale nezmáčavý vodou. Ak nie je kotúčik príliš

hrubý, zostane na hladine plávať.

- Vysvetlite prečo zostane tenší kotúčik plávať na hladine, a prečo hrubší sa po vložení na hladinu potopí. Opíšte, ako sa mení povrch kvapaliny pri postupnom prenikaní kotúčika do kvapaliny, a nakreslite tvar povrchu kvapaliny v rôznych charakteristických častiach poklesu kotúčika až po jeho zaplavenie

vodou. Opíšte medzný stav, kedy nad kotúčik vnikne voda a kotúčik sa potopí. Opíšte sily, ktoré na kotúčik pôsobia, a ako sa podieľajú na jeho plávaní, resp. potopení.

- b) Určte maximálnu hrúbku h kotúčika, pri ktorej zostane na hladine plávať.

Povrchové napätie vody $\sigma = 7,3 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, hustota vody $\rho_0 = 1,00 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, hustota hliníka $\rho_{\text{Al}} = 2,70 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, tiažové zrýchlenie $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Pozn.: Môžete použiť predstavu, že na povrchu kvapaliny je tenká blana, ktorej tvar sa prispôbuje silám pôsobiacim na kvapalinu a má pevnosť danú hodnotou povrchového napätia σ .

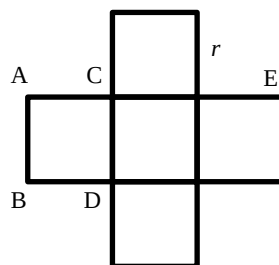
Odporúčame, vyskúšať si plávanie hliníkovej mince na vode, jej zatlačanie do vody, sledovať, ako sa správa voda na okraji mince, a kedy voda nad mincu prenikne.

3. Odporová sieťka

Na obr. C-2 je znázornená sieťka pozostávajúca zo 16 rovnakých úsekov. Všetky úseky majú rovnaký elektrický odpor r .

Po pripojení zdroja napätia $U = 9,0 \text{ V}$ k uzlom C a D prechádza zdrojom prúd $I_1 = 500 \text{ mA}$.

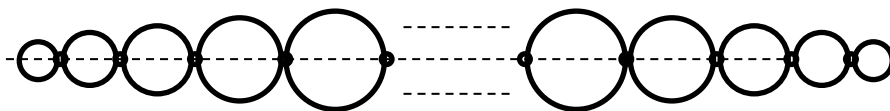
- Určte odpor r jednotlivých úsekov sieťky.
- Určte prúd I_2 prechádzajúci zdrojom, ak ho pripojíme k uzlom A a B.
- Určte prúd I_3 prechádzajúci zdrojom, ak ho pripojíme k uzlom B a E.



Obr. C-2

4. Vodivá retiazka

Zlatník zhotovil striebornú ozdobu podľa obr. C-3, pozostávajúcu z krúžkov rôznych priemerov z tenkého homogénneho strieborného drôtu vzájomne spojených malou kvapkou kovu.



Obr. C-3

Hmotnosť ozdoby je $m = 3,91 \text{ g}$ a celkový elektrický odpor $R = 1,00 \times 10^{-2} \Omega$.

- Určte dĺžku L ozdoby.
- Určte priemer d a dĺžku l použitého strieborného drôtu.

Hustota striebra $\rho_m = 10,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, rezistivita striebra $\rho_R = 1,49 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$. Hmotnosť a odpor spojov krúžkov neuvažujte. Priemer krúžkov je značne väčší ako priemer d drôtu.

Kategória D

1. Plt' a čln

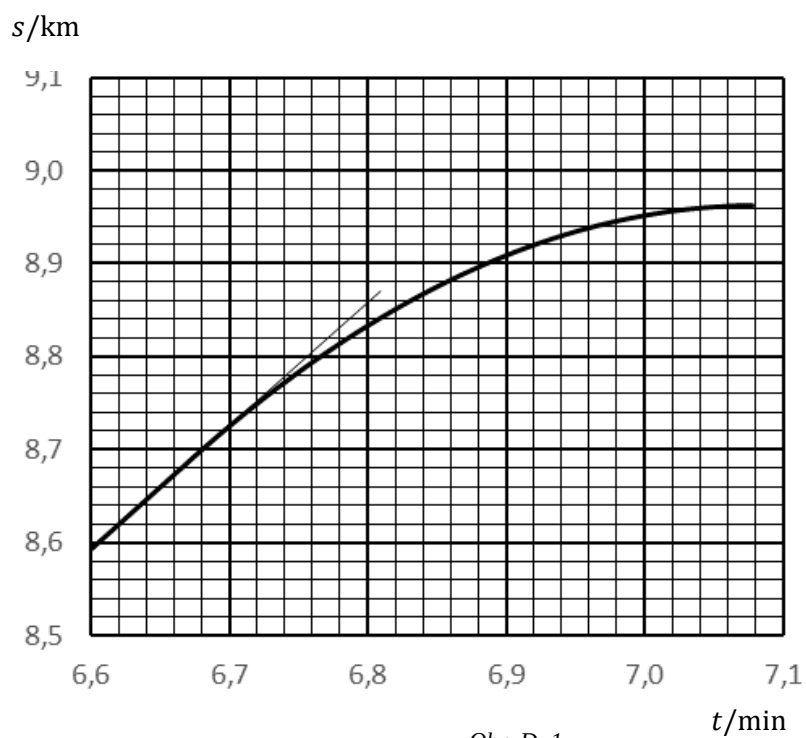
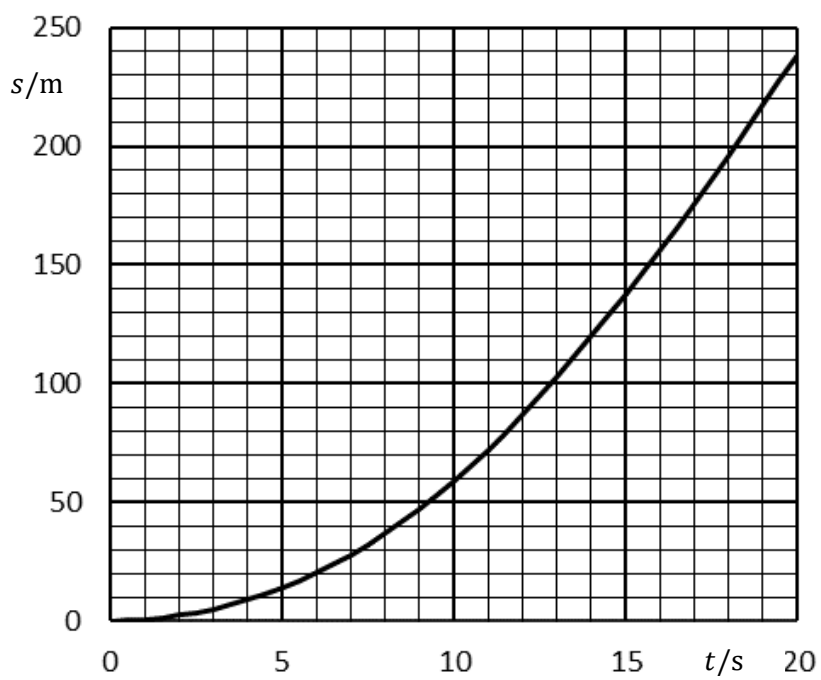
Na behu rieky sú dva tábory, v jednom trávia čas nadaní fyzici, v druhom, vo vzdialenosti $L = 3,2 \text{ km}$ v smere toku rieky, nadaní matematici. Z tábora F pri fyzikálnom tábore vyplával chlapec Fyzikus po prúde rieky na plti unášanej riekou (bez akéhokoľvek pohybu). Za čas $t_1 = 60 \text{ min}$ dorazil do prístavu M pri matematickom tábore. Zistil však, že pri nastupovaní na vor si zabudol v prístave F na móle svoj ruk-sak. V prístave bol našťastie kamarát Matematikus, ktorý mal motorový čln. Sadli teda do člna a vydali sa proti prúdu do prístavu F, na móle vzali zabudnutý plecniak a ihneď sa obrátili nazad na plavbu do prístavu M. Počas celej plavby, ktorá trvala $t_2 = 32 \text{ min}$, išiel čln na maximálny výkon motora.

- Po aký čas t_{21} sa čln plavil proti prúdu rieky?
- Aká je rýchlosť v člna vzhľadom na vodu, v ktorej sa pohybuje?

Predpokladajte, rýchlosť prúdu vody v rieke je pozdĺž celej trasy plavby rovnaká.

2. Autobus

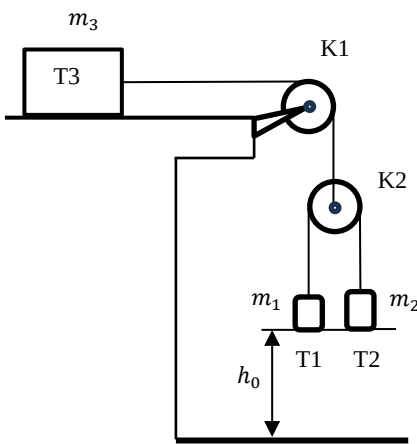
Pri tvorbe cestovného poriadku nainštalovali do medzimestského autobusu zariadenie, ktoré zaznamenávalo dráhu autobusu ako funkciu času. Zo skúšobnej jazdy medzi dvomi zastávkami bol získaný záznam. Autobus sa najprv zrýchlil zo stavu pokoja na rýchlosť $v_1 = 20 \text{ km/h}$, potom po preradení na vyšší rýchlostný stupeň, zrýchľoval na rýchlosť $v_2 = 60 \text{ km/h}$ a po ďalšom preradení rýchlostného stupňa dosiahol cestovnú rýchlosť, ktorou sa pohyboval až k ďalšej zastávke. Zrýchlenia sú pri každom prevodovom stupni konštantné, ale vzájomne odlišné. Keď sa priblížil k zastávke, začal brzdiť až kým nezastavil. Pre možnosť detailnej analýzy sú v grafoch znázornené len začiatková a záverečná fáza pohybu autobusu, obr. D–1.



Obr. D-1

- Pomocou hodnôt získaných z grafu dráhy určte priemernú rýchlosť v_p medzi zastávkami.
- Zostrojte graf závislosti rýchlosti v autobusu od času t pre uvedené časové intervaly s použitím grafu dráhy na obr. D-1.
- Podľa získaného grafu $v = f(t)$ opíšte jednotlivé intervaly pohybu (3 počas rozbehu, 1 cestovný, 1 záverečný). Ukážte, že nerovnomerné úseky pohybu sú rovnomerne zrýchlené a určte zrýchlenie pre všetky štyri nerovnomerné úseky pohybu.

3. Sústava telies



Obr. D-2

Na obr. D-2 je sústava telies T1 až T3 s hmotnosťami m_1 , m_2 a m_3 vzájomne spojených tenkými vláknami. Na začiatku sú telesá T1 a T2 vo výške h_0 nad vodorovnou podložkou.

Predpokladajte, že trenie v sústave je nulové, hmotnosť a moment zotrvačnosti kladiek sú zanedbateľne malé. Na začiatku bola sústava udržiavaná v pokoji.

- Určte zrýchlenie telies po uvoľnení sústavy a čas t_a , za ktorý dopadnú telesá 1 a 2 na vodorovnú podložku, ak

$$m_1 = m_2 = m_3.$$

- Určte zrýchlenia a_1, a_2, a_3 jednotlivých telies po uvoľnení sústavy, ak

$$m_3 = 3m_1 = 2m_2. \text{ Určte čas } t_b, \text{ za ktorý dopadne teleso T2 na podložku.}$$

4. Plávajúca fľaša

Do zvislej valcovej nádoby s obsahom vnútorného prierezu $S = 250 \text{ cm}^2$ čiastočne naplnenej vodou do výšky h_0 sme vložili prázdnu otvorenú sklenenú fľašu s vnútorným objemom $V_{vn} = 800 \text{ ml}$, pričom fľaša zostala vo vode plávať a nedotýkala sa dna nádoby. Pri vložení fľaše do vody stúpila hladina vody v nádobe o $h_1 = 20 \text{ mm}$ od začiatkovej výšky h_0 .

Potom sme začali do fľaše opatrne nalievat' vodu. Keď voda vo fľaši dosiahne určitú hmotnosť m , začne sa fľaša potápať (v tomto okamihu už žiadna časť fľaše nevytŕča nad voľnú hladinu vody). Počas nalievania vody do fľaše, až kým jej otvor nedosiahne hladinu vody v nádobe, pričom fľaša sa nedotkne dna nádoby, stúpne hladina vody v nádobe z hodnoty $h_0 + h_1$ o výšku h_2 .

- Určte hmotnosť m_0 prázdnej fľaše.

INFORMÁCIE

64. Medzinárodná matematická olympiáda

3.–13. 7. 2023

Čiba, Japonsko



IMO 2023

Chiba, JAPAN 64th

V dňoch 3.–13. 7. 2023 sa v japonskej Čibe (čo je predmestie Tokia) konal 64. ročník Medzinárodnej matematickej olympiády (IMO). Celkovo sa ho zúčastnilo 618 súťažiacich zo 112 krajín. Každá krajina mohla vyslať najviac 6 súťažiacich.

Slovensko reprezentovali:

Matej Bachniček, ŠPMNDaG, Bratislava, 1. ročník

Adam Džavoronok, Gymnázium, Poštová 9, Košice, 4. ročník

Martin Kopčány, Gymnázium, Brezno, 4. ročník

Viktor Imrišek, Gymnázium, Grösslingová, Bratislava, 4. ročník

Eliška Macáková, Gymnázium CENADA, Bratislava, 3. ročník

Jakub Šošovička, Gymnázium CENADA, Bratislava, 4. ročník

Vedúcim družstva SR bol Stanislav Krajčí (učiteľ na PF UPJŠ Košice a predseda Slovenskej komisie MO), zástupcu vedúceho a pedagogický dozor vykonával dvojnásobný zlatý a dvojnásobný strieborný medailista Martin Vodička (učiteľ na PF UPJŠ Košice a člen SK MO).

Žiaci riešili počas dvoch dní (8. a 9. júla) dve trojice úloh, za každú úlohu bolo možné dostať najviac 7 bodov. Plný počet 42 bodov získali 5 súťažiaci, a to po

jednom účastníkovi z Južnej Kórey, Rumunska, USA a dvaja Číňania. Rusko ako štát bolo z pochopteľných dôvodov z účasti na IMO oficiálne vylúčené.

Hranice na získanie bronzovej, striebornej a zlatej medaily boli tento rok postupne 18, 25 a 32 bodov. Podľa pravidiel IMO medaily získava približne polovica účastníkov a tí si delia zlaté, strieborné a bronzové v pomere 1 : 2 : 3. Čestné uznanie získavajú tí riešitelia, ktorí vyriešili aspoň jednu úlohu na plný počet bodov.

Výsledky členov družstva SR sú uvedené v tabuľke:

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	Cena
Matej Bachniček	7	0	1	7	2	0	17	čestné uznanie
Viktor Imrišek	7	3	0	7	2	0	19	Bronz
Martin Kopčány	7	3	0	7	2	0	19	Bronz
Viktor Imrišek	7	1	2	7	4	0	21	Bronz
Eliška Macáková	7	0	2	7	7	0	23	Bronz
Jakub Šošovička	7	7	1	7	7	0	29	Striebro

V neoficiálnom poradí krajín, ktoré vznikne sčítaním bodov celého družstva, sme sa umiestnili na 39. mieste, čo je oproti minulému roku mierne zlepšenie. V tradičnom derby sme síce opäť porazili Česko (45.), avšak naši ďalší partneri z V4 Poľsko a Maďarsko sú pred nami (32., resp. 20.). Prvú päťku tvorili postupne Čína, USA, Južná Kórea, Rumunsko a Kanada. Kompletne výsledky a štatistiky možno nájsť na internetovej stránke <http://imo-official.org>.

Slovensko sa už pravidelne zapája aj do tvorby úloh na IMO. Tento rok sa do užšieho výberu (tzv. shortlistu) 30 úloh dostali 2 slovenské geometrické úlohy z tvorivej dielne Patrika Baka, tentokrát sa však ani jedna z nich do víťaznej šestice nedostala.

Takáto šestica sa zo shortlistu vyberá niekoľkohodinovým náročným procesom v akomsi „parlamente“, ktorého členmi sú vedúci všetkých delegácií. Úlohy sú volené vždy tak, aby v nich boli čo najrovnomernejšie zastúpené všetky štyri olympijské oblasti, a to algebra, geometria, kombinatorika a teória čísel. (Tohtoročný výber možno vidieť na konci článku.) V jednotlivých dňoch sú úlohy obvykle radené podľa predpokladanej náročnosti.

Budúci ročník IMO sa bude konať po piatich rokoch opäť v britskom Bathe v júli 2024. Nasledovať bude Austrália (2025) a Čína (2026).

Stanislav Krajčí³

³ Ústav informatiky, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice, stanislav.krajci@upjs.sk.

Úlohy na 64. MMO

Úloha 1. Nájdite všetky zložené kladné celé čísla n také, že ak sú $d_1, d_2, \dots, d_k$ všetky jeho kladné delitele a $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$, tak pre každé i také, že $1 \leq i \leq k - 2$, platí, že číslo d_i je deliteľom čísla $d_{i+1} + d_{i+2}$.

Úloha 2. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník taký, že $|AB| < |AC|$. Označme Ω jemu opísanú kružnicu a S stred jej oblúka s krajnými bodmi C a B obsahujúceho bod A . Nech kolmica z bodu A na priamku BC pretína úsečku BS v bode D a kružnicu Ω v bode E rôznom od A . Nech rovnobežka s priamkou BC cez bod D pretína priamku BE v bode L . Označme ω kružnicu opísanú trojuholníku BDL . Nech P je priesečník kružníc ω a Ω rôznych od B .

Dokážte, že dotyčnica ku kružnici ω v bode P pretína priamku BS na osi uhla BAC .

Úloha 3. Nech k je celé číslo také, že $k \geq 2$. Určte všetky nekonečné postupnosti kladných celých čísel $(a_1, a_2, \dots)$ také, že existuje polynóm P taký, že

$$P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0,$$

kde $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ sú nezáporné celé čísla, a pre každé kladné celé číslo n platí

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \dots a_{n+k}.$$

Úloha 4. Nech $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ sú navzájom rôzne kladné reálne čísla také, že pre každé n z množiny $\{1, 2, \dots, 2023\}$ platí

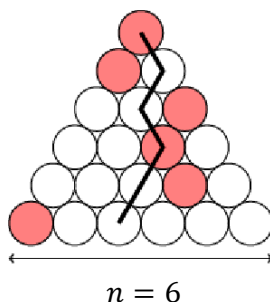
$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

a číslo a_n je celé. Dokážte, že $a_{2023} \geq 3034$.

Úloha 5. Nech n je kladné celé číslo. Pod *japonským trojuholníkom* rádu n budeme rozumieť rozmiestnenie $1 + 2 + \dots + n$ dotykmi prepojených zhodných krúžkov do tvaru rovnostranného trojuholníka s n riadkami tak, že pre každé i z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ obsahuje i . riadok práve i

krúžkov, z ktorých práve jeden je červený. V japonskom trojuholníku budeme pod *nindža cestou* rozumieť postupnosť n krúžkov, ktorá sa začína v najvrchnejšom krúžku, v každom kroku pokračuje jedným z dvoch krúžkov, ktoré sú hneď pod ním, a končí sa v najspodnejšom riadku.

Na obrázku je príklad japonského trojuholníka rádu 6 a v ňom príklad nindža cesty obsahujúcej 2 červené krúžky:



Nájdite najväčšie k také, že v každom japonskom trojuholníku rádu n existuje nindža cesta obsahujúca aspoň k červených krúžkov.

Úloha 6. Nech ABC je rovnostranný trojuholník. Nech A_1, B_1, C_1 sú jeho vnútorné body také, že $|BA_1| = |A_1C|$, $|CB_1| = |B_1A|$, $|AC_1| = |C_1B|$ a

$$|\sphericalangle BA_1C| + |\sphericalangle CB_1A| + |\sphericalangle AC_1B| = 480^\circ.$$

Nech sa priamky BC_1 a CB_1 pretínajú v bode A_2 , priamky CA_1 a AC_1 v bode B_2 a priamky AB_1 a BA_1 v bode C_2 .

Dokážte, že ak je trojuholník $A_1B_1C_1$ rôznostranný, tak existujú dva rôzne body ležiace na všetkých troch kružniciach opísaných trojuholníkom $AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2$.

In memoriam: Marek Fila (1959 – 2023)

V Marekovi Filovi sme stratili jedného z najvýznamnejších slovenských matematikov. Marek patril medzi slovenských vedcov s najvyšším Hirschovým indexom, jeho vedecké práce vychádzali a ešte chvíľu budú vychádzať v špičkových svetových matematických časopisoch.



Prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Prof. RNDr. Marek Fila, DrSc. (29. augusta 1959 - 20. apríla 2023) pochádzal z umeleckej rodiny, jeho rodičia, otec maliar Rudolf Fila a matka reštaurátorka Dorota Filová, boli významní slovenskí výtvarníci. Jeho syn Lukáš je hudobník v populárnej skupine Korben Dallas a pracuje ako novinár a riaditeľ vydavateľstva N Press. Dcéra Natália je architektka pôsobiaci na Fakulte architektúry a dizajnu STU v Bratislave. Jeho brat Vít'o je fotograf a tlačiar a bol dôležitou postavou v bratislavskej undergroundovej klubovej hudobnej scéne. Rodina Filovcov sa venovala nielen tvorbe umenia, ale aj jeho zachovávaní a podpore.

Marek strávil väčšinu svojej profesionálnej kariéry na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave (pôvodne MFF UK). Svoje doktorandské štúdium ukončil v roku

1989 pod vedením Pavla Brunovského. Odvtedy až do skončenia svojej kariéry pracoval s výnimkou niekoľkých zahraničných pobytov na tejto fakulte; od roku 2008 na nej pôsobil ako profesor. Bol jedným zo zakladateľov Katedry aplikovanej matematiky a štatistiky, ktorú dlhoročne viedol. Bol členom vedeckých rád Univerzity Komenského aj FMFI UK, garantom viacerých študijných programov, a vedúcim domácich aj zahraničných grantov od agentúr VEGA, APVV, Európskej komisie, Japan Society for Promotion of Science a National Science Foundation of the Republic of China (Taiwan). Nebol nikdy fanúšikom zbytočnej byrokracie a snažil sa od nej odbremeniť v čo najväčšej miere aj svojich kolegov.

Dlhé roky bol na FMFI UK jednou z ústredných osobností seminára z kvalitatívnej teórie diferenciálnych rovníc, vedeckej komunity, ktorá od 90. rokov minulého storočia vychovala niekoľko generácií úspešných matematikov a prilákala zahraničných vedcov svetovej úrovne.

Marek Fila bol autorom alebo spoluautorom viac ako 100 vedeckých článkov najmä z oblasti teórie parciálnych diferenciálnych rovníc.

Jeho významným prínosom bol prístup k novým oblastiam matematiky, ktoré neboli ešte dôkladne skúmané. Púšťal sa často do náročných nových tém, kde musel vyvinúť nové matematické techniky. Jeden z jeho kolegov z Japonska to pri návšteve Bratislavy prirovnal k dielam Marekovho otca, ktoré boli taktiež plné odvahy.

V jeho prácach neboli len popisy zaujímavých matematických javov a výsledkov, ale tiež snaha o hlboké pochopenie podstaty skúmaných javov a vybudovanie prirodzenej intuície. Týmto spôsobom dokázal objavovať nové súvislosti a princípy, a zároveň tak umožňoval spoluautorom dokončiť či sprecizovať ich detailné dôkazy. Jeho prístup umožnil objavovať nové súvislosti a princípy, a výrazne prispel k vytvoreniu systematizovaného obrazu správania sa riešení v oblasti kvalitatívnej teórie diferenciálnych rovníc.

Hlavnou oblasťou vedeckého záujmu Mareka Filu boli asymptotické vlastnosti riešení nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc, ktorým sa venoval už od začiatku svojej kariéry. Tento typ rovníc sa fenomenologicky objavuje v modeloch interakcií v chémii, v biológii, vo fyzike, či v sociálnych vedách. Predstavujú prepojenie (lineárneho alebo nelineárneho) difúzneho správania sa v priestore so vzájomnou lokálnou interakciou, napr. medzi chemickými zložkami alebo živočíšnymi druhmi. V prostredí jednotlivé zložky difundujú (t. j. podliehajú difúzii spôsobenej náhodným pohybom – Brownov pohyb) a zároveň spolu navzájom reagujú. Opisom tejto kombinácie je parciálna diferenciálna rovnica, ktorá v sebe kombinuje práve difúzne javy, ktoré majú vo všeobecnosti zahľadujúci charakter, t. j. vyrovnávajú priestorové rozdiely a zároveň reakciu, ktorá má vo všeobecnosti povahu dynamického systému, ktorý môže vytvárať rýchle dynamické rozdiely závisiac na súčasnom stave systému v jednotlivých bodoch priestoru.

Niektoré techniky používané v tejto oblasti možno považovať za formu umenia, najmä komplikované konštrukcie podriešení a nadriešení pre niektoré typy problémov, ktoré vyžadujú extrémny vhlád do problému a ich kompozícia je skutočne porovnateľná s výtvarným umením, hudbou, či architektúrou. Zaujímavé matematické problémy v tejto oblasti sa objavujú aj vtedy, keď sa problém formálne zjednoduší na jednu rovnicu, ktorá sa však rieši vo všeobecnom viacrozmernom priestore a zároveň sa kombinuje s rôznou silou chemickej reakcie, ktorá sa vyjadruje nelineárnou závislosťou mocninového charakteru. Napokon do hry ešte vstupuje anomálna difúzia, či pomalá, ktorá je charakteristická pre tzv. porózne médiá, akými sú napríklad špongia, tehla, či biologické tkanivá; alebo rýchla, charakteristická pre niektoré fyzikálne situácie (napr. polovodiče), alebo aj šírenie informácií v spoločenskom priestore.

Kombinácia troch parametrov – dimenzia priestoru, exponent reakcie a exponent anomálnej difúzie otvára množstvo otázok o správaní sa riešení týchto systémov.

V niektorých parametrických režimoch sa nedeje nič extra zaujímavé. Riešenia sa správajú veľmi pekne, dokonca až tak pekne, že bez ohľadu na počiatočnú podmienku systému sa systém po čase správa univerzálne a jednoducho, t.j. podobne ako jedno špecifické riešenie. Tak je to aj pri úplne základnej rovnici vedenia tepla, kde sa časom stáva dominantný, tzv. gaussovský mód, t. j. rozdelenie tepla v prostredí po čase pripomína miznúce normálne rozdelenie.

Dokázať však takéto univerzálne správanie sa pre všeobecné parametrické režimy nie je vždy také jednoduché, najmä ak ich nevieme explicitne riešiť. Najtradičnejšími v tejto oblasti sú tak otázky ako sa správajú riešenia diferenciálnych rovníc v nekonečnom čase a za akých podmienok konvergujú k rovnováhe.

Čo však Mareka zaujímalo ešte viac, boli singulárne javy, teda také, ktoré súvisia so vznikom singularít v riešeniach – *blow-up* (explózia riešenia do nekonečna v niektorej z noriem v konečnom čase), *grow-up* (nárast riešenia do nekonečna v nekonečnom čase), či *quenching* (singularita časovej derivácie riešenia parabolickej diferenciálnej rovnice spôsobená singularitou nelineárneho zdrojového člena v rovnici).

Tieto typy riešení môžu pôsobiť ako čistá matematická abstrakcia, ktorá často nemusí spĺňať predpoklady, za ktorých boli odvodené modely príslušných diferenciálnych rovníc. Napriek tomu, nárast mimo všetkých hraníc môže byť interpretovaný v rôznych modeloch ako prechod systému do iného fázového stavu alebo ako nadkritické zvýšenie koncentrácie. Takéto javy nastávajú, napríklad pri horení, či explóziách, nájdeme ich aj v čiernych dierach alebo v niektorých biologických systémoch, kde sa baktérie, bunky alebo živočíchy zhlučujú do extrémne koncentrovaných bodov a sú riadené vlastnými dynamickými zákonmi.

Spočiatku sa Marek venoval najmä rovniciam s nelineárnou difúziou (zodpovedajúcou známym modelom v prírodných a sociálnych vedách), ale neskôr ho zaujali aj úlohy s nelineárnymi, prípadne dynamickými okrajovými podmienkami, ktoré sa typicky nahrádzajú pri modelovaní jednoduchšími podmienkami. Tieto zjednodušenia však až na výnimočné prípady nie sú úplne v súlade s fyzikálnou realitou (napr. udržiavanie konštantnej teploty alebo tepelného toku na hranici). V čase, keď sa Marek Fila začal tejto téme venovať, bola len veľmi málo prebádaná. Dosiahol v nej však viacero originálnych výsledkov, ktoré neskôr podnietili široký výskum v tejto oblasti. Práve tejto oblasti sa venuje päť jeho najcitovanejších článkov.

Okrem výsledkov, ktoré boli očakávané a mali akú-takú analógiu v úlohách s jednoduchším typom okrajových podmienok, Marek Fila objavil a vysvetlil viacero zaujímavých a úplne nových fenoménov. S ich skúmaním následne skončil až vtedy, keď detailne pochopil ich príčinu a vlastnosti. Tak už v roku 1991 spolu so svojimi spoluautormi ukázal, že vzájomná interakcia nelinearit v rovnici (a v okrajovej podmienke k nej) môže viesť k tomu, že pre špeciálnu voľbu parametrov úlohy riešenie síce existuje globálne v čase, t.j. je dobre definované pre ľubovoľne dlhý čas, avšak

nie je globálne ohraničené. Takéto *grow-up* správanie sa riešenia je však v skalárnych úlohách so superlineárnymi podkritickými nelinearitami veľmi ojedinelé. Detailný popis asymptotického správania sa takéhoto riešenia pre veľké časy odvodil Marek až v roku 2005 pri spoločnej práci s J. L. L. Velázquezom a M. Winklerom použitím metódy „*matched asymptotics*“.

Metoda „*matched asymptotics*“ je založená na nájdení viacerých približných riešení diferenciálnej rovnice, z ktorých každé je dobrou aproximáciou v jednej z častí skúmanej časovo-priestorovej domény. Pomocou týchto aproximatívnych riešení je možné v ďalšom kroku dokázať existenciu presného riešenia v celej doméne. Takýto postup vyžaduje detailné ododenie asymptotického správania sa čiastočných aproximatívnych riešení, čo v mnohých prípadoch vedie k náročným a dlhým technickým odhadom, v tomto prípade často založených na použití podriešení a nadriešení, t.j. riešení diferenciálnych nerovnic.

Marek Fila so spoluautormi (Winkler, King, Yanagida) pomocou tejto techniky dosiahli viacero zaujímavých výsledkov o asymptotickom správaní sa riešení intenzívne študovanej Fujitovej rovnice. Fujitova rovnica je fundamentálnym prototypom semilineárnej parabolickej rovnice s mocninou nelinearitou (v rovnici vedenia tepla sa pripočíta k difúznemu členu ešte mocnina riešenia). Práve pre túto rovnicu a jej prahové riešenia (oddeľujúce globálne nesingulárne riešenia a riešenia explodujúce v niektorej norme v konečnom čase) a pre tzv. sobolevovskú kritickú mocninu Marek spolu s Johnom R. Kingom formálne odvodili v roku 2012 hypotézu o asymptotickom správaní sa jej riešení. Táto hypotéza bola netradičná, keďže predpovedala, že výsledné správanie sa riešenia silno závisí nielen od poklesu počiatočnej podmienky v priestorovom nekonečne, čo je pomerne tradičná podmienka v podobných problémoch, ale závisí aj od dimenzie priestoru. V čase vzniku tejto hypotézy vôbec nebolo jasné, ako by sa dala matematicky dokázať, keďže metóda podriešení a nadriešení v tomto prípade nebola aplikovateľná. Až v rokoch 2020-2023 bola táto hypotéza rigorózne dokázaná v priestorových dimenziách 3 a 4 pomocou kombinácie eliptických a parabolických odhadov.

Prelomové výsledky pre Fujitovu rovnicu v superkritickom prípade dosiahol Marek aj pomocou iných matematických techník, napríklad pomocou tzv. zero number (počet nulových bodov riešenia) a vlastností stacionárnych a spätne samopodobných riešení. Spolu s H. Matanom a P. Poláčikom ukázali, že vyššie spomínané prahové riešenia majú v takomto prípade aj po explózii regulárne pokračovanie (t. j. určitá norma sa v konečnom čase stane nekonečnou, ale riešenie je možné predĺžiť v čase a tá istá jeho norma sa stane znovu konečnou). Aj toto regulárne pokračovanie riešenia môže mať v neskoršom čase ďalšie a ďalšie takéto singularity.

Pre tú istú úlohu takisto dokázali existenciu singulárnych heteroklinických orbít (singulárnych spojení medzi stacionárnymi riešeniami), čím významne objasnili dynamiku príslušného dynamického systému. Zaujímavosťou v tomto prípade je, že

pre jednorozmerné úlohy a ich ohraničené riešenia charakterizoval heteroklinické orbity práve Marekov školiteľ Pavol Brunovský spolu s Berndom Fiedlerom. Pre Fujitovu rovnicu neskôr Marek spolu s E. Yanagidom dokázali aj mimoriadne prekvapivý výsledok, a to existenciu homoklinických orbít spájajúcich nulové riešenie so sebou samým. Vo všeobecnosti je to pomerne bežné správanie sa riešení diferenciálnych rovníc, avšak v tomto prípade je to veľmi exotické vzhľadom na gradientnú štruktúru skúmaného problému.

Marek Fila dosiahol aj mnoho ďalších zaujímavých a dôležitých výsledkov, napríklad o tom, ako kombinácia difúzie a homogénnych Dirichletových okrajových podmienok, ktoré fenomenologicky ťahajú riešenie pri okraji do nuly, môže zamedziť explózií riešenia, ktorá by inak nastala v príslušnej obyčajnej diferenciálnej rovnici bez difúzie, alebo o explózií riešení v úlohách s gradientnými alebo exponenciálnymi nelinearitami.

V ostatných rokoch sa Marek najintenzívnejšie venoval novým problémom a javom v takých typoch úloh, ktoré skúmal už na začiatku svojej vedeckej kariéry, ako napríklad rovnice s nelineárnou difúziou alebo úlohy s dynamickými okrajovými podmienkami. Spolu so svojimi japonskými kolegami, a neskôr aj so svojou doktorandkou Petrou Mackovou, sa pustil aj do veľmi neštandardného typu problémov, v ktorých bol v systéme pohybujúci sa veľmi silný zdroj, napr. pohybujúca sa kmeňová bunka v organizme alebo silný fyzikálny zdroj (elektromagnetické pole alebo laser), ktorý singularitu prináša priamo do rovnice ako súčasť nehomogénneho zdrojového člena. V spoločných článkoch objasňujú, ako sa riešenia správajú v tomto prípade – môžu mať taktiež tvar pohybujúcich sa singularít.

Marek Fila netvoril matematiku len pre seba, či pre malú skupinu svojich kolegov. Jeho práce vyvolali v širokej oblasti štúdia parciálnych diferenciálnych rovníc veľký ohlas. Výrazne participoval na kolaboratívnych projektoch, z ktorých mnohé sám inicioval. Okrem vedeckých spoluprác vedel s kolegami Marek nadväzovať aj silné priateľské väzby. Veľmi zriedkavo bol jediným autorom vedeckých prác, drvivá väčšina jeho prác má jedného až troch spoluautorov, z ktorých väčšina sa vyskytuje opakovane. Medzi jeho spoluautormi nájdeme najčastejšie Michaela Winklera (22 spoločných prác) a Eiji Yanagidu (16 spoločných prác), menoslov jeho spoluautorov je však veľmi dlhý. Zaujímavými, ťažkými, ale zároveň riešiteľnými otázkami, ktoré Marek Fila kládol, prilákal na spoluprácu aj špičkové svetové osobnosti modernej teórie parciálnych diferenciálnych rovníc akými sú Herbert Amann, Sigurd Angenent, Gary Lieberman, Hiroshi Matano, Juan Luis Vázquez, či Juan J. L. Velázquez. V matematickej komunite vo svojej oblasti tak pôsobil ako silný katalyzátor nových výsledkov, ku ktorým sám osobne prispieval, často ako koordinátor spoločného výskumu a tmeliaci prvok kolektívu.

Marekovú vedeckú prácu a spoluprácu so zahraničnými kolegami však nemožno obmedziť len na písanie vedeckých prác. Marek bol veľmi aktívny pri organizovaní

medzinárodných matematických konferencií na Slovensku aj v zahraničí. Bol jedným z hlavných organizátorov série ôsmich konferencií *Euro-Japanese workshop on blow-up*, ktoré sa konali v Bratislave, Japonsku, Španielsku, Francúzsku, Holandsku a Poľsku, organizoval významnú svetovú konferenciu *Equadiff 11* v Bratislave, či konferenciu *Singularities in Nonlinear Problems*. Bol zároveň členom vedeckých rád mnohých významných zahraničných konferencií.

Sám bol zároveň veľmi častým pozvaným rečníkom nielen na konferenciách, ale aj na seminároch prestížnych univerzít a vedeckých ústavov. Absolvoval viacero dlhodobých zahraničných pobytov - okrem Iowa State University v USA aj v Japonsku, vo Fínsku, vo Francúzsku a na Taiwane.

Pracovne navštívil takmer všetky európske krajiny a tiež viaceré štáty v Ázii, v severnej aj v južnej Amerike. Jeho srdcovou záležitosťou sa najmä po roku 2000 stalo Japonsko, ktoré navštívil desiatkykrát, vrátane dlhodobých celosemestrových pobytov na University of Tokyo, Tohoku University a Tokyo Institute of Technology. Plynulo hovoril japonsky a jeho prednášky v Japonsku boli v japončine aj spísané. Tak priamo výrazne ovplyvnil veľa japonských študentov vrátane tých bez znalostí cudzieho jazyka. Zároveň japonskí matematici pravidelne navštevovali Mareka v Bratislave, niektorí už ani nevedeli spočítať, koľkokrát na Slovensko cestovali. Marek sa už od malička zaujímal nielen o japonský jazyk a písmo (ako dieťa sám graficky navrhol alternatívne japonské znaky) ale tiež o japonskú históriu, kultúru a gastronómiu.

Marek Fila pôsobil ako editor viacerých zahraničných vedeckých časopisov a aj ako pozvaný editor pre špeciálne čísla časopisov venované známym osobnostiam. Bol pozvaným rečníkom na mnohých konferenciách organizovaných pri príležitosti životných jubileí významných matematikov (P. Brunovský, B. Fiedler, H. Matano, E. Yanagida, F. B. Weissler, B. Kawohl, J. L. Vazquez, H. Amann, M. Chipot, L. Veron a M.-F. Bidaut-Veron, S. M. Nikol'skii). Konferencia k Marekovej šesťdesiatke sa symbolicky konala na University of Tokyo.

Marek mal vzhľadom na svoje časté pracovné cesty len menší počet diplomantov a doktorandov, medzi ktorými sú M. Kordoš, P. Bokes, S. Peres, O. Budáč, A. Pulkinen, Y. Uda, P. Macková, avšak pomáhal v začiatkoch svojej vedeckej kariéry mnohým ďalším, ktorých školili jeho kolegovia. Na FMFI UK taktiež prilákal v rámci svojich grantov viacero zahraničných postdokov.

Napriek jeho veľkej aktivite a veľmi spoločenskej povahe nebol na Slovensku Marek Fila mediálne známym slovenským vedcom; vyhýbal sa médiám, dokonca aj na internete toho o ňom veľa nenájdete. Aj na svojich prednáškach hovoril väčšinu času o práci druhých a čo sa z nej môžeme dozvedieť, a čo je na nej dôležité. Svoju prácu vždy kládol len do tohto všeobecného kontextu. Aby bola prednáška nie predovšetkým jeho prezentáciou, ale hlavne prezentáciou zaujímavej matematiky, ktorá je zaujímavá aj pre obecnosť.

Deň pred svojou smrťou strávil takmer celý deň na FMFI UK v menšej posluchárni (v takzvanom „akváriu“), kde sedel na prednáškach sekcie Matematiky na Študentskej vedeckej konferencii. Nie je zvykom, minimálne v matematike, aby profesor, ak nie je priamo členom komisie, sledoval všetky prednášky sekcie, najmä, ak ich témy siahajú od teoretickej algebry, cez teóriu grafov až po optimalizáciu riadenia vodných elektrární. Marek však v stredu bol na všetkých prednáškach a živo o nich po ich skončení debatoval s kolegami. Bol nadšený z práce mnohých našich študentov.

Vo štvrtok už na Seminár z kvalitatívnej teórie diferenciálnych rovníc neprišiel, aj keď prednáška zahraničného host'a o použití entropickej metódy na dôkaz existencie riešení pre reakčno-difúzne rovnice mu bola veľmi blízka a určite by ho zaujala. Marek už na svoj seminár a ani na Študentskú vedeckú konferenciu na našej fakulte nepríde nikdy.

Marek Fila bol človek, ktorý sa neustále vzdelával a vnímal matematiku ako formu umenia. Jeho strata je veľkou stratou nielen pre akademickú obec, ale aj pre slovenskú spoločnosť ako celok. Jeho odkaz bude žiť ďalej v jeho prácach a v ľuďoch, ktorých ovplyvnil svojim učením a prístupom k matematike.

Za pomoc s písaním tejto spomienky ďakujem svojim kolegom.

Richard Kollár⁴

⁴ Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Oddelenie aplikovanej matematiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava,
e-mail: richard.kollar@fmph.uniba.sk

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť

Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť

Jednota slovenských matematikov a fyzikov pobočka Nitra,
(kontaktná adresa: Schurmannova 27, 949 01 Nitra)
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje

JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
kontakt: Prof. Martin Kalina, KMDG SvF STU, Radlinského 11,
810 05 Bratislava (e-mail: martin.kalina@stuba.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

3/2023 ročník 52

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Aba Teleki

Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki

Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková

Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík

Zástupca vydavateľa: Martin Kalina

Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Náklad: 350 kusov

Periodicita vydávania: štvrťročník

IČO vydavateľa: 00 178 705

Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava

Dátum vydania periodickej tlače: október 2023

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené

Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava

č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

OBSAH

Jozef D o b o š : O funkciách definovaných po častiach	1
Zadania úloh kategórie A 39. ročníka Olympiády v informatike (Michal Anderle, Michal Forišek).....	9
Vojtech B á l i n t : Sedem desaťročí Matematickej olympiády.....	22
Jozef B e ň u š k a : Energia odrazených loptičiek	29
Texty úloh 1. kola 65. ročníka Fyzikálnej olympiády (šk. r. 2023-2024) kategórie A a úlohy 1 až 4 kategórie B, C a D	49
INFORMÁCIE:	
64. Medzinárodná matematická olympiáda (Stanislav Krajčí)	62
SPOMÍNANIE:	
In memoriam: Marek Fila (1959 – 2023)	66

CONTENTS

Jozef D o b o š : On Piecewise Defined Functions.....	1
Tasks of Category A in the 39 th Year of the Informatics Olympiad (Michal Anderle, Michal Forišek).....	9
Vojtech B á l i n t : Seven decades of the Mathematical Olympiad	22
Jozef B e ň u š k a : The Energy of Bouncing Balls.....	29
Tasks from the First Round of the 65th Physics Olympiad (School Year 2023-2024), Category A, and Tasks 1 to 4 from Categories B, C, and D	49
INFORMATION:	
64 th International Mathematical Olympiad (Stanislav Krajčí)	62
REMEMBRANCE	
In Memoriam: Marek Fila (1959 – 2023)?	66