OBZORY MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

3/2022 (51)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2022 ročník 51

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 3/2022 Volume 51

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2022 (51)

Opustil nás prof. RNDr. Tibor Katriňák, DrSc.

Jaroslav Guričan a Miroslav Haviar

Abstract [Prof. RNDr. Tibor Katriňák, DrSc. passed away]: Profesor Tibor Katriňák passed away on May 23, 2022 at the age 85. This article aims at looking back at the scientific and human legacy that Tibor left in the Slovak and international communities of algebraists as well as in the communities of university teachers, researchers and students at Faculty of Mathematics, Physics and Informatics of Comenius University in Bratislava, where he spent most of his professional life. He became a world-recognized authority in the scientific fields of Lattice Theory and Universal Algebra and a leading specialist in the areas of pseudocomplemented lattices and semilattices. He scientifically brought up and guided eight doctoral students. Tibor will be missed as one of the most emblematic figures of Slovak mathematics.

Key words: mathematicians, Tibor Katriňák, memoirs

Súhrn: Profesor Tibor Katriňák zomrel 23. mája 2022 vo veku 85 rokov. Tento článok si kladie za cieľ ohliadnuť sa za vedeckým a ľudským odkazom, ktorý Tibor zanechal v slovenskej a medzinárodnej komunite algebraikov, ako aj v spoločenstve vysokoškolských učiteľov, výskumníkov a študentov Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, kde strávil väčšinu svojho profesionálneho života. Stal sa svetovo uznávanou autoritou v oblasti teórie zväzov a univerzálnej algebry a popredným špecialistom v oblasti pseudokomplementárnych zväzov a polozväzov. Vedecky vychoval a viedol osem doktorandov. Tibor bude chýbať ako jedna z najviac emblematických postáv slovenskej matematiky.

Kľúčové slová: matematici, Tibor Katriňák, spomienky

MESC: A40, A50

Životné medzníky

Tibor Katriňák sa narodil 23. marca 1937 v Košiciach. Vyrástol a základné a stredoškolské vzdelanie získal v Spišskej Novej Vsi, kde jeho otec pracoval na železnici. Nemal súrodencov. V roku 1955 začal študovať matematiku na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave a štúdium úspešne ukončil v roku 1960.

Doktorát a vedeckú hodnosť CSc. získal v roku 1965 pod vedením profesora Milana Kolibiara. Univerzite Komenského zostal Tibor verný po celý svoj profesionálny život. Pôvodné oddelenie algebry a teórie čísel patriace pod Prírodovedeckú fakultu UK sa stalo súčasťou Matematicko-fyzikálnej fakulty UK, založenej v roku 1980 a premenovanej na terajšiu Fakultu matematiky, fyziky a informatiky v roku 2001.

Katriňákov matematický talent bol čoskoro rozpoznaný a počas obdobia Pražskej jari sa jeho vedecká kariéra rozbehla veľmi sľubne. Habilitačné konanie mal v apríli 1968 spolu s Milanom Hejným (1936) a Štefanom Známom (1936 – 1993) a všetci traja sa postupne vypracovali na uznávané osobnosti československej matematiky (neskôr slovenskej matematiky a v prípade M. Hejného aj českej didaktiky matematiky). Prvé významné medzinárodné uznanie vedeckých kvalít Tibora Katriňáka prišlo v rovnaký čas. Akademický rok 1968/69 strávil na Katedre matematiky Univerzity v Bonne ako štipendista prestížnej Humboldtovej nadácie. Práve počas ročného pobytu v Bonne bol v októbri 1968 vymenovaný za docenta matematiky na Univerzite Komenského v Bratislave.

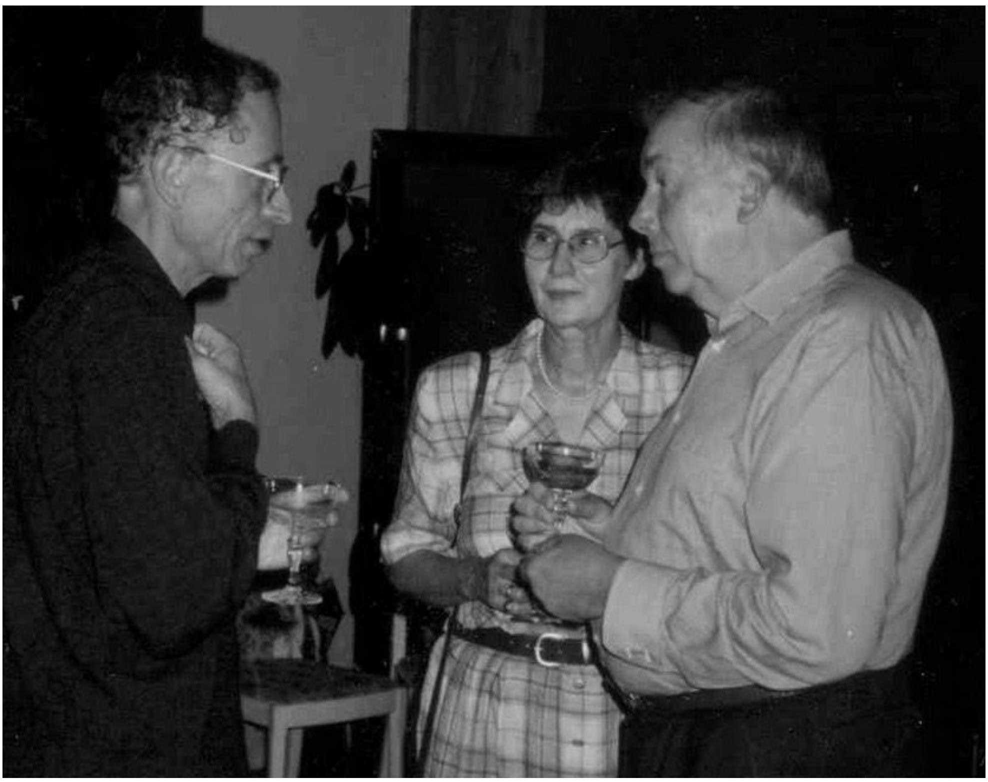
Zároveň však invázia sovietskych vojsk a ich spojencov v auguste 1968 ukončila nádeje na demokratický politický vývoj v Československu. Napriek rôznym snahám zachovať aspoň niektoré z nedávnych zmien, čoskoro sa naplno prejavil deštruktívny vplyv tejto udalosti na celkovú atmosféru v spoločnosti aj v samotnom akademickom prostredí. Štipendisti Humboldtovej nadácie boli považovaní za politicky nespoľahlivých, tým viac Tibor, s manželkou Helene pochádzajúcou zo Západného Nemecka. Jedným z následkov bolo, že mu nebolo umožnené prijať početné pozvania zahraničných akademických inštitúcií. Tibor síce získal vedeckú hodnosť doktora vied v roku 1980, avšak nestal sa profesorom, až kým neprebehli spoločenské zmeny v novembri 1989. Riadnu profesúru na Matematicko-fyzikálnej fakulte UK získal v roku 1990 a až do svojho odchodu do dôchodku pôsobil na fakulte ako profesor Katedry algebry a teórie čísel.

Profesor Katriňák bol svetovo uznávanou autoritou v oblasti teórie zväzov a univerzálnej algebry a popredným špecialistom v oblasti pseudokomplementárnych zväzov a polozväzov. Spolu so svojím bývalým učiteľom a blízkym kolegom profesorom Milanom Kolibiarom boli ústrednými osobnosťami „bratislavskej školy univerzálnej algebry a teórie zväzov“, založenej v 60. rokoch 20. storočia, ktorá najmä v nasledujúcich troch dekádach značne prispela k dobrému menu československej a slovenskej matematiky, ako aj k dobrému menu Univerzity Komenského.

V poslednej dekáde svojho života, po svojom odchode do dôchodku, sa profesor Katriňák naďalej venoval vedeckej a recenznej práci, aj keď možno už nie v takej intenzite ako predtým. Stále sa zúčastňoval letných škôl z algebry i iných vedeckých podujatí, pokiaľ mu to zdravie dovoľovalo. Práve zdravotné problémy ho začali čoraz viac sužovať po jeho sedemdesiatke. Úspešne absolvoval operácie oboch kolien v Nemecku, odkiaľ pochádzala a kde mala rodinné zázemie jeho manželka Helene. Práve ona ho posledné polstoročie pokorne a spoľahlivo sprevádzala životom ako jeho oddaná manželka i najlepšia priateľka, ale aj na cestách ako šoférka, či to už boli cesty autom na konferencie doma a v zahraničí, alebo len cesty k lekárom na kontroly a vyšetrenia. Smrť manželky po krátkej a ťažkej chorobe začiatkom roka 2021 Tiborom veľmi otriasla, bez Helene sa cítil veľmi osamelý. Napriek tomu s touto osamelosťou i so svojím zhoršujúcim sa zdravotným stavom statočne bojoval, aby napokon manželku Helene 23. mája 2022 nasledoval do večnosti.

Trojicové konštrukcie

Výskumné záujmy Tibora Katriňáka boli primárne zamerané na zväzy a polozväzy, najmä na tie s pseudokomplementom. Teória pseudokomplementárnych zväzov (p-algebier) a pseudokomplementárnych polozväzov, motivovaná najmä štúdiom al-



Ivo Rosenberg, Helene, Tibor

gebraických modelov neklasických logík, sa od začiatku 60. rokov 20. storočia stala dôležitou oblasťou teórie zväzov a príspevok Katriňáka do tejto teórie bol obrovský. Jeho výsledky sa stali klasickými v danej oblasti a boli citované vo viacerých monografiách, napr. *Kongruenzrelationen algebraischer Strukturen* E. T. Schmidta [19], *Lattice theory. First concepts and distributive lattices* G. Grätzera [9], *Residuation theory* T. S. Blytha a M. F. Janowitza [2], *Distributive lattices* R. Balbesa a Ph. Dwingera [1], *Universal algebra and model theory* J. Ježka [12], *General lattice theory* G. Grätzera [10] (cituje až 20 článkov Katriňáka), *A survey on congruence lattice representations* E. T. Schmidta [20], *Ockham algebras* T. S. Blytha a J. C. Varleta [3], ako aj v stovkách vedeckých článkov.

Azda najvýznamnejšie Katriňákove vedecké úspechy sú jeho charakterizácie rôznych tried pseudokomplementárnych zväzov a polozväzov pomocou trojíc jednoduchších štruktúr k nim priradených a systematické skúmanie trojicových konštrukcií.

Trojicovú konštrukciu objavil W. Nemitz v práci [18] pre Heytingove polozväzy a vylepšili ju P. V. R. Murty a V. V. R. Rao v práci [17]. Následne ju v prácach [4] a [5] o Stoneových algebrách preslávili C. C. Chen a G. Grätzer. Neskôr práve T. Katriňák rozšíril a upravil túto konštrukciu pre všetky distributívne pseudokomplementárne zväzy (ktoré zahŕňajú aj Heytingove algebry) v článkoch [15], [18]. Trochu odlišná verzia trojicovej konštrukcie vznikla v Katriňákových prácach [9] a [20] a následne bola rozvinutá a modifikovaná W. Cornishom [6], P. Mederlym [16], J. Schmidtom [21] a znova T. Katriňákom a P. Mederlym v [27], [42] a [54]. Najmä posledný článok [54], kde boli predchádzajúce trojicové konštrukcie zovšeobecnené na najväčšiu možnú triedu tzv. „rozložiteľných" pseudokomplementárnych polozväzov, možno považovať za určité zavŕšenie celej tejto výskumnej problematiky.

Pseudokomplementárny polozväz je ohraničený priesekový polozväz $(S; \wedge, 0, 1)$ taký, že pre každý prvok $a \in S$ existuje jeho *pseudokomplement* $a^\star$ definovaný ako $a^\star = \max\{x \in S \mid x \wedge a = 0\}$. Pseudokomplementárny polozväz, ktorý je zväzom, sa nazýva *pseudokomplementárny zväz*. Pod *p-algebrou* sa potom rozumie algebra $(S; \wedge, \vee, ^\star, 0, 1)$, ktorá je pseudokomplementárnym zväzom s operáciou pseudokomplementu zahrnutou do jej signatúry. Následne sa p-algebra nazve *distributívna* alebo *modulárna*, ak zväz obdržaný z nej odstránením pseudokomplementu má príslušnú vlastnosť. Prvok a pseudokomplementárneho polozväzu S sa považuje za *uzavretý*, ak $a = a^{\star\star}$ a prvok $d \in S$ sa nazýva *hustý*, ak $d^\star = 0$. Množiny všetkých uzavretých a hustých prvkov S sú označené $B(S)$ resp. $D(S)$, pričom $B(S)$ je booleovská algebra a $D(S)$ je polozväz s jednotkou a dokonca zväzový filter v S v prípade, že S je pseudokomplementárny zväz. Avšak „podštruktúry" $B(S)$ a $D(S)$ asociované s S úplne necharakterizujú S. Koncom 60. rokov 20. storočia W. Nemitz a nezávisle C. C. Chen a G. Grätzer ukázali, že za určitých podmienok tretí prvok informácie o S, isté „prepojovacie“ zobrazenie $\varphi_S\colon B(S) \to D(S)$, postačuje na charakterizáciu S pomocou trojice $(B(S), D(S), \varphi_S)$. To iniciovalo mohutný rozvoj „trojicových metód“ v teórii pseudokomplementárnych polozväzov, pseudokomplementárnych zväzov a p-algebier. O tento rozvoj sa zaslúžil najmä Tibor Katriňák.

Ďalší vedecký prínos

V práci [19] Tibor Katriňák študoval Stoneove a Postove algebry rádu n. Takmer celý jeho článok bol prevzatý do monografie *Distributive lattices* R. Balbesa a Ph. Dwingera [1]. Katriňákove Stoneove a Postove algebry rádu n označili G. Epstein a A. Horn vo svojej práci [7] za jedno z najzaujímavejších zovšeobecnení Postových algebier, ktoré sa stali známe ako algebraické modely viachodnotových logík.

V prácach [17] a [32] charakterizoval trojice asociované s voľnými Stoneovými algebrami s m generátormi. Tým vyriešil problémy formulované v prácach [4] a [5] i v monografii *Lattice theory. First concepts and distributive lattices* G. Grätzera [9, Problem 54]. Do roku 1982 všetky známe články popisujúce voľné p-algebry sa týkali distributívnych p-algebier. V práci [51] Tibor Katriňák rozšíril tieto výsledky charakterizovaním voľných algebier v celej triede p-algebier.

Ďalšia oblasť výskumných záujmov profesora Katriňáka bola v štúdiu polopriamo nerozložiteľných algebier v niektorých triedach p-algebier, čoho sa týkajú jeho práce [16], [23], [25] a [44]. A tiež v štúdiu ekvacionálnych tried (variet) p-algebier, čomu sa venoval v prácach [24] a [56]. V práci [24] ukázal, že zväz zväzových variet možno vnoriť do zväzu všetkých variet p-algebier, čím zodpovedal ďalší otvorený problém z monografie *Lattice theory. First concepts and distributive lattices* G. Grätzera [9] a objasnil pozadie hlavných ťažkostí, ktorým sa čelí pri výskume p-algebier.

Séria prác profesora Katriňáka bola venovaná štúdiu dvojných p-algebier, hlavne vlastnostiam distributívnych dvojných p-algebier, čoho sa týkali jeho články [21], [28] a [53] a konštrukciám regulárnych dvojných p-algebier [29] a modulárnych dvojných p-algebier [40]. Katriňákove výsledky o injektívnych dvojných Stoneových algebrách [30] použili R. Beazer, B. Davey, A. Romanowska, A. Urquhart a mnohí ďalší algebraici. Reprezentácie zväzmi kongruencií distributívnych p-algebier boli skúmané v jeho prácach [38] a [65]. Mnoho výsledkov Tibora Katriňáka sa týka charakterizácie zväzov a algebier, ktorých zväzy kongruencií patria do rôznych variet p-algebier, napr. v prácach [58], [59], [60], [62]. Charakterizácia projektívnych p-algebier v rámci triedy všetkých p-algebier bola prezentovaná v práci [63], kde Tiborovým spoluautorom bol terajší dekan FMFI UK profesor D. Ševčovič, ktorý robil prvé výskumné kroky tiež pod vedením profesora Katriňáka.

Abstraktný charakterizačný problém pre zväzy kongruencií pseudokomplementárnych polozväzov vyriešil profesor Katriňák v práci [67]. V práci [68] sa mu podarila vnútorná algebraická charakterizácia voľných algebier vo všetkých Leeových triedach distributívnych p-algebier, s použitím nového prístupu konštrukcie voľného rozšírenia posetov v triede distributívnych zväzov. V práci [64] s J. Hedlíkovou uskutočnili štúdium zväzovej relácie „medzi“ a v práci [66] zovšeobecnenili Königovu lemu. S doktorandkou Z. Heleyovou v práci [69] prezentovali charakterizáciu voľných súčinov pseudokomplementárnych polozväzov, vrátane voľných pseudokomplementárnych polozväzov. V práci [70] s M. Žabkom ukázali, že každá netriviálna dvojná Stoneova algebra môže byť charakterizovaná z hľadiska slabých booleovských produktov tzv. čistých dvojných Stoneových algebier a uviedli novú charakterizáciu voľných regulárnych dvojných Stoneových algebier.

Na sklonku svojej obdivuhodnej vedeckej kariéry profesor Katriňák v sérii spoločných prác s prvým autorom tohto článku najprv opísali projektívne rozšírenia polozväzov a ohraničených polozväzov [71], [72] a homomorfné rozšírenia pseudokomplementárnych polozväzov [73]. U konečných pseudokomplementárnych zväzov opísali ich spektrá a tzv. Glivenkovu kongruenciu [74] a v práci [75] uviedli nový prístup k opisu voľných pseudokomplementárnych polozväzov. V ich poslednej spoločnej práci [76], ktorá vyšla v časopise *Algebra Universalis*, dlhoročnej svetovej časopiseckej jednotke v oblasti univerzálnej algebry, uviedli novú konštrukciu pseudokomplementárnych polozväzov. Je obdivuhodné, že Tibor Katriňák mal publikovaných až 27 vedeckých prác v zmienenom svetovom časopise, pričom 19 z nich mu tam uverejnili ešte „spoza železnej opony“, keď cestovanie na Západ a prístup k svetovej časopiseckej literatúre boli v bývalom „východnom bloku“ mimoriadne komplikované.

Čo nám zanechal

Profesor Katriňák bol inšpiratívnym učiteľom, ktorý vzdelával a vedecky pozitívne ovplyvnil mnohých slovenských matematikov zo strednej aj staršej generácie. Osem študentov-ašpirantov (v dnešnej terminológii doktorandov), Peter Mederly, Zuzana Ladzianska, Tomáš Hecht, Pavol Zlatoš, Sanaa El-Assar, dvaja autori tohto článku a ako posledná Zuzana Heleyová, pod jeho školiteľským vedením vytvorilo a úspešne obhájilo svoje dizertačné práce. Avšak počet tých, ktorých nasmeroval k ich vedeckej kariére a ktorí profitovali z jeho starostlivého a kompetentného vedenia je oveľa väčší a sotva ho je možné odhadnúť.

Profesor Tibor Katriňák prijal veľa povinností v rámci Matematicko-fyzikálnej fakulty Univerzity Komenského a československej a neskôr slovenskej matematickej komunity. Venoval týmto povinnostiam veľa svojho času a energie a slúžil zmieneným matematickým komunitám mnohými spôsobmi. Vykonal veľa profesijnej a organizačnej práce ako predseda komisií pre CSc., PhD. a DrSc. práce z oblastí algebry a teórie čísel, ako člen Slovenskej grantovej agentúry pre matematické a fyzikálne vedy, ako člen vedeckých rád na univerzitnej aj fakultnej úrovni, ako šéfredaktor časopisu Acta Mathematica Universitatis Comenianae (AMUC) a člen redakčných rád časopisov Mathematica Slovaca, Czechoslovak Mathematical Journal a Zborník z matematiky, fyziky a astronómie. Tiež bol organizátorom a spoluorganizátorom viacerých letných škôl a konferencií. A mohli by sme pokračovať vymenovaním mnohých ďalších viac alebo menej formálnych povinností, ako napríklad jeho dlhotrvajúce obetavé zapojenie sa do udržania prevádzky fakultnej knižnice.

Vedecký i ľudský odkaz, ktorý Tibor zanechal v slovenskej a medzinárodnej komunite algebraikov, ako aj v spoločenstve vysokoškolských učiteľov, výskumníkov a študentov Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, je enormný a je mimoriadne príkladný pre generácie, ktoré prišli po ňom. O jeho skromnosti a obetavosti, ktoré považoval za samozrejmé, svedčia aj časti z rozhovoru s ním, ktorý sa uskutočnil pred jeho sedemdesiatinami a ktoré nasledujú v predposlednej časti tohto príspevku. (Ako poslednú časť sme si dovolili uverejniť zoznam jeho vedeckých článkov, dizertácií a učebníc – na jeho články totiž smerujú už uvedené početné referencie v častiach venovaným vedeckému prínosu profesora Katriňáka.)

Profesor Tibor Katriňák, mimoriadne inšpiratívny vedec a pritom skromný a obetavý človek, bude veľmi chýbať jeho súčasným i bývalým kolegom na fakulte, početnej plejáde jeho bývalých študentov, jeho vedeckým spolupracovníkom, priateľom i mnohým výskumníkom v slovenskej a medzinárodnej matematickej komunite.

Requiescat In Pace!

Literatúra – References

[1] Balbes, R., Dwinger, Ph.: *Distributive lattices*. Univ. Missouri Press, Columbia, Miss., 1974.
[2] Blyth, T. S., Janowitz, M. F.: *Residuation theory*. Pergamon Press, 1972.
[3] Blyth, T. S., Varlet, J. C.: *Ockham algebras*. Oxford University Press, 1994.
[4] Chen, C. C., Grätzer, G.: *Stone lattices I. Construction theorems*. Canad. J. Math. 21 (1969), 884–894.
[5] Chen, C. C., Grätzer, G.: *Stone lattices II. Structure theorems*. Canad. J. Math. 21 (1969), 895–903.
[6] Cornish, W.: *Pseudo-complemented modular semilattices*. J. Austral. Math. Soc. 18 (1974), 239–251.
[7] Epstein, G., Horn, A.: *Chain based lattices*. Pac. J. Math. 55 (1974), 65–84.
[8] Grätzer, G., Schmidt, E. T.: *On a problem of M.H. Stone*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 8 (1957), 455–460.

[9] Grätzer, G.: *Lattice theory. First concepts and distributive lattices*. Freeman, San Francisco, 1971.
[10] Grätzer, G.: *General lattice theory*. Birkhäuser-Verlag, Basel, 1978.
[11] Haviar, M., Zlatoš, P.: *Professor Tibor Katriňák will be seventy next year*. Mathematica Slovaca, Vol. 56, No. 1 (2006), i–xii.
[12] Ježek, J.: *Universal algebra and model theory*. Mat. seminár, SNTL Praha, 1976.
[13] Katriňák, T.: *Constructions of algebras with pseudocomplementation operation* (an extended abstract of DrSc. dissertation). Comenius University, Bratislava, 1980.
[14] Katriňák, T.: *p-algebras*. In: Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 33. (Contributions to lattice theory, Szeged 1980.) 1983, 549–573.
[15] Katriňák, T., Mederly, P.: *Constructions of p-algebras*. Algebra Universalis 17 (1983), 288–316.
[16] Mederly, P.: *A characterization of modular pseudocomplemented semilattices*. In: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 14. 1974, 231–248.
[17] Murty P. V. R., Rao, V. V. R.: *Characterization of certain classes of pseudocomplemented semi-lattices*. Algebra Universalis 4 (1974), 289–300.
[18] Nemitz, W. C.: *Implicative semi-lattices*. Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965), 128–142.
[19] Schmidt, E. T.: *Kongruenzrelationen algebraischer Strukturen*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969.
[20] Schmidt, E. T.: *A survey on congruence lattice representations*. Teubner-Verlag, Leipzig, 1982.
[21] Schmidt, J.: *Quasi-decompositions, exact sequences and triple sums of semigroups I. General theory*. In: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 17. 1975, 365–397.

Z rozhovoru s profesorom Katriňákom

V tejto časti uvádzame vybrané časti rozhovoru s profesorom Katriňákom k jeho sedemdesiatinám v článku [11], z ktorého sme čerpali aj mnohé fakty uvedené vyššie.

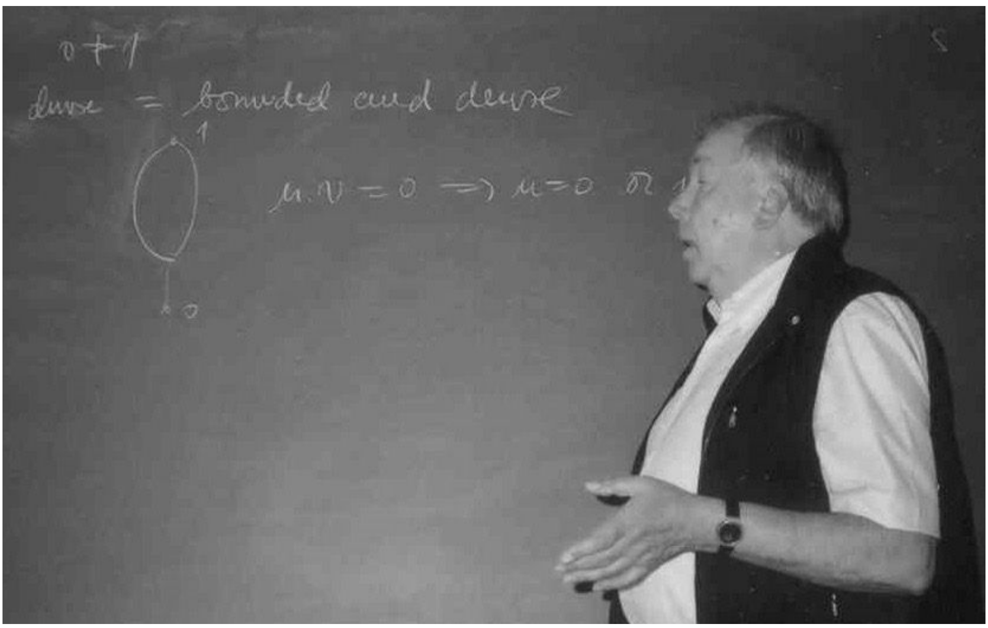
Profesor Katriňák, prosím, mohli by ste pripomenúť svoje začiatky v matematike a ľudí, ktorí vás najviac ovplyvnili pri formovaní vašich výskumných záujmov a pedagogických postojov?

Rozhodne to bol profesor Milan Kolibiar. Okrem neho som sa veľa naučil od profesora Tibora Neubrunna a profesora Tibora Šaláta. Obdivoval som profesora Otakara Borůvku, ktorý pravidelne cestoval na svoje prednášky z Brna do Bratislavy dvakrát do mesiaca koncom 50. rokov 20. storočia. V tom čase bol pre mňa inkarnáciou pravého univerzitného profesora: človek vznešených spôsobov, výborný prednášateľ so širokými znalosťami a jasným pohľadom na matematiku. Neskôr som pochopil, že mal nesmrteľnú zásluhu na prebudení slovenskej matematiky z dlhého spánku. Ľutujem, že som sa relatívne neskoro zoznámil s profesorom Jánom Jakubíkom a profesorom Štefanom Schwarzom.

Aké boli vaše začiatky na medzinárodnej úrovni?

Bolo to myslím v roku 1966 v Ľubochni, kde sme organizovali prvú medzinárodnú letnú školu z univerzálnej algebry a usporiadaných množín. Ak sa nemýlim, boli sme prví, aspoň v Európe, ktorí začali pravidelne organizovať medzinárodné konferencie venované týmto oblastiam. Začiatkom 70. rokov začali Maďari podobné aktivity a neskôr na ne nadviazali algebraici zo Západného Nemecka (hlavne vďaka profesorovi Willemu) a Poľska. Z času na čas prispeli k týmto aktivitám aj algebraici z Východného Nemecka a Sovietskeho zväzu.

Ale vráťme sa ku konferencii v Ľubochni v roku 1966. Prišiel tam profesor Marczewski z Wroclavi so svojimi dvoma dcérami. Bol tam profesor E. T. Schmidt z Budapešti – vtedy som ho stretol osobne prvýkrát, hoci som ho už poznal celkom dobre vďaka štúdiu jeho prác. Zoznámil som sa aj s profesorom Jürgom Schmidtom z Bonnu, ktorý sa neskôr stal oficiálnym konzultantom počas môjho Humboldtovho štipendia. Sprevádzal ho jeho mladý kolega Dr. Peter Burmeister a stali sme sa s ním priateľmi. A pomerne veľká delegácia sovietskych matematikov pricestovala zo Sverdlovska (teraz je to opäť Jekaterinburg). V neposlednom rade si dobre pamätám profesorov Jureka Plonku a Kažeka Glazeka, obaja boli z Wroclavi. S Kažekom sme sa tiež čoskoro stali priateľmi.



Prednáška na letnej škole

Ako si spomínate na vytvorenie „bratislavskej školy univerzálnej algebry a teórie zväzov“, ľudí v nej a vzostup jej medzinárodnej reputácie?

Prvé semienko zasadil profesor Borůvka. On odporučil profesorom Jakubíkovi a Kolibiarovi študovať teóriu zväzov. Ján Jakubík sa však presťahoval do Košíc z trochu prozaických dôvodov – bol mu tam pridelený byt. Tým, že Milan Kolibiar zostal v Bratislave sám, začal zapájať študentov do svojho výskumu v algebre a aj sa mu to úspešne darilo. To bola naozaj skvelá vec! Dvaja z jeho študentov, Pavol Brunovský a Beloslav Riečan, hoci sa neskôr presunuli do iných oblastí matematiky, dokonca publikovali svoje vedecké prvotiny v univerzálnej algebre a teórii zväzov pod vedením Milana Kolibiara. Nasledoval som ja – v skutočnosti som bol prvým oficiálnym doktorandom profesora Kolibiara. S pribúdajúcim počtom doktorandov, napr. Eva Gedeonová, Hilda Draškovičová, Oľga Klaučová, Ivan Korec, Anton Legéň, Zuzana Ladzianska, Ivan Žembery, aby sme spomenuli len niekoľko z nich, sa skupina značne rozrástla. Od roku 1962 sme začali organizovať pravidelné letné školy z univerzálnej algebry a a usporiadaných množín, ktoré tiež priniesli výrazné zvýšenie kvality. Ako už bolo spomenuté vyššie, od roku 1966 mali aj medzinárodných účastníkov. Odvtedy sa každý rok v septembri (okrem roku 1968) konferencia striedavo organizovala v Čechách alebo na Morave na jednej strane, alebo na Slovensku na druhej strane. Vďaka profesorovi Kolibiarovi a našim kolegom z Brna, profesorovi Miroslavovi Novotnému, profesorovi Františkovi Šikovi a docentovi Milanovi Sekaninovi, konferencia prežila kritickú dekádu 1970 – 1980, keď bola ohrozená jej samotná existencia.

Keďže úroveň českej matematiky bola vyššia ako u nás, veľa sme profitovali z kontaktov s Brnom a neskôr aj s Prahou. Iróniou osudu naši kolegovia v Brne sa v druhej polovici 70. rokov dostali do nemilosti úradov. Nesmeli učiť a dvaja z nich dokonca museli opustiť univerzitu. V dôsledku toho sa naše vedecké kontakty zúžili na takmer desaťročie.

Keď sa objavila v roku 1968 monografia Universal Algebra od Georga Grätzera, čo vyvolalo značný nárast záujmu o túto oblasť, jej autor sa čoskoro stal akýmsi „guru“ v tejto oblasti. Môžete nám povedať niečo o svojich raných kontaktoch s ním?

Nemyslím si, že to malo niečo spoločné s uverejnením monografie *Univerzálna algebra*. Okolo roku 1965 Milan Kolibiar písal Grätzerovi a poslal mu moje riešenie problému týkajúceho sa Stoneových algebier z článku z roku 1957 od G. Grätzera a E. T. Schmidta. Vo svojej reakcii Grätzer odporučil publikovať výsledok. Stalo sa tak v práci [3]. Neskôr som v Bonne počul od Rudolpha Willea o preprinte Grätzera obsahujúcom nové výsledky o Stoneových algebrách. Napísal som mu a on mi to čoskoro poslal. Na základe toho som napísal článok [9] a odoslal som ho ako preprint Grätzerovi. Krátko na to som dostal moje prvé pozvanie do Kanady z jeho strany. Neskôr ma pozval niekoľkokrát, najmä začiatkom 70. rokov 20. storočia. Avšak všetky moje pokusy pozvania prijať naše úrady odmietli a ja som sa nikdy nedozvedel o dôvodoch. Vtedy nebolo zvykom odpovedať na žiadosti a odôvodniť rozhodnutia.

Posledné desaťročie pred prelomom v roku 1989 už prebiehalo na novozaloženej Matematicko-fyzikálnej fakulte, ktorá sa oddelila od Prírodovedeckej fakulty v roku 1981. Aké máte spomienky na toto obdobie?

Normalizácia postupne slabla, avšak objavili sa finančné problémy. To bol tiež jeden z dôvodov rozdelenia pôvodnej fakulty. Rozdelenie spoločnej knižnice trvalo desať rokov. Od roku 1982 bolo k dispozícii oveľa menej peňazí na nákup literatúry. Prišli sme s novým nápadom: namiesto nákupu časopisov sme sa snažili zamerať na výrobu ich mikrofišových kópií. Ale aj toto sa v priebehu niekoľkých rokov zrútilo. Nebolo možné v celom východnom bloku dostať xeroxové stroje dostatočnej kvality. Nedokázala ich dodať ani prestížna spoločnosť *Carl Zeiss Jena*. Spomínam si, že naša fakulta mala len jeden „xerox" domácej výroby. Poriadne mizerná situácia! K stroju bol pritom ustanovený administratívny pracovník, ktorý skopíroval niečo pre vás iba na základe písomného súhlasu schváleného dekanom alebo tajomníkom fakulty. Podobne to bolo aj so služobnými cestami do zahraničia. Jediný rozdiel bol v tom, že to druhé vyžadovalo podstatne viac pečiatok a podpisov…

Ako zmeny v novembri 1989 ovplyvnili situáciu na Matematicko-fyzikálnej fakulte UK a všeobecnejšie v akademickom prostredí na Slovensku?

Prekvapil ma chaotický vývoj akademických inštitúcií na Slovensku. Pochybujem, že je dobré, ak má 5-miliónový národ 27 univerzít. Toto automaticky vedie k zníženiu kvality. Vzdelávací systém je značne podvyživený a učitelia sú takmer na spodku spoločenského rebríčka. Univerzity stratili veľa schopných ľudí strednej generácie. Buď sú v zahraničí, alebo pracujú ako „biele goliere" v bankách, poisťovniach a pod.

Ako vidíte budúcnosť matematiky a jej vzdelávania na Slovensku?

Dúfam, že napriek všetkým negatívnym vplyvom slovenská matematika prežije. Matematických talentov narodených v našej krajine je stále veľa. Ak sa rozhodne len jedna tretina z nich robiť matematiku, malo by to stačiť na zaručenie prežitia matematického výskumu na Slovensku v budúcnosti.

V porovnaní so staršou generáciou, dnešní mladí ľudia, najmä tí nadaní, majú oveľa viac príležitostí vybrať si svoju budúcnosť. Stále by ste im odporučili študovať matematiku a pokračovať v akademickej kariére? A ak áno, tak prečo?

Absolútne! Potešenie a radosť z nových objavov nemožno vážiť ani zlatom. To platí samozrejme o vede vo všeobecnosti, nielen o matematike.

Tibor na potulkách

Zoznam vedeckých článkov, dizertácií a učebníc profesora Katriňáka

Vedecké články

[1] Katriňák, T.: *Note sur les ensembles ordonnes*. Acta Fac. Nat. Univ. Comenian. 4 (1959), 291–294.

[2] Katriňák, T.: *On the characterization of a lattice by a ternary operation* (In Slovak). Acta Fac. Nat. Univ. Comenian. 6 (1961), 335–342.

[3] Katriňák, T.: *Notes on Stone lattices I* (In Russian). Mat. Fyz. Časopis Slov. Akad. Vied 16 (1966), 128–142.

[4] Katriňák, T.: *Notes on Stone lattices II* (In Russian). Mat. Časopis Slov. Akad. Vied 17 (1967), 20–37.

[5] Katriňák, T.: *Bemerkung über pseudokomplementären halbgeordneten Mengen*. Acta Fac. Rerum Nat. Univ. Comenian. Math. Publ. 19 (1968), 181–185.

[6] Katriňák, T.: *Pseudokomplementäre Halbverbände*, Mat. Časopis Slov. Akad. Vied 18 (1968), 121–143.

[7] Katriňák, T.: *Über einige Probleme von J. Varlet*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 38 (1969), 428–434.

[8] Katriňák, T.: *Charakterisierung der verallgemeinerten Stoneschen Halbverbände*. Mat. Časopis Slov. Akad. Vied 19 (1969), 235–247.

[9] Katriňák, T.: *Die Kennzeichnung der distributiven pseudokomplementären Halbverbände*. J. Reine Angew. Math. 241 (1970), 160–179.

[10] Katriňák, T.: *Eine Charakterisierung der fast schwach modulären Verbände*. Math. Z. 114 (1970), 49–58.

[11] Katriňák, T.: *M-Polare in halbgeordneten Mengen*. v Casopis Pěst. Mat. 95 (1970), 416–419.

[12] Katriňák, T.: *Remarks on the W. C. Nemitz's paper "Semi-Boolean lattices"*. Notre Dame J. Formal Logic 11 (1970), 425–430.

[13] Katriňák, T.: *Relativ Stonesche Halbverbände sind Verbände*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 40 (1971), 91–93.

[14] Hecht, T., Katriňák, T.: *Equational classes of relative Stone algebras*. Notre Dame J. Formal Logic 13 (1972), 248–254.

[15] Katriňák, T.: *Über eine Konstruktion der distributiven pseudokomplementären Verbände*. Math. Nachr. 53 (1972), 85–99.

[16] Katriňák, T.: *Subdirectly irreducible modular p-algebras*. Algebra Universalis 2 (1972), 166–173.

[17] Katriňák, T.: *Die freien Stoneschen Verbände und ihre Tripelcharakterisierung*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 23 (1972), 315–326.

[18] Katriňák, T.: *Die Kennzeichnung der beschränkten Brouwerschen Verbände*. Czechoslovak Math. J. 22 (1972), 427–434.

[19] Katriňák, T.: *Stonesche Verbände der Ordnung n und Postalgebren*. Math. Ann. 199 (1972), 13–30.

[20] Katriňák, T.: *A new proof of the construction theorem for Stone algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973), 75–78.

[21] Katriňák, T.: *The structure of distributive double p-algebras. Regularity and congruences*. Algebra Universalis 3 (1973), 238–246.

[22] Katriňák, T., Neubrunn, T.: *On certain generalized probability domains*. Mat. Časopis Slov. Akad. Vied 23 (1973), 209–215.

[23] Katriňák, T.: *Construction of some subdirectly irreducible modular p-algebras*. Algebra Universalis 3 (1973), 321–327.

[24] Katriňák, T.: *The cardinality of the lattice of all equational classes of p-algebras*. Algebra Universalis 3 (1973), 328–329.

[25] Katriňák, T.: *Primitive Klassen von modulären S-Algebren*. J. Reine Angew. Math. 261 (1973), 55–70.

[26] Katriňák, T.: *Varieties of modular p-algebras*. Colloq. Math. 29 (1974), 179–187.

[27] Katriňák, T., Mederly, P.: *Construction of modular p-algebras*. Algebra Universalis 4 (1974), 301–315.

[28] Katriňák, T.: *Congruence extension property for distributive double p-algebras*. Algebra Universalis 4 (1974), 273–276.

[29] Katriňák, T.: *Construction of regular double p-algebras*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 43 (1974), 283–290.

[30] Katriňák, T.: *Injective double Stone algebras*. Algebra Universalis 4 (1974), 259–267.

[31] Katriňák, T.: *Equational classes of modular p-algebras*. In: Acta Fac. Rerum Nat. Univ. Comenian. Math. (Special issue on the theory of ordered sets and general algebras.) 1975, 19–21.

[32] Katriňák, T.: *A new description of the free Stone algebras*. Algebra Universalis 5 (1975), 179–189.
[33] Katriňák, T.: *On a problem of G. Grätzer*. Proc. Amer. Math. Soc. 57 (1976), 19–24.
[34] Hecht, T., Katriňák, T.: *Principal congruences of p-algebras and double p-algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. 58 (1976), 25–31.
[35] Hecht, T., Katriňák, T.: *Free double Stone algebras*. In: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 14. (Contributions to lattice theory, Szeged 1974.) 1976, 77–95.
[36] Katriňák, T.: *Essential extensions of Stone algebras*. Algebra Universalis 7 (1977), 1–3.
[37] Katriňák, T.: *Essential extensions and injective hulls of double Stone algebras*. Algebra Universalis 7 (1977), 5–23.
[38] Katriňák, T.: *Congruence lattices of distributive p-algebras*. Algebra Universalis 7 (1977), 265–271.
[39] Glazek, K., Hecht, T., Katriňák, T.: *On weak homomorphisms of Stone algebras*. In: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 17. (Contributions to universal algebra, Szeged 1975.) 1977, 145–159.
[40] Katriňák, T.: *Construction of modular double S-algebras*. Algebra Universalis 8 (1978), 15–22.
[41] Katriňák, T.: *Congruence pairs on p-algebras with a modular frame*. Algebra Universalis 8 (1978), 205–220.
[42] Katriňák, T., Mederly, P.: *Construction of p-algebras with a modular frame*. Houston J. Math. (1978), 67–79.
[43] Katriňák, T.: *The free $\{0, 1\}$-distributive product of distributive p-algebras*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 47 (1978), 323–328.
[44] Katriňák, T.: *Subdirectly irreducible p-algebras*. Algebra Universalis 9 (1979), 116–126.
[45] Katriňák, T.: *Subdirectly irreducible double p-algebras of finite range*. Algebra Universalis 9 (1979), 135–141.
[46] Katriňák, T.: *Subdirectly irreducible distributive double p-algebras*. Algebra Universalis 10 (1980), 195–219.
[47] Katriňák, T.: *Essential and strong extensions of p-algebras*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 49 (1980), 119–124.
[48] Katriňák, T.: *Subdirectly irreducible double p-algebras of finite length*. Houston J. Math. 6 (1980), 523–541.
[49] Katriňák, T.: *A new proof of the Glivenko-Frink theorem*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 50 (1981), 171.
[50] Katriňák, T.: *Example of a modular S-algebra*. In: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 29. (Universal algebra, Esztergom 1977.) 1982, 449–451.
[51] Katriňák, T.: *Free p-algebras*. Algebra Universalis 15 (1982), 176–186.
[52] Glazek, K., Katriňák, T.: *Weak homomorphisms of distributive p-algebras*. Banach Center Publ. 9. (Universal algebra and applications, Warsaw 1978.) 1982, 383–390.
[53] Katriňák, T.: *A note on subdirectly irreducible distributive double p-algebras*. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 35 (1983), 46–58.
[54] Katriňák, T., Mederly, P.: *Constructions of p-algebras*. Algebra Universalis 17 (1983), 288–316.

[55] Katriňák, T.: *p-algebras*. In: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 33. (Contributions to lattice theory, Szeged 1980.) 1983, 549–573.
[56] Katriňák, T.: *Splitting p-algebras*. Algebra Universalis 18 (1984), 199–224.
[57] Katriňák, T.: *Complemented p-algebras*. Acta Math. Univ. Comenian. 44/45 (1984), 37–38.
[58] Katriňák, T., El-Assar, S.: *Algebras with Boolean and Stonean congruence lattices*. Acta Math. Hungar. 48 (1986), 301–316.
[59] Haviar, M., Katriňák, T.: *Lattices whose congruence lattice is relative Stone*. Acta Sci. Math. (Szeged) 51 (1987), 81–91.
[60] Katriňák, T., El-Assar, S.: *p-algebras with Stone congruence lattices*. Acta Sci. Math. (Szeged) 51 (1987), 371–386.
[61] Katriňák, T., Mikula, K.: *On a construction of MS-algebras*. Portugal. Math. 45 (1988), 157–163.
[62] Haviar, M., Katriňák, T.: *Semi-discrete lattices with (L_n)-congruence lattices*. In: Contributions to general algebra 7. (Vienna 1990). Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna, 1991, 189-195.
[63] Katriňák, T., Ševčovič, D.: *Projective p-algebras*. Algebra Universalis 28 (1991), 280–300.
[64] Hedlíková, J., Katriňák, T.: *On a characterization of lattices by the betweenness relation — on a problem of M. Kolibiar*. Algebra Universalis 28 (1991), 389–400.
[65] Katriňák, T.: *Congruence lattices of finite p-algebras*. Algebra Universalis 31 (1994), 475–491.
[66] Hedlíková, J., Katriňák, T.: *Lattice betweenness relation and a generalization of König's lemma*. Math. Slovaca 46 (1996), 343–354.
[67] Katriňák, T.: *Congruence lattices of pseudocomplemented semilattices*. Semigroup Forum 55 (1997), 1–23.
[68] Katriňák, T.: *Free distributive p-algebras: a new approach*. Glasgow Math. J. 40 (1998), 333–342.
[69] Katriňák, T., Heleyová, Z.: *Free products of pseudocomplemented semilattices*. Semigroup Forum 60 (2000), 450–469.
[70] Katriňák, T., Žabka, M.: *A weak Boolean representation of double Stone algebras*. Houston J. Math. 30 (2004), 615–628.
[71] Katriňák, T., Guričan, J.: *Projective extensions of semilattices*. Algebra Universalis 55 (2006), 45–55.
[72] Katriňák, T., Guričan, J.: *Projective extensions of bounded semilattices*. Algebra Universalis 59 (2008), 97–110.
[73] Katriňák, T., Guričan, J.: *Homomorphic extensions of pseudocomplemented semilattices*. Acta Universitatis Matthiae Belii : Series Mathematica 15 (2009), 53–62.
[74] Katriňák, T., Guričan, J.: *Finite pseudocomplemented lattices: The spectra and the Glivenko congruence*. Algebra Universalis 66 (2011), 151–161.
[75] Katriňák, T., Guričan, J.: *Free pseudocomplemented semilattices: a new approach*. Algebra Universalis 74 (2015), 305–331.

[76] Katriňák, T., Guričan, J.: *On a new construction of pseudocomplemented semilattices*. Algebra Universalis 82 (2021), 1–12.

Dizertácie

[77] Katriňák, T.: *Stone lattices*. PhD thesis, Comenius University, Bratislava, 1965.

[78] Katriňák, T.: *Constructions of algebras with pseudocomplementation*. DrSc thesis, Comenius University, Bratislava, 1980.

Učebnice

[79] Katriňák, T., Legéň, A.: *Kapitoly VIII-XI* v knihe: Faddejev, A. K., Sominskij, J. S.: *Zbierka úloh z vyššej algebry*. Alfa, Bratislava, 1968.

[80] Katriňák, T., Legéň, A.: *Algebra*. Skriptá, Fakulta prírodných vied, Univerzita Komenského, Bratislava, 1975. (2. vyd. 1976, 3. vyd. 1978, 4. vyd. 1980, 5. vyd. 1983.)

[81] Katriňák, T., Gavalec, M., Gedeonová, E., Smítal, J.: *Algebra a teoretická arithmetika I*. Alfa, Bratislava, 1985.

[82] Šalát, T., Haviar, A., Hecht, T., Katriňák, T.: *Algebra a teoretická arithmetika II*. Alfa, Bratislava, 1986.

Adresy autorov:

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: `jaroslav.gurican@fmph.uniba.sk`

Fakulta prírodných vied, Univerzita Mateja Bela, Tajovského 40, 974 01 Banská Bystrica
e-mail: `miroslav.haviar@umb.sk`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2022 (51)

Za hrsť spomienok na profesora Tibora Katriňáka

Pavol Zlatoš

Abstract [A handful of memories of Professor Tibor Katriňák]: Professor Tibor Katriňák (1937 – 2022) was a prominent Slovak mathematician who significantly contributed to the advancement of mathematics and of the mathematical community in Slovakia in several respects. In this place we dedicate a few of personal memories to him.

Súhrn: Profesor Tibor Katriňák (1937 – 2022) bol popredný slovenský matematik, ktorý sa vo viacerých ohľadoch významne zaslúžil o rozvoj matematiky a matematickej komunity na Slovensku. Na tomto mieste mu venujeme niekoľko osobných spomiemok.

MESC: A30, A40

V máji tohto roku nás vo veku 85 rokov navždy opustil náš vzácny priateľ a kolega, profesor Tibor Katriňák. Nehodlám tu písať o jeho vedeckom ani pedagogickom prínose a jeho zásluhy o Fakultu matetmatiky fyziky a informatiky Univerzity Komenského či o slovenskú matematickú komunitu spomeniem iba útržkovite v rámci možno trochu nesúrodého kaleidoskopu osobných spomienok. O tom všetkom sa možno podrobnejšie dočítať v príspevku mojich kolegov Jaroslava Guričana a Miroslava Haviara v tomto čísle Obzorov.

Celý profesionálny, no do značnej miery aj osobný život profesora Katriňáka bol neodmysliteľne spätý s Katedrou algebry a teórie čísel Prírodovedeckej a neskôr Matematicko-fyzikálnej fakulty UK; naopak, táto by bez neho určite nebola taká, akú si ju pamätáme. Keď vo mne ešte ako v študentovi podnietil záujem o vedeckú prácu Anton Legéň, dostal som sa tak prirodzene do kontaktu s viacerými vzácnymi ľudmi z tejto katedry. Určite tesnejšieho, než aký by som bol mal možnosť nadviazať len na prednáškach a cvičeniach. Nemenej ako možnosť osobného odborného rastu a vedeckej práce na seminári profesora Kolibiara na mňa zapôsobila uvoľnená, neformálna a liberálna atmosféra, ktorá tu vládla v protiklade k pomerom vo vtedajšej spoločnosti. Na tom mali popri Milanovi Kolibiarovi zásluhu aj kolegyne Hilda Draškovičová a Eva Gedeonová a v neposlednom rade Tibor Katriňák. Tiborova prirodzená autorita pochádzala z jeho odborných a ľudských kvalít a nedala sa prehliadnuť, hoci sa jej nedostávalo inštitucionálneho krytia – skôr naopak. Tibor sa napríklad v čase previerok v roku 1970 odmietol prepožičať na politickú likvidáciu prof. Kolibiara, hoci

S Milanom Kolibiarom

S kolegyňami Evou Gedeonovou (vľavo) a Hildou Draškovičovou (v strede)

mohol tušiť, aké to bude mať dôsledky na jeho akademickú kariéru. Na dlhý čas nemohol cestovať do zahraničia a profesorom sa stal až po r. 1989. Katedra ako ostrov „pozitívnej deviácie“ však zostala zachovaná aj v časoch normalizácie.

Prof. Katriňák bol neskôr mojim školiteľom v rámci vedeckej ašpirantúry (tak sa vtedy nazývalo doktorandské štúdium). Ovplyvnil ma však nielen odborne, a až postupom času mi začalo dochádzať ako. Tibor vždy bol človekom vysokých štandardov – pracovných i morálnych. Svoj názor nijako zvlášť nepresadzoval a nikomu ho nevnucoval. No vyjadril sa, keď bolo treba. Stručne, a neraz i s ľahkou iróniou. Ale aj bez toho, že by bol musel hovoriť, jeho postoj z neho jednoducho vyžaroval. Ani vo svojej vedeckej práci sa nezvykol naháňať za kvantitatívnymi scientometrickými ukazovateľmi. Ak však už pustil niečo z ruky, tak v tom vždy bola záruka kvality – čo do formy aj obsahu.

Tiborov postoj k životu by sa dal zjednodušene a aforisticky označiť ako „zdravý pesimizmus“. Presnejšie, Tibor vedel, že svet sa sám od seba nestane lepším, dokonca bez nášho aktívneho prispenia a snahy má tendenciu degradovať k horšiemu. No nielenže to vedel; on bol vždy pripravený pričiniť sa o to, aby sa tak nestalo. Pritom si neraz dokázal naložil na chrbát viac, ako mohol uniesť, no statočne a neokázalo zápasil so svojim nákladom. Ak sa aspoň „náš malý svet“ stal za niekoľko posledných desaťročí čo i len v niektorých ohľadoch naozaj lepším miestom pre život (hoci nie až do takej miery, ako sme kedysi verili a ako by sme si želali), je to aj zásluha ľudí ako Tibor.

S kolegami Tiborom Šalátom (v strede) a Jozefom Komorníkom (vpravo)

Vedomý si vratkosti svojho postavenia na fakulte sa Tibor v časoch normalizácie nepúšťal do „heroických“ donkichotských zápasov. Namiesto toho nenápadne no neúnavne pracoval v prospech komunity. Dlhé roky napríklad pôsobil ako predseda bratislavskej pobočky Jednoty slovenských matematikov a fyzikov. Pavel Brunovský často prirovnával vtedajšiu Jednotu k Haškovej *Straně mírneho pokroku v mezích zákona* z posledných liet Rakúska-Uhorska. Presne v takomto duchu Tibor Katriňák občas pozýval na prednášky organizované v rámci Jednoty ľudí, ktorí mali vtedy z politických dôvodov značne obmedzené možnosti verejne vystupovať. Spomínam si najmä na prednášky Miroslava Katětova a Petra Vopěnku z pražského Matfyzu zo začiatku 80-tych rokov. Obaja títo prominentní matematici boli v tom čase na Karlovej univerzite zbavení možnosti prednášať študentom a len ich svetová sláva ich chránila pred prepustením. Ako kuriozitu ešte spomeniem prednášku Františka Kahudu, bývalého ministra školstva, ktorý sa neskôr začal zaoberať *psychoenergetikou*, ezoterickou teóriou prepájajúcou psychické a fyzikálne procesy prostredníctvom ním postulovaných častíc, tzv. *mentiónov*, reprezentujúcich čosi ako „kvantá mentálnej aktivity“. Práve táto prednáška vzbudila značnú nevôľu u „pravoverných“ marxistov, no najmä u preventívne vystrašených akademických a straníckych funkcionárov na fakulte. Tiborovi však pomohol ten paradoxný fakt, že Kahudov „vedecký“ výskum bol finančne a materiálne podporovaný vtedajšou politickou garnitúrou z ÚV KSČ.

Záverom si dovolím priznať sa k jednému nášmu spoločnému „projektu“ s mojim priateľom a konškolákom Jánom Krčom-Jediným, ktorý sa nám však nepodarilo uskutočniť. Pochádza ešte z čias našich vysokoškolských štúdií, keď sme boli herecky aj autorsky a režijne činní v študenstkom divadle *Pegasník*. Už neviem, ktorý z nás prišiel s nápadom napísať na motívy známej rozprávky *Dlhý, Široký a Bystrozraký* divadelnú hru *Dlhý Tibor, Široký Tibor a Bystrozraký Tibor* a úlohy hlavných hrdinov ušiť na mieru a zveriť našim učiteľom Tiborovi Katriňákovi, Tiborovi Šalátovi a Tiborovi Neubrunnovi. Hru sme síce nenapísali, ale neskôr, už ako ašpiranti, sme nabrali odvahu a pri vhodných príležitostiach sme nádejným protagonistom prezradili náš zámer. Každého z nich tá myšlienka náramne pobavila, najmä, keď si s patričnou dávkou škodoradosti predstavil v príslušných úlohách svojich slovutných kolegov. A nám samozrejme odtrnulo, zatiaľ čo náša úcta k nim ešte vzrástla. Bohužiaľ, realizáciu tohto znamenitého projektu, ktorý by mohol šíriť slávu našej fakulty i celej

S kolegom Antonom Legéňom (vľavo hore); s kolegyňou Máriou Benešovou (vpravo hore); gratulácia kolegu Pavla Brunovského (vľavo dole); záverečné napomenutie (vpravo dole)

Alma Mater dlho, široko i ďaleko, nám definitívne prekazila vyššia moc. Aspoň sa na ňu môžeme vyhovoriť. Nuž čo, ani Lasica a Satinský už spolu nenaštudujú *Príbehy dômyselného rytiera Dona Quijota de la Mancha a jeho verného zbrojnoša Sancha Panzu*, hoci postavy ich hlavných hrdinov im Miguel de Cervantes Saavedra dávno bol ušil na mieru. Nie všetko, čo by si človek želal, sa mu v živote podarí stihnúť. Nášmu Tiborovi sa toho aj tak podarilo stihnúť veľa. A nám nezostáva než na to všetko a najmä na neho s vďakou a úctou spomínať.

Naposledy sme sa v hojnejšom počte zišli s Tiborom na fakulte pri príležitosti oslavy jeho osemdesiatych narodenín. Nezakončím teda nejakou obligátnou slávnostnou formulkou obvyklou pre podobnú smútočnú príležitosť, ale niekoľkými obrázkami z tohto milého stretnutia. Myslím si, že dobrá nálada a príjemná a uvoľnená atmosféra z nich vyžarujú na prvý pohľad, takže ďalší komentár nie je potrebný. A práve takto si treba profesora Tibora Katriňáka pamätať.

Adresa autora:

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: `zlatos@fmph.uniba.sk`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2022 (51)

Lindleyův paradox

Petr Emanovský

Věnuji své ženě.

Abstract [Lindley's paradox]: Lindley's paradox in statistics refers to a situation where the frequentist and the Bayesian approach to testing a particular hypothesis leads to different conclusions. This paradox is a symbol of the conflict between two different approaches to statistical hypothesis testing. The article explains the essence of this paradox on a particular example and shows some possibilities of Bayesian data analysis.

Key words: Lindley's paradox, frequentist statistics, Bayesian statistics.

Souhrn: Lindleyovým paradoxem je ve statistice označována situace, kdy frekventistický a bayesovský přístup k testování určité hypotézy vedou k rozdílným závěrům. Tento paradox představuje symbol konfliktu mezi dvěma odlišnými přístupy ke statistickému testování hypotéz. Článek vysvětluje na konkrétním příkladu podstatu tohoto paradoxu a ukazuje některé možnosti bayesovské analýzy dat.

Klíčová slova: Lindleyův paradox, frekventistická statistika, bayesovská statistika.
MESC: A30, K70

Úvod

Tradiční frekventistické metody matematické statistiky, které jsou dnes běžně využívány v kvantitativním výzkumu, jsou určeny pro zkoumání hromadných jevů. Jejich podstatou je srovnání vlastností vzorku, "náhodně" vybraného ze základního souboru, s teoretickým pravděpodobnostním modelem. Na základě tohoto srovnání zobecňujeme vlastnosti zkoumaného vzorku na celý základní soubor, přičemž dokážeme určit pravděpodobnost omylu. Při tomto přístupu definujeme pravděpodobnost jako relativní četnost výskytu náhodného jevu. Jedním z významných nástrojů kvantitativního výzkumu, který odpovídá tomuto frekventistickému přístupu, je statistické testování hypotéz. Tato metoda je široce využívána v kvantitativním výzkumu v rámci empirických věd včetně pedagogiky a sociologie ([9], [11], [13], [14]). Poprvé se pravděpodobně tento přístup objevil již počátkem 18. století v práci skotského matematika Johna Arbuthnota ([1], [4]). Na dalším rozvoji problematiky se podílela řada významných matematických myslitelů, jako byli Abraham de Moivre (1667 – 1754), Nicolaus Bernoulli (1687 – 1759), Daniel Bernoulli (1700 – 1782), Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), Karl Fridrich Gauss (1777 – 1855), Karl Pearson (1857 – 1936) a další ([7],[5]). Do dnešní podoby byla tato metoda rozvinuta až ve 20. a 30. letech 20. století, zejména matematiky Ronaldem Fisherem (1890 – 1962), Jerzym Neymanem (1894 – 1981) a Egonem Pearsonem (1895 – 1980) ([6]). Současná statistika označuje tuto metodu zkratkou NHST (null hypothesis significance testing). Alternativní bayesovský přístup ke statistické inferenci je založen na Bayesově větě, která byla publikována již v 18. století ([2], [3]). Bouřlivý rozvoj těchto metod však začíná až ve druhé polovině 20. století díky novým možnostem výpočetní techniky a zejména s nástupem vyšších programovacích jazyků (Fortran). V dnešní době již existuje nově vyvinutý sofistikovaný software vhodný pro aplikaci bayesovské statistické analýzy (R, Python, Jasp). Lindleyovým paradoxem je ve statistice označována situace, kdy bayesovský a frekventistický přístup k testování určité hypotézy vedou k rozdílným závěrům. Problém této neshody dikutoval již Harold Jeffreys ve své knize z roku 1939 ([12]). Sir Harold Jeffreys (1891 – 1989) byl anglický matematik, statistik, geofyzik a astronom. Jeho kniha „Theory of Probability“ z roku 1939 hraje významnou roli v procesu znovuobjevení bayesovského přístupu k teorii pravděpodobnosti. Díky článku Dennise Lindleye z roku 1957 se tento problém stal známým pod názvem Lindleyův paradox, případně Jeffreysův-Lindleyův paradox ([15]). Dennis Lindley (1923 – 2013) byl anglický statistik, jeden z předních obhájců bayesovské statistiky. Přesto, že se v Lindleyově článku hovoří o paradoxu, rozdílné výsledky lze vysvětlit spíše tím, že při testování odpovídáme na dvě zásadně rozdílné otázky, než neshodou mezi oběma metodami. Bayesovský přístup k testování hypotéz do značné míry závisí na volbě apriorní pravděpodobnosti. Pro širokou třídu apriorních pravděpodobností je rozdíl mezi bayesovským a frekventistickým přístupem způsoben pevnou volbou hladiny významnosti. Pochopitelně, významnou roli zde hraje i velikost vzorku. Pokud se kritická hodnota zvyšuje s rostoucí velikostí vzorku dostatečně rychle, zmenšuje se rovněž rozdíl mezi výsledky obou přístupů.

1 Frekventistický přístup ke statistické inferenci

Většina klasických učebnic statistiky popisuje frekventistický přístup ke statistické analýze, který je založen na následujících představách ([3]):

- Numerické charakteristiky (parametry) populace jsou pevně dané, ale neznámé konstanty.

- Pravděpodobnosti jsou interpretovány jako relativní četnosti hromadných jevů.
- Statistické procedury jsou posuzovány podle toho, jak dobře se jejich výsledky shodují s hypoteticky nekonečným opakováním experimentu.

Pravděpodobnost se tedy vztahuje pouze k hromadným náhodným jevům, přičemž populační parametry mají neznámé fixní hodnoty. Pravděpodobnostní úvahy tedy nemůžeme uplatnit na tyto parametry, ale pouze na výpočet statistik náhodných výběrů z populace.

2 Bayesovský přístup ke statistické inferenci

Thomas Bayes (1702 – 1761) byl anglický duchovní, jehož jméno je dnes spojováno hlavně s jeho větou o podmíněné pravděpodobnosti ([2]). Bayes ukázal využití podmíněné pravděpodobnosti k výpočtu pravděpodobnosti předpovídaných událostí na základě výskytu událostí z nich vyplývajících. Tuto myšlenku dále rozvíjel Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) a další vědci 19. století, potom však upadla delší dobu v zapomnění. Nový zájem o tuto metodu se začíná objevovat od poloviny 20. století v pracích mnoha autorů. Patří k nim např. Bruno De Finetti, Richard Cox, Richard Jeffrey a další. Tito statistici přispěli především k rozvoji metody statistické inference založené na Bayesově větě. Hlavní myšlenky bayesovského přístupu ke statistice jsou následující ([3]):

- Protože neznáme přesnou hodnotu populačních parametrů, považujeme je za náhodné veličiny.
- Pravidla pro počítání s pravděpodobnostmi jsou použita přímo k inferenci o populačních parametrech.
- Pravděpodobnostní tvrzení o parametrech musí být interpretováno jako “stupeň přesvědčení” (prior). Pravděpodobnostní rozdělení priorů musí být subjektivní. Každá osoba může mít svůj vlastní prior obsahující relativní váhy, které tato osoba dává všem možným hodnotám parametru. Tím je vyjádřena subjektivní přijatelnost jednotlivých hodnot parametru před tím, než osoba pozoruje data.
- Revidujeme naši předběžnou představu o parametrech na základě zjištěných dat užitím Bayesovy věty. Tím dostaneme aposteriorní rozdělení, které poskytuje relativní váhy hodnot všech parametrů po analýze dat. Aposteriorní rozdělení pochází ze dvou zdrojů: z apriorního rozdělení a z pozorovaných dat.

Bayesovské metody dnes mají široké uplatnění všude tam, kde se pracuje s nejistými informacemi, tedy např. ve finančnictví, managementu, psychologii, sociologii, pedagogickém výzkumu, medicinském výzkumu, soudnictví, kriminologii, ekologii, při ekonomických studiích apod. Bayesovský přístup hraje rovněž důležitou roli v matematické logice.

3 Podmíněná pravděpodobnost a Bayesův vzorec

Z teorie pravděpodobnosti známe pojem podmíněné pravděpodobnosti náhodného jevu A za podmínky, že nastal jev B (předpokládáme, že $P(B) \neq 0$). Tato pravděpodobnost je dána vztahem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Běžně se používá rovněž Bayesův vzorec ve tvaru

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)},$$

který umožňuje výpočet podmíněných pravděpodobností $P(B_i|A)$ neslučitelných jevů $B_1, B_2, \ldots, B_n$ za podmínky, že nastal jev A. Předpokládá se přitom, že

$$P(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = 1.$$

4 Bayesovská inference pro diskrétní náhodnou veličinu

Při klasické statistické analýze považujeme zkoumaný parametr za pevně danou neznámou konstantu, kterou odhadujeme ze získaných dat. Bayesovský přístup předpokládá, že parametr je náhodná veličina, jejíž pravděpodobnostní rozdělení určujeme při daných datech. Zajímá nás tedy podmíněná pravděpodobnost $P(parametr|data)$. Výpočet takových podmíněných pravděpodobností nám právě umožňuje Bayesův vzorec pro náhodnou veličinu. Předpokládejme, že parametr považujeme za diskrétní náhodnou veličinu X s možnými hodnotami $x_1, x_2, \cdots, x_m$ (neznámá data) a pozorovaná data popisuje náhodná veličina Y s možnými hodnotami $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Podmíněné pravděpodobnosti jednotlivých hodnot parametru $x_1, x_2, \cdots, x_m$ za podmínky, že byla pozorována hodnota y_j jsou dány Bayesovým vzorcem pro diskrétní náhodnou veličinu (f značí pravděpodobnostní funkce pozorovatelné náhodné veličiny, g značí pravděpodobnostní funkce nepozorovatelné náhodné veličiny):

$$g(x_i|y_j) = \frac{g(x_i)f(y_j|x_i)}{\sum_{j=1}^{n} g(x_i)f(y_j|x_i)},$$

kde $g(x_i)$, je tzv. *apriorní funkce* (*prior*), $f(y_j|x_i)$, je *věrohodnostní funkce* (*likelihood*), $g(x_i|y_j)$ je *aposteriorní funkce* (*posterior*) a $\sum_{j=1}^{n} g(x_i)f(y_j|x_i)$ je tzv. *evidence* (*marginal likehood*). Apriorní funkce zachycuje naše znalosti o pravděpodobnostním rozdělením parametru (náhodné veličiny X) ještě před pozorováním dat.

Věrohodnost představuje podmíněnou pravděpodobnost jevu, kdy byla pozorována hodnota y_j za podmínky, že parametr má hodnotu x_i. Aposteriorní funkce vyjadřuje podmíněnou pravděpodobnost jevu, při němž parametr má hodnotu x_i, za podmínky, že byla uvažována pozorovaná data. Evidence představuje celkovou pravděpodobnost naměřených dat, kterou dostaneme sečtením společných pravděpodobností $f(x_i, y_j)$ přes všechny naměřené hodnoty. Při bayesovské analýze nepracujeme s nulovou a alternativní hypotézou, nýbrž porovnáváme dvě rovnocenné hypotézy.

5 Podstata Lindleyova paradoxu

Předpokládejme, že při určitém experimentu byla pro zkoumanou náhodnou veličinu pozorována hodnota d, která má dvě možná vysvětlení (hypotézy H_0, H_1). Dále známe apriorní pravděpodobnost $P(H_0)$ prvního vysvětlení (hypotéza H_0) před provedením experimentu. Lindleyův paradox představuje situaci, kdy se objeví současně následující dva jevy:

1. Pozorovaná hodnota d vede v rámci frekvetistického testování k zamítnutí hypotézy H_0 na dané hladině významnosti (např. $0{,}05$).
2. Pozorovaná hodnota d je v rámci bayesovské analýzy v mnohem větší shodě s hypotézou H_0, než s hypotézou H_1.

Tato situace obecně nastane, pokud apriorní pravděpodobnost $P(H_0)$ je soustředěna v úzkém intervalu a zbývající apriorní pravděpodobnost $P(H_1)$ pro alternativní hypotézu je rovnoměrně rozdělena v relativně velkém intervalu. $P(D|H_0)$ je koncentrována, zatímco $P(D|H_1)$ je rozptýlena.

Příklad 5.1
Předpokládejme, že máme dvě mince. Jedna je „poctivá“, tj. pravděpodobnost P_F, že při hodu touto mincí padne panna je $0{,}5$. Druhá mince je „nepoctivá“, tj. pravděpodobnost P_B, že při hodu touto mincí padne panna není $0{,}5$. Vezmeme náhodně jednu z mincí a provedeme s ní n hodů. Při těchto n hodech padne k-krát panna a (n–k)-krát orel. Pro kterou z mincí je tento výsledek pravděpodobnější ? ([16])

Řešení 5.2. Možné výsledky tohoto náhodného pokusu lze chápat jako hodnoty náhodné veličiny X s binomickým rozdělením. Pravděpodobnost, že při n hodech padne k-krát panna, je dána vztahem

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

V našem případě však nevíme, zda jsme házeli poctivou nebo nepoctivou mincí, tedy nevíme, jestli $p = P_F = 0{,}5$, nebo $p = P_B \neq 0{,}5$. To máme právě na základě pozorovaného výsledku rozhodnout.

a) Zkusme problém řešit pomocí klasického frekventistického testování nulové hypotézy za předpokladu, že $n = 100$ a $k = 60$. Formulujme nulovou a alternativní hypotézu takto (pro zjednodušení výpočtu uvažujme jednostrannou alternativní hypotézu):

H_0: Mince, s níž jsme házeli, je poctivá.

H_1: Mince, s níž jsme házeli, není poctivá a při hodu touto mincí padne statisticky významně častěji panna.

Podmíněná pravděpodobnost pozorovaného výsledku za předpokladu, že mince je poctivá, je

$$P(X = 60|H_0) = \binom{100}{60} 0{,}5^{60}(1 - 0{,}5)^{40} \approx 0{,}011.$$

Jelikož musíme zvážit nejenom pravděpodobnost výskytu hodnoty k, ale i všech hodnot ještě méně příznivých pro nulovou hypotézu, bude nás spíš zajímat pravděpodobnost

$$P(X \geq 60|H_0) = \sum_{k=60}^{100} \binom{100}{k} 0{,}5^{k}(1 - 0{,}5)^{100-k} \approx 0{,}028.$$

Zvolíme-li obvyklou hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$, bude tento výsledek statisticky signifikantní, tj. zamítneme nulovou hypotézu, že mince je poctivá.

b) Bayesovský přístup. Bayesovská analýza je založena na určení tzv. *aposteriorní šance* Ω_{post}, tj. poměru aposteriorních pravděpodobností $P(H_0)_{post}$ a $P(H_1)_{post}$ obou hypotéz. Tento poměr je dán vztahem

$$\Omega_{post} = \frac{P(H_0)_{post}}{P(H_1)_{post}} = \lambda \cdot \Omega_{prior}.$$

Ω_{prior} je tzv. *apriorní šance*, která je dána poměrem apriorních pravděpodobností výběru mincí, tj.

$$\Omega_{prior} = \frac{P(H_0)_{prior}}{P(H_1)_{prior}}.$$

Jelikož nemáme před realizací náhodného pokusu o mincích žádné informace, předpokládáme, že obě apriorní pravděpodobnosti jsou rovny $0{,}5$, takže prior $\Omega_{prior} = 1$. Symbol λ označuje tzv. *Bayesův faktor*, který je dán vztahem

$$\lambda = \frac{P(X = 60|H_0)}{P(X = 60|H_1)}.$$

V našem případě tedy máme

$$\Omega_{post} = \lambda = \frac{\binom{100}{60} 0{,}5^{60}(1 - 0{,}5)^{40}}{\binom{100}{60} P_B^{60}(1 - P_B)^{40}}.$$

Poznamenejme, že hodnoty aposteriorní šance Ω_{post} větší než 1 svědčí ve prospěch hypotézy H_0 a hodnoty menší než 1 ve prospěch hypotézy H_1. Již víme, že hodnota čitatele zlomku je přibližně $0{,}011$. Hodnota jmenovatele závisí na neznámé pravděpodobnosti P_B, která charakterizuje nepoctivou minci. Podívejme se, jak aposteriorní šance Ω_{post} závisí na pravděpodobnosti P_B. Nechť např. $P_B = 0{,}6$. Pak

$$P((X = 60)|H_1) = \binom{100}{60} 0{,}5^{60}(1 - 0{,}5)^{40} \approx 0{,}081.$$

Odtud

$$\lambda = \frac{0{,}010844}{0{,}081219} \approx 0{,}134.$$

Tato hodnota je menší než 1, tedy svědčí silně ve prospěch hypotézy H_1. Dospěli jsme tedy k jinému závěru, než v rámci frekventistického přístupu. Avšak např. pro $P_B = 0{,}4$ platí

$$P((X = 60)|H_1) = \binom{100}{60} 0{,}4^{60}(1 - 0{,}4)^{40} \approx 2{,}44249 \cdot 10^{-15}.$$

Odtud

$$\lambda = \frac{0{,}010844}{2{,}44249 \cdot 10^{-15}} \approx 444.$$

Tato hodnota je výrazně větší než 1, tedy svědčí silně ve prospěch hypotézy H_0.

Hodnoty uvedené v tabulce 1 svědčí o tom, že Bayesův faktor λ je menší než 1 pouze pro hodnoty P_B větší než $0{,}5$ a menší než $0{,}7$. Tedy pouze pro tento relativně málo rozsáhlý obor hodnot svědčí ve prospěch nepoctivé mince. Všechny ostatní hodnoty preferují poctivou minci. Podívejme se na to, jak bychom mohli provést bayesovskou analýzu v případě, že pravděpodobnost P_B neznáme. Abychom mohli vypočítat hodnotu λ, musíme o této pravděpodobnosti učinit určitý předpoklad. Pro jednoduchost předpokládejme, že pravděpodobnost P_B může nabýt kterékoliv z devadesáti osmi hodnot $0{,}01$, $0{,}02$, $0{,}03$, $\ldots$, $0{,}99$ (hodnota $0{,}50$ příslušící poctivé minci není zahrnuta). Každé z těchto hodnot může pravděpodobnost P_B nabýt se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{98} \approx 0{,}01$. Víme tedy, že mince, s níž házíme, je s pravděpodobností $0{,}5$ poctivá a s pravděpodobností $0{,}5$ je to některá z 98 možných nepoctivých mincí. Pravděpodobnost výběru jedné konkrétní nepoctivé mince je tedy $0{,}5 \cdot \frac{1}{98} \approx 0{,}005$. Pro aposteriorní pravděpodobnost, že vybraná mince je poctivá (za předpokladu pozorovaných dat D, tj. 60 panen ze 100 hodů), tedy platí

$$P(H_0|D) = \frac{P(D|H_0) \cdot P(H_0)}{P(D|H_0) \cdot P(H_0) + P(D|H_1) \cdot P(H_1)},$$

kde

$$P(D|H_1) \cdot P(H_1) = \sum_{i=1}^{49} P(D|H_{1_i}) \cdot P(H_{1_i}) + \sum_{i=51}^{99} P(D|H_{1_i}) \cdot P(H_{1_i}).$$

Dále víme, že $P(H_0) = 0{,}5$, $P(D|H_0) \approx 0{,}011$ a $P_{B_i} = 0{,}01 \cdot i$ a $H_{1_i} = 0{,}005$ pro každé i.

Po dosazení těchto hodnot dostaneme $P(H_0|D) = 0{,}525$. Tedy komplementární pravděpodobnost $P(H_1/D) = 0{,}475$. Pro aposteriorní šanci Ω_{post} tedy máme

$$\Omega_{post} = \frac{P(H_0)|D}{P(H_1)|D} = \frac{0{,}525}{0{,}475} \approx 111.$$

Tato hodnota indikuje mírnou preferenci hypotézy H_0.

P_B	$\binom{100}{60} P_B^{60} (1-P_B)^{40}$	λ
0,05	$1{,}53 \cdot 10^{-51}$	$7{,}08 \cdot 10^{48}$
0,10	$2{,}03 \cdot 10^{-34}$	$5{,}34 \cdot 10^{31}$
0,15	$1{,}37 \cdot 10^{-25}$	$7{,}89 \cdot 10^{22}$
0,20	$2{,}11 \cdot 10^{-18}$	$5{,}15 \cdot 10^{15}$
0,25	$1{,}37 \cdot 10^{-14}$	$7{,}89 \cdot 10^{11}$
0,30	$3{,}71 \cdot 10^{-10}$	$2{,}92 \cdot 10^{7}$
0,35	$1{,}99 \cdot 10^{-7}$	$5{,}45 \cdot 10^{4}$
0,40	$2{,}44 \cdot 10^{-5}$	443,97
0,45	$8{,}82 \cdot 10^{-4}$	12,30
0,50	0,0108	1,00
0,55	0,0488	0,22
0,60	0,0812	0,13
0,65	0,0474	0,23
0,70	0,0085	1,28
0,75	0,0004	29,90
0,80	$2{,}32 \cdot 10^{-6}$	4681,68
0,85	$8{,}85 \cdot 10^{-10}$	$1{,}23 \cdot 10^{7}$
0,90	$2{,}47 \cdot 10^{-15}$	$4{,}39 \cdot 10^{12}$
0,95	$5{,}76 \cdot 10^{-26}$	$1{,}88 \cdot 10^{23}$

Tabulka 1. Hodnoty Bayesova faktoru λ pro $P_B = 0{,}05$ až $0{,}95$ (zdroj: [16])

Výsledky uvedeného ilustračního příkladu lze shrnout takto: Pozorovaná data (60 panen ze 100 hodů mincí) vedou v rámci NHST k jednoznačnému zamítnutí nulové hypotézy, že mince je poctivá, na hladině významnosti $0{,}05$. Toto rozhodnutí bychom eventuelně mohli změnit jedině změnou hladiny významnosti. Bayesovská analýza je citlivější v tom smyslu, že rozhodnutí závisí na předpokládané pravděpodobnosti P_B charakterizující nepoctivou minci. Konkrétně bayesovská analýza ukázala, že pouze pro hodnoty pravděpodobnosti P_B mezi $0{,}5$ a $0{,}7$ pozorovaná data odpovídají s větší pravděpodobností nepoctivé minci, tj. rozhodnutí je v rozporu s NHST. Pokud hodnotu P_B neznáme a předpokládáme, že může se stejnou pravděpodobností nabýt některé z hodnot $0{,}01$, $0{,}02$, …, $0{,}99$ (kromě $0{,}5$), pozorovaná data svědčí mírně ve prospěch poctivé mince.

Závěr

Užití bayesovské inference může být vhodné v mnoha případech statistického usuzování. Za určitých podmínek (použití neinformativního prioru) však může byesovská inference vést k odlišným závěrům než inference frekventistická. Správné rozhodnutí při výběru z různých variant pak záleží na zkušenosti výzkumníka, který by se měl snažit s maximální opatrností získat co nejvíce informací pro upřesnění apriorní pravděpodobnosti. V rámci bayesovské analýzy rovněž existují některé sofistikované postupy, které umožňují předejít vzniku výše popsané paradoxní situace. Jednou z možností, jak se vyhnout tomuto konfliktu, je např. použít metodu tzv. pseudo-Bayesových faktorů ([8]). Každý výzkumník, který se seriózně zabývá statistickou anylýzou dat by se neměl omezovat pouze na klasické frekventistické metody, ale měl by se seznámit i s některými alternativními přístupy. Bayesovské metody jsou sice zpravidla náročnější na teoretické znalosti a početní dovednosti, jsou však v jistém smyslu univerzálnější než frekventistické. Neomezují se totiž pouze na analýzu hromadných jevů, takže je lze aplikovat i v kvalitativním výzkumu (sociální výzkum, pedagogický výzkum) ([10]).

Literatura – References

[1] Arbuthnot, J. An argument for divine providence, taken from the constant regularity observed in the births of both sexes. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 27,1710, 186 – 190. `http://www.jstor.org/stable/103111?`

[2] Bayes, T. & Price, R. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 53, 1763, 370 – 418.

[3] Bolstad, W. M. *Itroduction to Bayesian statistics.* N. J. : John Wiley, 2007.

[4] Emanovský, P. První statistické testování hypotézy podle Johna Arbuthnota. *Učitel matematiky*, 29(1), 2021, 26 – 36.
[5] Emanovský, P. Jak pivovarský sládek způsobil revoluci ve statistice. *Učitel matematiky*, 29(2), 2021, 96 – 110.
[6] Emanovský, P. Statistické testování hypotéz třikrát jinak. *Učitel matematiky*, 30(1), 2022, 3 – 14.
[7] Fienberg, S. E. A brief history of statistics in three and one-half chapters: a review essay. *Statistical Science*, 7(2), 1992, 208 – 225.
[8] Gelfand, A. E. & Dey, D. K. Bayesian model choice: asymptotics and exact calculations. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B (Methodological), 1994, 501 – 514.
[9] Hendl, J. *Přehled statistických metod – zpracování dat*. Praha: Portál, 2004.
[10] Hendl, J. Bayesovská statistická analýza s podporou výpočetně intenzivních procedur. *ANZDOC*, 2007. `https://adoc.tips/bayesovska-statisticka-analyza-s-podporou-vypoetn-intenzivni.html`
[11] Chráska, M. *Metody pedagogického výzkumu*. Praha: Portál, 2007.
[12] Jeffreys, H. (1961). *Theory of probability* (3rd ed.). Oxford: Oxford University Press, 1961.
[13] Klementa, J, Komenda, S. & Kunert, E. *Statistické metody v pedagogickém výzkumu*. Olomouc: VUP, 1984.
[14] Komenda, S. *Biometrie*. Olomouc: VUP, 1994.
[15] Lindley, D. V. A statistical paradox. *Biometrika* 44, 1957, 187 – 192.
[16] Nickerson, R. S. Null Hypothesis Significance Testing: A Review of an Old and Continuing Controversy. *Psychological Methods*, 5(2), 2000, 241 – 301.

Poděkování: Článek vznikl za podpory projektu Univerzity Palackého Olomouc *„Algebraické a geometrické struktury“* IGA PrF 2021 030.

Adresa autora:

Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc
e-mail: `petr.emanovsky@upol.cz`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2022 (51)

VZDELÁVANIE VO FYZIKE

Kovariancia vo fyzike – skaláry, vektory, ...

Aba Teleki

Abstract: [**Covariance in Physics – Scalars, Vectors, …**] A scalar quantity is a physical quantity given by a single number (and its physical dimension) that is the same for all observers. The type of physical quantity (scalar, vector, tensor) is determined by how the quantity behaves when passing from one frame of reference to another (when passing from one observer to another). Physical quantities are in relation to each other by physical laws. Physical laws then have the same form in all frames of reference, which is the content of general covariance. In the basic curriculum, this principle is less rigorous.

Key words: scalars, vectors, covariance in physics

Súhrn: Skalárna veličina je fyzikálna veličina daná jedným číslom (a jeho fyzikálnym rozmerom), ktorá je rovnaká pre všetkých pozorovateľov. Typ fyzikálnej veličiny (skalár, vektor, tenzor) je určený tým, ako sa veličina správa pri prechode z jednej referenčnej sústavy do druhej (pri prechode od jedného pozorovateľa k druhému). Fyzikálne veličiny sú vo vzájomnom vzťahu podľa fyzikálnych zákonov. Fyzikálne zákony majú potom vo všetkých vzťažných sústavách rovnakú podobu, čo je obsahom všeobecnej kovariancie. V základnom kurikulu je tento princíp menej dôsledný.

Kľúčové slová: skaláry, vektory, kovariancia vo fyzike

MESC: M50

1 Úvod

Skaláry, vektory, tenzory a ďalšie typy veličín hrajú fundamentálnu úlohu v tzv. *kovariancii fyzikálnych zákonov*. Kovariancia fyzikálnych zákonov sa objavila v zjavnej podobe v špeciálnej a neskôr vo všeobecnej teórii relativity. Explicitne ju vyslovil Albert Einstein. Podstatou tvrdenia je, že fyzikálne zákony nezávisia od vzťažných sústav, majú rovnakú platnosť vo všetkých vzťažných sústavách, a preto aj ich matematická formulácia by mala byť nezávislá od vzťažných sústav. Z tejto nezávislosti vyplýva, že k modelovaniu fyzikálnych veličín sa použijú také objekty, ktoré túto požiadavku sú schopní splniť: *skaláry, vektory, tenzory*,.... Ich definícia je daná transformáciami, pomocou ktorých prechádzame z jednej vzťažnej sústavy do druhej.

Medzi všetkými vzťažnými sústavami zaujímajú špeciálne postavenie inerciálne sústavy. V nich sú vyjadrené napríklad Newtonove zákony mechaniky, v nich je popísaná špeciálna teória relativity. Lokálne je ich pomocou možné popísať aj všeobecnú teóriu relativity, preto sú postačujúce pre definíciu skalárov, vektorov, či tenzorov.

Žiaci sa s pojmom vektor stretnú veľmi skoro, keď sa stretnú s pojmom sily, dozvedajú sa, že okrem veľkosti má aj smer. Fyzikálne veličiny (sila, posunutie, rýchlosť,...), ktoré majú okrem veľkosti aj smer sa nazývajú *vektormi*, kým tie ostatné, ktoré sa vyjadrujú jednoznačne jediným číslom (a fyzikálnym rozmerom) nazývajú *skalármi* (čas, hustota, teplota, obsah, dĺžka, hmotnosť, energia, elektrický náboj [1]). Takáto definícia skalárnej veličiny je rigorózna, ale nepoužíva sa rigorózne.

Z uvedených príkladov skalárov sú skalármi v zmysle kovariancie len hmotnosť a elektrický náboj. Pre žiakov sa zavádza rozdelenie fyzikálnych veličín na skaláry a vektory hlavne z dôvodu zavedenia vektorov. V podstate sa dá povedať, že pre účely žiakov zavádzame len *vektory* a nie vektory, ktoré potom nazývame *skaláry*. Takýto spôsob zavedenia skalárov však nezodpovedá uvedenej rigoróznej definícii.

Vo vektorovej podobe sú mnohé fyzikálne zákony vyjadrené výrazne jednoduchšie, než keby sme ich vyjadrili len pomocou súradníc („skalárov“). Napr. Newtonov pohybový zákon

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}, \tag{1a}$$

namiesto trojice rovníc pre súradnice

$$F_x = ma_x,\ \ F_y = ma_y,\ \ F_z = ma_z. \tag{1b}$$

Druhý spôsob sa často používa (pre jeho technickú praktickosť) v technických vedách. Sústava rovníc (1b) sa zdá byť konkrétnym vyjadrením pohybového zákona, kým (1a), pri povrchnom chápaní, len určitým skráteným zápisom.

Vektorový zápis (1a) nie je len zjednodušením zápisu, ale má hlboký fyzikálny obsah, lebo vyjadruje fyzikálny zákon nezávisle od vzťažnej sústavy. Takto vysvetľuje Jefimenko pôvod elektrických a magnetických fyzikálnych veličín[1]:

> *V čase, keď sa uskutočnili prvé kvantitatívne výskumy elektrických a magnetických javov, neboli známe žiadne elektrické alebo magnetické prístroje. Takmer všetky kvantitatívne informácie bolo potrebné získať meraním mechanických veličín a použitím prístrojov na ich meranie. Po dlhú dobu sa používala trojica mechanických merateľných veličín –*

---

[1] Voľný preklad z anglického originálu ([2], § 3-3. str. 68). Odporúčame sa zamyslieť nad týmto veľmi duchaplným zdôvodnením zavedenia takých základných fyzikálnych veličín, ako napr. elektrický náboj – to býva veľký didaktický problém.

dĺžka, hmotnosť a čas –, ako jediné základné merateľné veličiny, a dokonca sa verilo, že predstavujú konečný systém základných merateľných veličín.

Neskôr sa zistilo, že elektrické a magnetické javy možno oveľa jednoduchšie skúmať pomocou špeciálnych elektrických a magnetických prístrojov. Zistilo sa tiež, že popis týchto javov sa stal oveľa jednoduchším a prehľadnejším, ak sa spolu so starými mechanickými veličinami použijú nové elektrické alebo magnetické základné merateľné veličiny.

Je zaujímavé, že zjednodušenie vyjadrenia fyzikálnych zákonov (citát vyššie) má v pozadí niečo výrazne hlbšieho – v prípade Jefimenkovho citátu kovarianciu fyzikálnych zákonov a existenciu elektromagnetických veličín, ako elektrický náboj, elektromagnetické pole a pod.

Náš príspevok, určený hlavne učiteľom fyziky na základných a stredných školách, má za cieľ objasniť užšie spojenie princípu kovariancie so spôsobom zavedenia skalárnych veličín pre žiakov. Inými slovami situácia je lepšia, než sa môže zdať na prvý pohľad.

2 Pozorovateľ

Každý pozorovateľ používa svoj vlastný vzťažný systém. Vzťažným systémom rozumieme nie len geometriu: zavedenie osí vzťažnej sústavy. Patrí sem tiež pozorovateľom používaná sústava jednotiek (napr. Medzinárodná sústava jednotiek SI), definícia základných jednotiek, v ktorých násobkoch vyjadrí merané veličiny. Aby sme sa mohli sústrediť na podstatu kovariancie, budeme predpokladať, že všetci pozorovatelia používajú rovnakú sústavu jednotiek (napr. SI), ktorých realizácia je dostupná každému pozorovateľovi (pozri napr. [3]).

Pri ilustrácii *pozorovateľa* budeme používať (a potrebovať) len sústavu geometrických osí (x, y, z) a odpočet času (t). Vlastná vzťažná sústava pozorovateľa je spojená s týmto pozorovateľom – pozorovateľ je vo vlastnej vzťažnej sústave v pokoji. V tomto zmysle hovoríme o pozorovateľovi, či o pozorovaní konkrétnym pozorovateľom, čím hovoríme, že v ktorej vzťažnej sústave popisujeme daný jav – to je blízke aj bežnému, hovorovému vyjadrovaniu sa.

Uvažovanie o druhu fyzikálnej veličiny (či sa jedná o skalár, vektor a pod.) začína vtedy, keď máme viac vzťažných sústav, v ktorých popisujeme ten istý jav – keď ten istý jav popisuje viac pozorovateľov.

Fyzikálne javy popísané merateľnými veličinami nevyzerajú z pohľadu pozorovateľov rovnako. Výnimkou sú skalárne veličiny, ktoré sú vyjadrené číslom (a fyzikálnym rozmerom), a toto číslo je rovnaké pre všetkých pozorovateľov (napríklad hmotnosť hranola). Zdôraznime ešte raz, že číslo, ktorým je skalár vyjadrený je rovnaké (musí byť rovnaké) pre všetkých pozorovateľov. To je ona podmienka, ktorá sa nepoužíva rigorózne.

Napr. rýchlosť hranola, ktorý sa kĺže bez odporu v jednom smere rýchlosťou v, skalárna veličina nie je. Rýchlosť v danom smere sa dá vyjadriť pre každého pozorovateľa jedným číslom, ale nie tým istým číslom. Vo vlastnej vzťažnej sústave hranola je totiž hranol v pokoji, a v tejto vzťažnej sústave je rýchlosť hranola nulová ($v = 0$).

Druhým dôležitým príkladom toho, že rôzni pozorovatelia pozorujú iné hodnoty fyzikálnych veličín, je magnetické pole magnetu. Uvažujme homogénne magnetické pole medzi pólmi permanentného magnetu. Častica s elektrickým nábojom q vletí do homogénneho magnetického poľa, a z pohľadu pozorovateľa $\mathcal{P}_{\mathrm{m}}$ v sústave $\mathcal{S}_{\mathrm{m}}$ (spojeného s magnetom) na časticu pôsobí magnetická sila

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{2a}$$

Táto sila závisí od rýchlosti častice. Magnetická sila spôsobí, že sa častica vychýli z pôvodného smeru letu.

Ako ale silové pôsobenie (a zmenu smeru letu) vysvetlí pozorovateľ $\mathcal{P}_{\check{c}}$ v sústave $\mathcal{S}_{\check{c}}$ spojenej s časticou? Z jeho pohľadu má častica vždy nulovú rýchlosť. Odpoveď je, že pozorovateľ $\mathcal{P}_{\check{c}}$ pozoruje okrem indukcie magnetického poľa magnetu $\boldsymbol{B'}$ aj intenzitu elektrického poľa $\boldsymbol{E}'$, ktoré je *indukované* pohybom magnetu v $\mathcal{S}_{\check{c}}$

$$\boldsymbol{E}' = \gamma(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \ \text{ kde } \ \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{2b}$$

Pokiaľ sa nejedná o relativistickú rýchlosť (tj. $v \ll c$) v sústave častice vznikne silové pôsobenie pôsobením indukovaného elektrického poľa (ktoré v sústave $\mathcal{S}_{\mathrm{m}}$ magnetu prítomné nie je)

$$\boldsymbol{F}' = q\boldsymbol{E}' \approx \boldsymbol{q}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{2c}$$

Túto, na prvý pohľad, komplikovanú situáciu rieši práve princíp kovariancie. V skutočnosti popisuje elektromagnetické pole fyzikálna veličina, ktorá je tenzorom. Popis pomocou magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ a elektrickej intenzity $\boldsymbol{E}$, je možné len preto, že ich pomocou je možné popísať v časopriestore antisymetrický tenzor druhého rádu, tenzor elektromagnetického poľa $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ (tzv. Faradayov). Účinky elektromagnetického poľa na elektrický náboj popisuje Lorentzov vzťah (vyjadrený pomocou intenzity elektrického poľa a indukcie magnetického poľa). V sústave $\mathcal{S}_{\mathrm{m}}$ magnetu používa pozorovateľ veličiny $\boldsymbol{F}, q, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B},$ v sústave $\mathcal{S}_{\check{c}}$ častice používa pozorovateľ veličiny $\boldsymbol{F}', q', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{E}', \boldsymbol{B}'$ a vzťah je

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}), \;\; \boldsymbol{F}' = q'(\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'), \tag{2d}$$

kde $q = q'$, lebo elektrický náboj je skalárna veličina (v našom príklade $\boldsymbol{v}' = 0$, lebo častica vo vlastnej sústave stojí). Elektromagnetická indukcia sa vďaka kovariancie dostáva do nového svetla na úrovni špeciálnej relativity.

Pri prechode z jednej vzťažnej sústave do druhej sa fyzikálne veličiny transformujú. Táto transformácia rozhoduje o tom, či fyzikálna veličina je skalár, vektor, tenzor a podobne.

Našim cieľom je ukázať, ako transformácia prechodu z jednej vzťažnej sústavy do druhej rozhoduje o transformácii fyzikálnych veličín, teda o tom, či sú skalármi, vektormi, tenzormi a podobne.

3 Vzťah medzi vzťažnými sústavami (pozorovateľmi)

Pod vzťahom medzi pozorovateľmi $\mathcal{P}_\mathrm{a}$ a $\mathcal{P}_\mathrm{b}$ rozumieme transformačný vzťah medzi ich vlastnými vzťažnými sústavami $\mathcal{S}_\mathrm{a}$ a $\mathcal{S}_\mathrm{b}$. Obmedzíme sa na inerciálne vzťažné sústavy, ktoré predstavujú pre naše účely postačujúci základ pre princíp kovariancie. Transformácia predstavuje predpis časopriestorových premenných

$$t_\mathrm{a} = f_t(t_\mathrm{b}, x_\mathrm{b}, y_\mathrm{b}, z_\mathrm{b}), \tag{3a}$$
$$x_\mathrm{a} = f_x(t_\mathrm{b}, x_\mathrm{b}, y_\mathrm{b}, z_\mathrm{b}), \tag{3b}$$
$$y_\mathrm{a} = f_y(t_\mathrm{b}, x_\mathrm{b}, y_\mathrm{b}, z_\mathrm{b}), \tag{3c}$$
$$z_\mathrm{a} = f_z(t_\mathrm{b}, x_\mathrm{b}, y_\mathrm{b}, z_\mathrm{b}). \tag{3d}$$

Funkcie f v tomto všeobecnom tvare vystihujú aj prípad veľkých rýchlostí, špeciálnu teóriu relativity. V konkrétnych prípadoch sú rovnice (3) ľahko čitateľné, a fyzikálne interpretovateľné.

3.1 Vzťah rovnakých pozorovateľov – $\mathcal{T}_e$

Najjednoduchším prípadom, s ktorým sa žiaci stretnú je ten, ktorý je na základnej škole. Uvažuje sa len jediný pozorovateľ. Vzájomne sa nepohybujú, začiatok odpočtu času je ten istý, ako aj začiatky všetkých súradnicových osí, a tiež orientácia príslušných súradnicových osí je rovnaká. Inými slovami, na základnej škole všetci pozorovatelia používajú tú istú inerciálnu sústavu. V tomto prípade je vzťah medzi vzťažnými sústavami $\mathcal{S}_\mathrm{a}$ a $\mathcal{S}_\mathrm{b}$ daný transformáciou $T_e\colon \mathcal{S}_\mathrm{b} \to \mathcal{S}_\mathrm{a}$

$$t_\mathrm{a} = t_\mathrm{b}, \qquad x_\mathrm{a} = x_\mathrm{b}, \qquad y_\mathrm{a} = y_\mathrm{b}, \qquad z_\mathrm{a} = z_\mathrm{b}. \tag{4}$$

V tomto prípade namerajú obidvaja pozorovatelia rovnaké výsledky. Všetci pozorovatelia, ktorých spája transformácia T_e popísaná rovnicami (4) merajú rovnaké číselné výsledky všetkých fyzikálnych veličín. Keby existovali vo svete jedine takýto pozorovatelia – a tým by boli vyčerpané všetky prípady rôznych pozorovateľov – všetky fyzikálne veličiny by sme mohli prehlásiť za skalárne veličiny. Zavádzanie vektorových veličín by nebolo potrebné. To je prípad, ktorý nastáva na základných školách.

Jedná sa o jediné zobrazenie, jedná sa o jednoprvkovú množinu, ktorú označíme $\mathcal{T}_e$.

Môžeme sa pohrať s princípom kovariancie: skalárne veličiny sú tie veličiny, ktoré pri prechode medzi vzťažnými sústavami zachovávajú svoju hodnotu. Prechod medzi vzťažnými sústavami je v tomto prípade jediné zobrazenie T_e vyjadrené rovnicami (4). Skalárne veličiny (voči množine uvažovaných zobrazení $\mathcal{T}_e$) sú teda všetky veličiny: hmotnosť, elektrický náboj, počet častíc, čas, vzdialenosť, kinetická energia, potenciálna energia, ktorákoľvek súradnica posunutia, rýchlosti, zrýchlenia, sily a pod.

3.2 Vzájomne posunutí pozorovatelia – $\mathcal{T}_t$

Pozorovateľ $\mathcal{P}_a$ používa inerciálnu vzťažnú sústavu $\mathcal{S}_a$, kým pozorovateľ $\mathcal{P}_b$ používa inerciálnu vzťažnú sústavu $\mathcal{S}_b$, ktoré sa vzájomne nepohybujú. Príslušné súradnicové osi sú síce rovnobežné, ale začiatky môžu byť inde, ako aj začiatok odpočtu času

$$t_a = t_b + t_{b0}, \qquad x_a = x_b + x_{b0}, \qquad y_a = y_b + y_{b0}, \qquad z_a = z_b + z_{b0}. \tag{5a}$$

Jedno konkrétne zobrazenie označím T_t, a množinu všetkých týchto zobrazení označíme $\mathcal{T}_t$. Aj pri týchto zobrazeniach merajú pozorovateľ $\mathcal{P}_a$ aj $\mathcal{P}_b$ rovnaké hodnoty fyzikálnych veličín, nakoľko v súlade s Galileiho princípom relativity sa dajú merať len relatívne veličiny. Uvažujme napríklad loptu v pokoji. Meranie súradnice x_a polohy tejto lopty v súradnicovom systéme $\mathcal{S}_a$, je meraním vzhľadom na začiatok O_a súradnicového systému $\mathcal{S}_a$. Meranie súradnice x_b tej istej lopty v súradnicovom systéme $\mathcal{S}_b$ je meraním voči začiatku O_b súradnicového systému $\mathcal{S}_b$, čo (asi prekvapí) je ale iná fyzikálna veličina. Nesmieme zabudnúť na Galileiho princíp relativity – súradnicové systémy sú len pomôcky, abstrakcia, fyzikálne veličiny sa vzťahujú k reálnym objektom. Rozdiel súradníc medzi polohou dvoch hmotných bodov (malých lôpt – tých istých malých lôpt) bude na základe transformačných vzťahov (5) rovnaký v oboch vzťažných sústavách ($\mathcal{S}_a$ a $\mathcal{S}_b$)

$$\Delta t_a = \Delta t_b, \qquad \Delta x_a = \Delta x_b, \qquad \Delta y_a = \Delta y_b, \qquad \Delta z_a = \Delta z_b. \tag{5´}$$

Teraz už musí byť zrejmé, prečo súradnice x_a a x_b sme prehlásili pôvodne za rôzne fyzikálne veličiny – merali sme ich voči začiatku súradnicového systému a pokiaľ neboli totožné, v $\mathcal{S}_a$ bola v začiatku iná lopta, než v $\mathcal{S}_b$. Nemohlo sa jednať o tie isté lopty.

S odlišným začiatkom odpočtu času sa žiaci tiež stretnú v rôznych príkladoch už na základnej škole.[2] Transformácie, *translácie* T_t nemenia hodnotu meraných fyzikálnych veličín.

Ak by boli všetci pozorovatelia takí, že ich spája translácia T_t z množiny $\mathcal{T}_t$, potom znova platí, že všetci pozorovatelia dostanú pri meraní danej fyzikálnej veličiny rovnaký výsledok. Inými slovami, z hľadiska kovariancie (obmedzenej na množinu zobrazení $\mathcal{T}_t$) môžeme pracovať s každou fyzikálnou veličinou ako so skalárom.

Skalárne veličiny (voči množine uvažovaných zobrazení $\mathcal{T}_t$) sú teda všetky veličiny: hmotnosť, elektrický náboj, počet častíc, čas, vzdialenosť, kinetická energia, potenciálna energia, ktorákoľvek súradnica posunutia, rýchlosti, zrýchlenia, sily a pod.

Zdôraznime, že obmedzenie sa na inerciálne sústavy, ktoré sú spojené transláciami z $\mathcal{T}_t$ neznamená, že by sme nevedeli popísať nejaký fyzikálny jav. Sme schopní popísať všetko (napríklad relativistickou rýchlosťou letiaci elektrón), len neuvidíme všetky vlastnosti javu – nezabudnime, že hovoríme stále o pozorovateľoch, ktorých vzájomná rýchlosť je nulová, nehovoríme o pozorovateľovi, ktorý je spojený s elektrónom.

(*pokračovanie v nasledujúcom čísle*)

L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s

[1] J. Vachek, M. Bednařík, K. Klobušický, J. Maršák, J. Novák, *Fyzika pre 1. ročník gymnázia*, SPN Bratislava, 1991

[2] O.D. Jefimenko: *Electricity and Magnetism, An Introduction to the theory of Electric and Magnetic Fields*, 2nd edition, Electret Scientific Company, Star City, ISBN: 0-917-1989; (dostupný tiež online: https://www.pdfdrive.com/electricity-and-magnetism-an-introduction-to-the-theory-of-electric-and-magnetic-fields-e156845389.html)

[3] A. Teleki, B. Lacsný, Medzinárodná sústava jednotiek (SI), in: *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, vol 48, num 2, pp 15-23, ISSN 1335-4981, 2019.

Adresa autora: Aba Teleki, Schurmannova 27, 949 01 Nitra,
e-mail: JSMFteleki@gmail.com

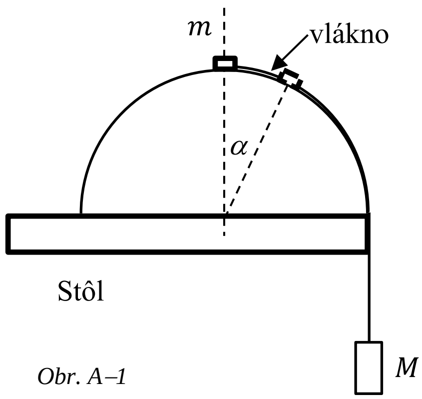
---

[2] *Peter vyrazil z domu do školy o 7:30, a kráčal konštantnou rýchlosťou* 2,0 km/h. *Katka vyrazila neskôr, a kráčala rovnomerne, po tej istej ceste ako Peter, rýchlosťou* 3,0 km/h. *Petra dostihla až pred vchodom do školy,* $t_0 = 20$ min, *po tom, čo vyrazila z domu. O koľko minút* (t_k) *po Petrovi vyrazila Katka z domu?* – Ak na tieto veličiny myslíme ako veličiny merané voči začiatku vzťažných sústav, potom spomínaných 20 minút sa meria v Katkinej sústave, ktorá má inde začiatok, ako Petrova sústava. Očakáva sa odpoveď vyjadrená v Petrovej sústave.
Samozrejme, je badať aj to, že čas t_0 je definovaný pomocou dvojice udalostí (odchod z domu - dostihla), ako aj t_k (Peter odchádza z domu – Katka odchádza z domu), preto môžeme chápať tieto časy ako relatívne časy v súlade s Galileiho princípom relativity.

Texty úloh 1. kola 64. ročníka Fyzikálnej olympiády (šk. r. 2022-2023) kategória A, kategórie B, C, D úlohy 1 až 4

Kategória A

1. Odporová sieť



Obr. A–1

Na kraji stola je položený polvalec s osou rovnobežnou s hranou stola a polomerom $R = 300$ mm. Na vrchole polvalca držíme teliesko s hmotnosťou $m = 50{,}0$ g spojené vláknom so zaveseným telesom s hmotnosťou $M = 10{,}0$ g. Na začiatku teliesko uvoľníme, takže sa začne pohybovať po povrchu polvalca, v rovine kolmej na os valca, obr. A–1.

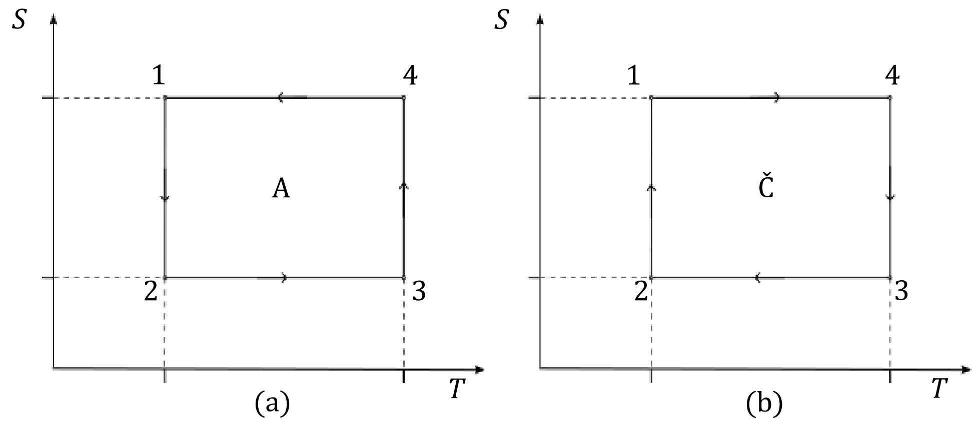
Predpokladajte, že trenie telieska a vlákna na povrchu polvalca aj hmotnosť vlákna sú zanedbateľne malé.

a) Nakreslite obrázok s telieskom v polohe, v ktorej sa šmýka po povrchu polvalca, a nakreslite v ňom vektory všetkých síl, ktoré pôsobia na teliesko.
b) Určte uhol α_{m}, pri ktorom teliesko stratí kontakt s povrchom polvalca. Použite numerické alebo grafické riešenie.
c) Určte začiatočné zrýchlenie a_0 a zrýchlenie a_{m} a rýchlosť v_{m} pri dosiahnutí uhlu α_{m}.
d) Zostrojte graf uhlu α ako funkciu času t v rozsahu $0 < \alpha < \alpha_{\mathrm{m}}$ a určte dobu t_{m} pohybu, za ktorú zavesené teleso dosiahne rýchlosť v_{m}. Potrebné výpočty urobte numericky, vhodné je použitie tabuľkového editora MS EXCEL.

Tiažové zrýchlenie $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

2. Termodynamika

Na obr. A–2 sú znázornené $S - T$ diagramy vratných termodynamických cyklov 1-2-3-4-1, kde na vodorovných osiach máme termodynamickú teplotu T a na zvislých entropiu S. V stave i je teplota stavu T_i a entrópia stavu S_i ($i = 1,2,3,4$). Na obr. (a) je znázornený cyklus tepelného stroja A, ktorý koná mechanickú prácu. Na obr. (b) vidíme ten istý cyklus prechádzaný v opačnom smere a predstavuje tepelné čerpadlo Č.



Obr. A–2

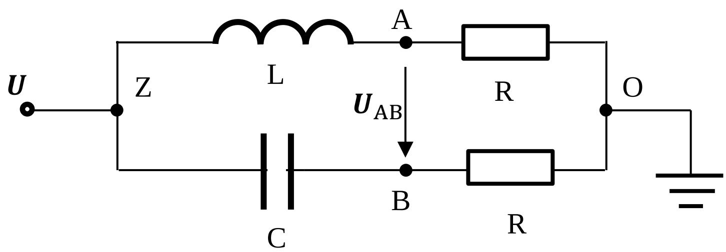
a) Určte účinnosť η tepelného stroja A.
b) Určte mechanickú prácu W, ktorú vykoná stroj A počas jedného cyklu.
c) Určte teplo Q_1, ktoré čerpadlo Č prijme z chladnejšieho tepelného zásobníka, a teplo Q_2, ktoré odovzdá do teplejšieho zohrievaného priestoru počas jedného cyklu.
d) Vysvetlite (fyzikálne) zdanlivý paradox, že čím je účinnosť η tepelného stroja A menšia, tým viac tepla prenáša čerpadlo Č z chladnejšieho prostredia do teplejšieho na 1 J práce vykonanej na plyne.

Riešte všeobecne potom pre hodnoty: $T_1 = 300$ K, $T_3 = 800$ K, $S_1 = 300\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$, $S_3 = 100\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$.

Poznámka: Preštudujte si problematiku entropie v termodynamike. Pre riešenie tejto úlohy treba vedieť, že pri vratnom izotermickom deji je zmena entropie sústavy $\Delta S = Q/T$, kde Q je teplo dodané sústave pri termodynamickej teplote T.

3. Elektrický obvod

Na obr. A–3 je schéma dvojpólu, ktorý pozostáva z induktora L s indukčnosťou L, kapacitora C s kapacitou C a dvoch rezistorov R s rovnakým odporom R. K pólom Z a O je pripojený zdroj striedavého napätia U.



Obr. A–3

a) Určte podmienku, pri splnení ktorej je impedancia dvojpólu (medzi uzlami Z a O) frekvenčne nezávislá.
b) Určte podmienku, pri splnení ktorej je efektívna hodnota prúdu v oboch vetvách dvojpólu rovnaká pri frekvencii napätia zdroja f_0.
c) Určte hodnoty indukčnosti L a kapacity C pre hodnoty $f_0 = 10$ kHz a $R = 500\ \Omega$, pre podmienky podľa častí a) a b).
d) Určte napätie $\boldsymbol{U}_{AB}$ (efektívnu hodnotu U_{AB} a fázový rozdiel φ_{AB}) medzi uzlami A a B pre hodnoty R, L, C počítanej podľa časti c), pre efektívnu hodnotu napätia zdroja $U = 12$ V a frekvencie $f_1 = 1{,}0$ kHz, $f_2 = 10$ kHz a $f_3 = 100$ kHz.
e) Zostrojte graf pomeru U_{AB}/U a fázového rozdielu φ_{AB} ako funkcie uhlovej frekvencie ω napätia zdroja.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre dané hodnoty.

4. Šošovka

Plosko-vypuklá šošovka s priemerom $D = 5{,}0$ cm je vyrobená zo skla s indexom lomu $n = 1{,}50$. Vypuklá strana šošovky má guľový tvar s polomerom krivosti $R = D$. Svetlo dopadá na rovinný povrch šošovky v smere optickej osi. Pred šošovkou sa nachádza kruhová clona, ktorou možno meniť polomer r prierezu svetelného zväzku dopadajúceho na šošovku. Clona je kolmá na optickú os a stred otvoru clony je na optickej osi. Za šošovkou je tienidlo kolmé na optickú os.
V prvom prípade zmenšíme otvor clony na polomer $r \ll R$.

a) Do akej vzdialenosti x_0 od vrcholu V guľového povrchu šošovky treba postaviť tienidlo, aby popísaný svetelný lúč vytvoril na tienidle čo najmenšiu svetelnú stopu.

b) Určte približnú hodnotu priemeru a_m svetelnej stopy svetelného zväzku pre malú, ale konečnú hodnotu r. Prečo nemožno zväzok zaostriť do jedného bodu?

V druhom prípade clonu postupne otvárame, pri nezmenenej polohe x_0 tienidla. V dôsledku toho sa mení priemer a stopy svetelného zväzku na tienidle.

c) Vyjadrite závislosť vzdialenosti $x(r)$, kde x je vzdialenosť (od vrcholu V šošovky) priesečníku, v ktorom okrajový lúč zväzku po prechode šošovkou pretne optickú os, a kde r je polomer svetelného zväzku. Zostrojte graf závislosti funkcie x/R od premennej r/R v rozsahu $(0; 0{,}5)$ a určte pomer $(x/R)_\mathrm{m}$ pre lúč $r/R = 0{,}50$.

d) Určte priemer a_0 svetelnej stopy na tienidle v polohe x_0, ak svetelný zväzok dopadá na celú plochu šošovky, tzn. $r/R = 0{,}50$.

e) Nakreslite obrázok optickej sústavy vo vhodnom meradle s použitím zadaných a vypočítaných hodnôt. Tienidlo umiestnite do vzdialenosti x_0 od vrcholu V. Do obrázku nakreslite krajné lúče prechádzajúce šošovkou pre hodnoty $r/R = 0{,}1;\ 0{,}25;\ 0{,}4;\ 0{,}5$. Z obrázku určte priemer a_0 stopy a výsledok porovnajte s hodnotou určenou výpočtom v časti d).

f) Z obrázku určte približne hodnotu x_1 vzdialenosti tienidla od vrcholu V, v ktorej je priemer stopy svetelného zväzku najmenší pri $r/R = 0{,}5$, a zmerajte priemer a_1 tejto svetelnej stopy.

5. Antičastice v mrakoch

Búrky sú každodennou súčasťou nášho života, a napriek tomu, že vieme veľa o podmienkach potrebných k vzniku blesku, stále je veľa nejasností okolo mechanizmu jeho vzniku. Bolo prekvapením, keď v roku 1985, lietadlo NASA vybavené detektormi častíc γ prelietalo búrkovým mračnom a detegovalo γ-častice pochádzajúce z mračna. Ukazuje sa, že 1 z 1000 bleskov je sprevádzaný silným γ-zábleskom. Dokonca sa zistilo, že γ-žiarenie v mračnách predchádza samotnému záblesku (niekedy až o minúty)[3]*. Pozorovania vedú k tomu, že spomínané γ-záblesky môže vyvolať aj kozmické žiarenie. Napriek tomu, že nevieme, čo spúšťa samotný blesk (výboj*

[3] Gibney Elizabeth, Mystery gamma rays could help solve age-old lightning puzzle, Nature, vol. 590, 378-381 (2021), online: https://www.nature.com/articles/d41586-021-00395-3 (pôvodný vedecký článok Enoto Ternaki, Wada Yuiki, et al.: Photonuclear reactions triggered by lithning discharge [Fotonukleárne reakcia spustené atmosferickým výbojom], Nature vol 551, 481-484 (2017))

v atmosfére), už vieme, že silný záblesk sprevádzajú v atmosfére tzv. fotonukleárne reakcie, jadrové reakcie vyvolané vysoko energetickými fotónmi.

a) Gama žiarenie vyvolá v mraku fotonukleárnu reakciu
$\gamma + {}^{14}\mathrm{N} \rightarrow {}^{13}\mathrm{N} + n,$ (1)
kde n je neutrón. Aká je minimálna energia fotónu (v jednotkách MeV), pri ktorej môže táto reakcia nastať? Aká bude kinetická energia neutrónu a izotópu 13N po reakcii pri tejto energii γ-častice (v jednotke eV)? Predpokladajte, že izotóp ${}^{14}\mathrm{N}$ je na začiatku v pokoji a neutrón sa pohybuje v smere dopadu fotónu γ.

b) Izotop dusíku ${}^{13}\mathrm{N}$ sa rozpadá β^+ rozpadom
${}^{13}\mathrm{N} \rightarrow {}^{13}\mathrm{C} + e^+ + \nu_e$, (2)
kde e^+ je pozitrón, antičastica elektrónu (t.j. antihmota) a ν_e elektrónové neutríno. Aká môže byť kinetická energia (v jednotkách MeV) pozitrónu v reakcii (2) ak neutríno odnesie len minimum energie. Predpokladajte, že k rozpadu dochádza v sústave, v ktorej ${}^{13}\mathrm{N}$ je v pokoji.

c) Vzniknutý pozitrón sa v atmosfére zráža s časticami, spomalí pri tom prakticky na nulovú rýchlosť. Vtedy vytvorí s náhodným blízkym elektrónom prostredia najprv tzv. mezoatóm (viazaný stav $e^- - e^+$), a potom spoločne anihilujú, tj. prebehne reakcia
$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma.$ (3)
Aká je energia (v jednotkách MeV) vzniknutých fotónov v ťažiskovej sústave mezoatómu a prečo?

Neutrón vznikajúci v reakcii (1) je najčastejšie zachytený atómom dusíka z atmosféry, pričom prebehne reakcia
$n + {}^{14}N \rightarrow {}^{14}\mathrm{C} + p$ (4)
kde p je protón a ${}^{14}\mathrm{C}$ izotop uhlíka. Tým sa odhalil ďalší zdroj rádioaktívneho uhlíka ${}^{14}\mathrm{C}$. Jeho ustálená produkcia v atmosfére je základom tzv. rádiokarbónovej datovacej metódy.

d) Je reakcia (4) exotermná alebo endotermná? Koľko energie sa v reakcii uvoľní ak je exotermná, resp. aká je minimálna nutná kinetická energia neutrónu, ak je endotermná? Výsledok vyjadrite v jednotkách MeV.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre nasledujúce hmotnosti neutrálnych atómov a hmotnosti elementárnych častíc:
$m({}^{14}\mathrm{N}) = 14{,}003\ 074\ 004\ 25$ u, $m({}^{13}\mathrm{N}) = 13{,}005\ 738\ 61$ u,
$m({}^{14}C) = 14{,}003\ 241\ 989$ u, $m({}^{13}C) = 13{,}003\ 354\ 835\ 34$ u,
$m_n = 1{,}008\ 664\ 915\ 9\ u$, $m_p = 1{,}007\ 825\ 031\ 90\ u$,
$m_{e^-} = m_{e^+} = 5{,}485\ 799\ 090\ 65 \times 10^{-4}$ u, u $= 1{,}660\ 539\ 066\ 60 \times 10^{-27}$ kg je

atómová hmotnostná jednotka, $c = 299\,792\,458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ rýchlosť svetla vo vákuu, $1\ \mathrm{eV} = 1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$.
Pozn.: Uvážte, či je potrebné uvažovať relativistické javy.

6. Alfa premena
Rádium $^{226}\mathrm{Ra}$ je rádioaktívny prvok, ktorý je prírodným zdrojom α-žiarenia. Čisté rádium má vzhľad striebro-bieleho kovu.

a) Napíšte rovnicu α–premeny jadra $^{226}\mathrm{Ra}$ atómu rádia a uveďte prvok, ktorého jadro tak vzniká.
b) Určte počet N α-častíc, ktoré sa uvoľnia vo vzorke rádia s hmotnosťou $m = 1{,}0$ g za jednu sekundu.

Pri premene jadra rádia sa uvoľní energia $E = 4{,}871$ MeV. Predpokladajte, že uvoľnená energia je vo forme kinetickej energie produktov premeny.

c) Uvažujte neutrálny atóm rádia, ktorý sa pred premenou nachádzal v pokoji. Určte rýchlosti produktov α-premeny jadra rádia tesne po premene.

Predpokladajte, že premena jadra neutrálneho atómu rádia nastane v hmlovej komore a v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 5{,}00$ T. Uvoľnené α-častice majú všeobecne náhodný smer. Uvažujte α-časticu, ktorá sa po uvoľnení pohybuje v komore po zakrivenej trajektórii ale v jednej rovine a zanecháva stopu kondenzovanej pary.

d) Určte smer tejto emitovanej α-častice vzhľadom na smer vektora magnetickej indukcie a polomery krivosti trajektórií oboch produktov premeny tesne po uvoľnení α-častice.
e) Ako by sa líšili trajektórie produktov premeny, keby v hmlovej komore nastala premena iba samotného jadra rádia (bez elektrónového obalu).

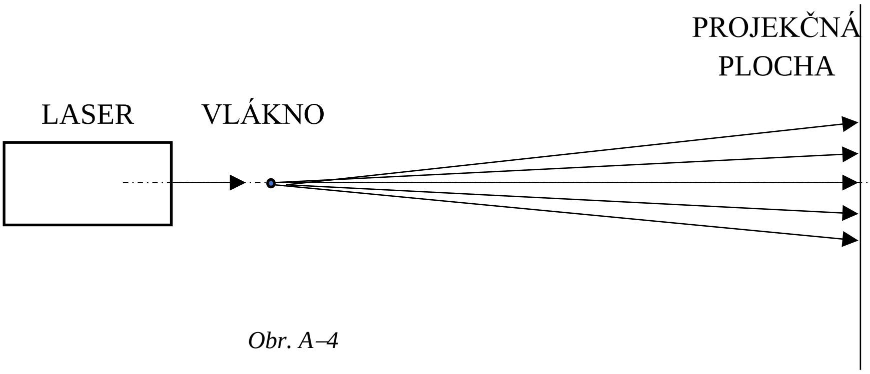
Úlohu riešte všeobecne a potom pre dané hodnoty. Údaje potrebné pre výpočty vyhľadajte v dôveryhodných informačných zdrojoch.
Pozn.: Uvážte, či je potrebné uvažovať relativistické javy.7. Meranie hrúbky vlákna

7. Meranie hrúbky vlákna
Metódy merania dĺžky závisia od hodnoty meranej veličiny a požadovanej presnosti. Na meranie bežných dĺžok používame dĺžkové meradlá, ako sú pásmo, pravítko, posuvné meradlo, mikrometer a pod. Na meranie veľkých vzdialeností sa používajú napr. optické metódy.

Pri meraniach veľmi malých vzdialeností alebo rozmerov sa s výhodou využívajú vlnové metódy založené na interferencii a difrakcii vlnenia. Rozlišovacia schopnosť vlnových zobrazovacích metód, ktorá je určujúca pre presnosť merania, je približne daná polovicou vlnovej dĺžky.

Úlohou je zmerať priemer tenkého vlákna, ktorý je niekoľko desiatok μm. V tomto prípade je vhodné použiť viditeľné svetlo, ktoré poskytuje dostatočnú rozlišovaciu schopnosť. Ako vhodné vlákno je tenký medený drôt (vlákno z dvojlinky), ľudský vlas, chlp zvieraťa a pod. Použite tri až päť rôznych vlákien a výsledky porovnajte.

a) Najprv zmerajte priemer vlákna posuvným meradlom a mikrometrom. Zhodnoťte tento spôsob merania a odhadnite chybu merania.



Obr. A–4

Vlnová metóda merania je založená na difrakcii svetla na vlákne.

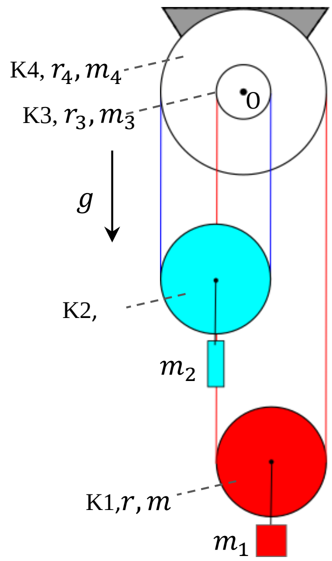
Meranie usporiadajte podľa obr. A–4. Do vhodného držiaka upevnite laser (napr. laserové ukazovadlo s červeným svetlom s vlnovou dĺžkou 650 nm) tak, aby bol laserový lúč vodorovný a smeroval na bielu stenu vo vzdialenosti niekoľko metrov. Do laserového lúča vložte kolmo na lúč merané vlákno, upevnené vo vhodnom držiaku. Na stene (projekčnej ploche) sa objaví difrakčný obrazec, pozostávajúci zo série striedajúcich sa maxím a miním intenzity osvetlenia.

b) Vysvetlite podstatu difrakcie svetla na tenkom vlákne a uveďte vzťah pre uhlovú vzdialenosť susedných maxím v difrakčnom obrazci.
c) Zmerajte čo najpresnejšie potrebné dĺžky a určte priemer vlákna.
d) Meranie opakujte s rôznymi tenkými vláknami, napr. chlp mačky alebo psa, tenká niť a pod.
e) Zhodnoťte presnosť merania touto difrakčnou metódou.

Kategória B

1. Zacyklená kladka

V sústave kladiek K1, K2, K3, K4 je vedená uzavretá slučka, ako ukazuje obr. B–1. Kladky K1, K2 sú rovnaké, majú rovnakú hmotnosť m aj obvod r, a voľne sa otáčajú okolo svojich osí. Visia na nich závažia s hmotnosťami m_1 a m_2. Kladky K3 a K4 sú pevne spojené, a voľne sa otáčajú okolo svojej spoločnej osi O, ktorá je pevne uchytená pod stropom. Obvod väčšej kladky $r_4 = \frac{3}{2}r$, a $r_3 = \frac{1}{2}r$ je obvod menšej kladky. Ich hmotnosti v uvedenom poradí sú $m_4 = \frac{9}{4}m$ a $m_3 = \frac{1}{4}m$. Lanko je na všetkých úsekoch zvislé a neprešmykuje na kladkách. Tiažové zrýchlenie $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.



Obr. B–1

a) Vyjadrite zrýchlenie a_1 kladky K1 ako funkciu jej uhlového zrýchlenia α_1, ktorým sa otáča okolo vlastnej osi, a rovnako vyjadrite závislosť zrýchlenia a_2 kladky K2 od jej uhlového zrýchlenia α_2 okolo jej vlastnej osi.

b) Určte veľkosť síl, ktorými je napínané lano v jednotlivých vetvách.

c) Určte veľkosť sily, ktorou pôsobí sústava kladiek na os O.

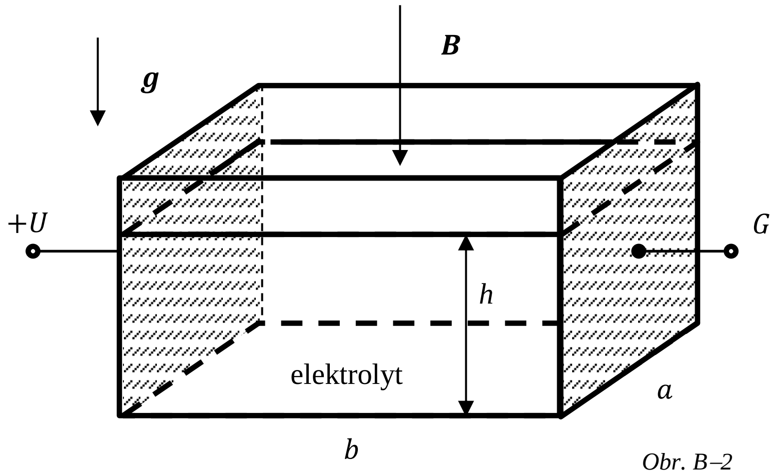
Trenie v osiach všetkých kladiek je zanedbateľne malé. Lanko sa nenaťahuje a jeho hmotnosť je zanedbateľne malá.

Úlohu riešte všeobecne, potom pre nasledujúce hodnoty veličín:

$r = 100$ mm, $r_3 = 50$ mm, $r_4 = 150$ mm, $m = 80$ g, $m_1 = 100$ g, $m_2 = 10$ g.

2. Elektrolyt v magnetickom poli

Vo vaničke v tvare kvádra s rozmermi podstavy $a = 10$ cm, $b = 20$ cm, sa nachádza elektrolyt s hustotou $\rho = 1{,}05\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ a konduktivitou $\gamma = 20\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$, do výšky $h = 80$ mm, obr. B–2. Dve protiľahlé steny vzdialené b sú vo vnútri vaničky pokovené, zvyšné sú z nevodivého skla. Vanička s elektrolytom sa nachádza v magnetickom poli s indukciou $B = 250$ mT, pričom vektor magnetickej indukcie smeruje zvislo nadol.



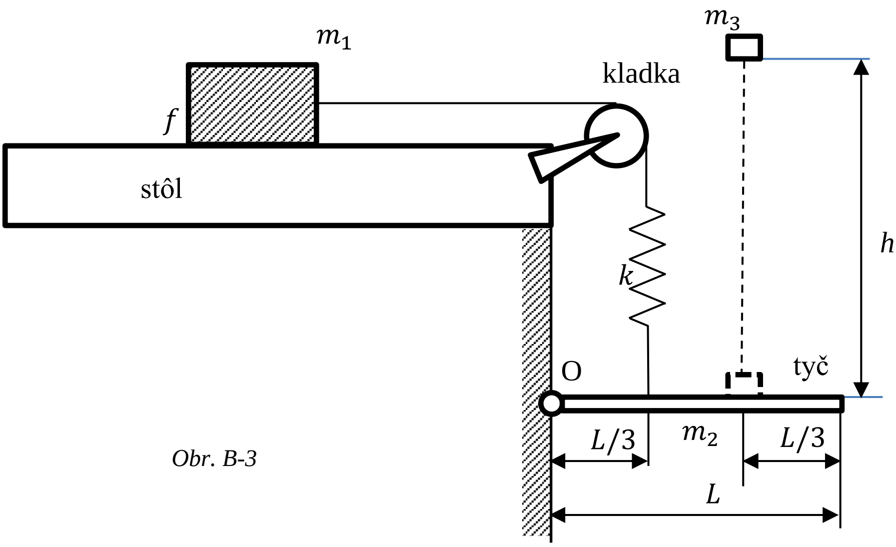
Obr. B–2

a) Ku kovovým elektródam pripojíme zdroj konštantného elektrického napätia $U = 24$ V. Určte intenzitu elektrického poľa E a prúdovú hustotu J v elektrolyte, ak predpokladáte, že elektrolyt aj elektrické pole v elektrolyte sú homogénne.
b) Po pripojení zdroja dôjde k vychýleniu hladiny elektrolytu. Vysvetlite, prečo sa hladina vychýli a ktorým smerom. Situáciu znázornite obrázkom a vyznačte v ňom všetky sily pôsobiace na elektrolyt.
c) Určte uhol α vychýlenia hladiny elektrolytu z vodorovnej polohy.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre dané hodnoty, $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
Pozn.: Prechodové javy na elektródach neuvažujte.

3. Harmonické kmity

Na obr. B–3 je mechanická sústava. Na vodorovnej doske stola leží teleso s hmotnosťou m_1. K telesu je pripevnené vlákno vedené cez kladku a pružinu s tuhosťou k na plochú tyč otočnú okolo vodorovnej osi O. Tyč je homogénna, má hmotnosť m_2 a dĺžku L a na začiatku je vo vodorovnej polohe. Pružina je upevnená v 1/3 dĺžky tyče. Na tyč necháme padať z výšky h nad úrovňou tyče teliesko s hmotnosťou m_3, pričom náraz telieska do tyče je dokonale nepružný. Faktor trenia medzi telesom na stole a povrchom stolu je f.



Obr. B-3

a) Ak zatlačíme nadol na voľný koniec tyče, teleso na stole sa pohne pri uhlu sklonu tyče $\varphi_0 = 5{,}0°$. Určte tuhosť k pružiny.
b) Určte výšku h_1, z ktorej máme nechať padať teliesko, aby sa tyč po jeho dopade vychýlila z vodorovnej polohy o uhol φ_0.
c) Teliesko necháme padať na tyč z výšky $h_2 < h_1$. Po dopade telieska začne tyč s telieskom kmitať. Určte frekvenciu kmitov a amplitúdu uhlovej výchylky tyče.

4. Odraz svetla

Na hladinu vody s obsahom $S = 4{,}0\ \mathrm{dm}^2$ s indexom lomu $n_v = 1{,}33$ kvapneme kvapku oleja s indexom lomu $n = 1{,}47$ v tvare gule s priemerom $D = 2{,}0$ mm. Olej sa na povrchu vody rovnomerne rozloží a vytvorí tak tenkú homogénnu vrstvičku.

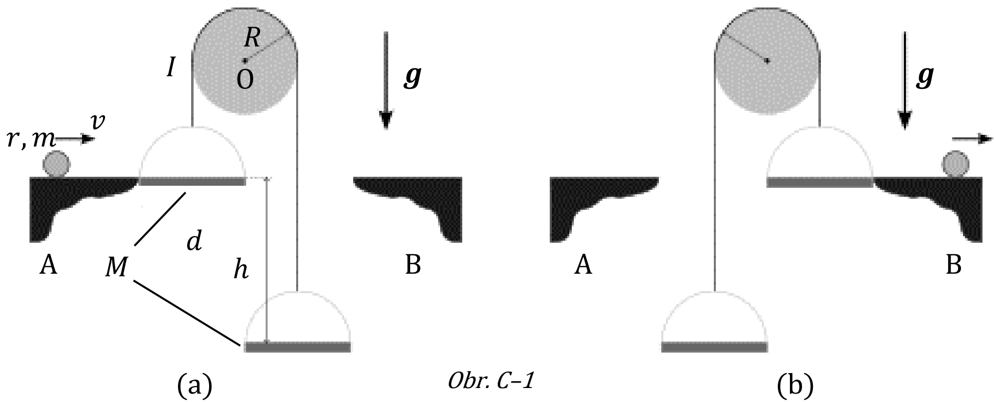
a) Na hladinu dopadá biele svetlo pod uhlom dopadu α. Určte najväčšiu vlnovú dĺžku λ_1 a druhú najväčšiu λ_2 svetla odrazeného od hladiny s maximálnou intenzitou. Na obrázku znázornite odraz svetla od hladiny s vrstvou oleja a vyznačte v ňom chod charakteristických lúčov.
b) Do spoločného grafu nakreslite závislosť vlnových dĺžok λ_1 a λ_2 ako funkcie uhlu dopadu α. V grafe vyznačte pás vlnových dĺžok zodpovedajúcich viditeľnému svetlu. Graf zostrojte pre rozsah uhlov od 0° do 60°.
c) Uveďte, ako sa mení farba odrazeného svetla, ak meníme uhol dopadu bieleho svetla na hladinu.

Kategória C

1. Šťastná cesta

Valček s polomerom r a hmotnosťou m sa valí po vodorovnom hladkom povrchu stola A kolmo na jeho okraj, obr. C–1. Vedľa stola A je druhý stôl B, ktorého povrch je na rovnakej úrovni ako povrch stola A, a jeho okraj je rovnobežný s okrajom stola A. Okraje stolov sú vo vzdialenosti $2d$.

Na pevnej kladke s polomerom R a momentom zotrvačnosti I sú na lanku zavesené dve plošiny s hmotnosťou M, ktoré majú v smere pohybu valca dĺžku d. Plošiny sa môžu pohybovať vo zvislom smere. Na začiatku bola sústava plošín v pokoji, pričom povrch ľavej plošiny bol na úrovni povrchu stola a povrch pravej plošiny bol v hĺbke h pod úrovňou povrchu ľavej plošiny, obr. (a). Keď valček prejde na ľavú plošinu, začne sa sústava pohybovať, pričom kladka sa otáča okolo svojej osi O bez trenia a lanko sa na kladke neprešmykuje.



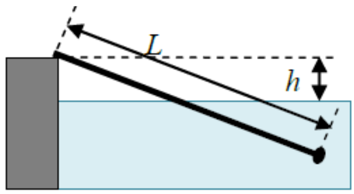
Obr. C–1

a) Určte rýchlosť v pohybu valca tak, aby prešiel plynulo na druhý stôl, ako ukazuje obr. (b).
b) Určte silu F_O, ktorá pôsobí na os kladky počas pohybu valčeka.
c) Akú podmienku musí spĺňať polomer r valčeka, aby bol pohyb valčeka vo vodorovnom smere plynulý s konštantnou rýchlosťou (aby sa valček pri zvislom pohybe nedotkol okraja stolov, a neovplyvnil tak vodorovnú zložku rýchlosti valčeka)? Rozhodnite, či podmienka je splnená pre zadané údaje.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty: $m = 1{,}00$ kg, $M = 1{,}00$ kg, $I = 40\ \text{g} \cdot \text{m}^2$, $r = 10{,}0$ cm, $d = 2R = 40$ cm, $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, $h = 1{,}00$ m. Obrázok je len ilustračný. Hmotnosť lanka a osky je zanedbateľne malá, kladku považujte za homogénny valec. Valček sa valí po celú dobu bez odporu, plošiny sú neustále vodorovné.

2. Doska vo vode

Úzka tenká homogénna doska dĺžky L je jedným koncom opretá o okraj bazéna a druhým spočíva vo vode. Na konci dosky, ktorý sa nachádza vo vode, je upevnené malé závažie, obr. C–2. Vieme, že výška okraja bazéna nad hladinou vody $h = 40$ cm a faktor trenia medzi doskou a okrajom bazéna $\mu = 0{,}75$.



Obr. C–2

a) Prekreslite obrázok C–2 do vášho riešenia a zakreslite do obrázku všetky sily, ktoré pôsobia na dosku. Sily označte a popíšte.
b) Určte maximálnu hodnotu pomeru $x = m/M$ hmotnosti m malého závažia a hmotnosti M homogénnej dosky, pri ktorom sa bude doska nachádzať v rovnovážnej polohe.

Voda v bazéne sa nepohybuje, hustota vody $\rho_0 = 1{,}0\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, hustota dosky $\rho = 0{,}50\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, hustota závažia je výrazne väčšia, ako hustota vody, a vztlakovú silu pôsobiacu na závažie môžeme zanedbať.

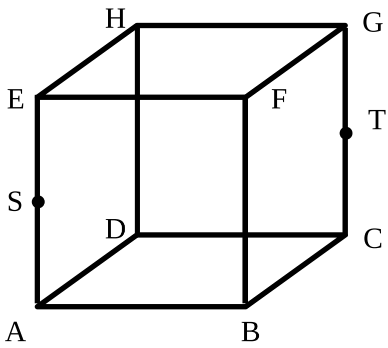
3. Dusík

Vo valci s objemom $V_1 = 150$ l je piestom uzatvorený dusík pod tlakom $p_1 = 200$ kPa a s teplotou $t_1 = 20$ °C (stav 1). Plyn začneme ochladzovať a súčasne stláčať na objem $V_2 = 0{,}6\ V_1$ (stav 2) tak, že tlak sa mení priamoúmerne s objemom. Po stlačení sa nechá plyn pri stálej polohe piestu zohriať na pôvodnú teplotu t_1 (stav 3).

a) Nakreslite p–V diagram deja a určte hmotnosť m a počet molekúl dusíka vo valci.
b) Určte prácu W, ktorú vykonala vonkajšia sila pôsobiaca na piest pri stláčaní, teplotu t_2 po stlačení plynu na objem V_2 a teplo Q_1, ktoré bolo potrebné odobrať plynu pri stláčaní. Teplotu t_2 porovnajte s bodom skvapalnenia dusíka pri normálnom tlaku.
c) Určte výsledný tlak p_3 v stave 3 a teplo Q_2, ktoré plyn prijme od okolia počas vyrovnávania teploty, a pomer $q = Q_2/Q_1$. Porovnajte rozdiel Q_1–Q_2 s prácou W.

Plyn považujte za ideálny a potrebné konštanty vyhľadajte v tabuľkách.

4. Odporová sieť



Obr. C–3

Z odporového drôtu je vytvorená kocka ABCDEFGH. Každá hrana má odpor $R = 10\ \Omega$, obr. C–3.

a) Zdroj konštantného napätia $U = 12\ \mathrm{V}$ pripojíme k protiľahlým vrcholom A,G kocky. Určte prúd v jednotlivých vetvách obvodu a prúd I_{Z1}, ktorý prechádza zdrojom.

b) Zdroj pripojíme k stredom S, T protiľahlých hrán kocky. Určte prúd I_{Z2}, ktorý prechádza zdrojom, a prúdy v jednotlivých vetvách obvodu.

Pri riešení úlohy si obvod vhodne prekreslite a využite symetriu kocky.

Kategória D

1. Stretnutie na polceste

Na demonštráciu pohybu s nulovým trením sa používa dráha so vzduchovým vankúšom. Pomocou malých dýz sa vháňa medzi dráhu a teleso s plochou podstavou vzduch, takže medzi telesom a dráhou je malá vrstvička vzduchu. Tak sa dosahuje nulové trenie medzi telesom a dráhou.

Na vodorovnej dráhe so vzduchovým vankúšom leží tenký homogénny tuhý pásik dĺžky $L = 50$ cm. Hmotnosť pásika označíme M. Z opačných koncov pásika vypustíme po jeho povrchu súčasne oproti sebe dva malé kotúče 1 a 2 s hmotnosťami $m_1 = m$ a $m_2 = 2m$. Na začiatku je pásik v pokoji a kotúčom sú udelené začiatočné rýchlosti $v_{10} = v_0$ a $v_{20} = 2v_0$. Faktory trenia f medzi kotúčmi a doskou sú rovnako veľké. Pomocou elektro optického snímača zmerali čas pohybu $\tau = 0{,}24$ s od začiatku pohybu kotúčov do ich zrážky, pričom oba kotúče sa zrazili presne v polovici pásika a tesne pred zrážkou mali nenulové rýchlosti vzhľadom na povrch pásika. Trenie medzi pásikom a dráhou považujte za nulové.

a) Vyjadrite rýchlosť v_0 a faktor trenia f ako funkcie veličín L, τ a pomeru $p = m/M$. Určte podmienku pre pomer p, aby sa pohyb uskutočnil uvedeným spôsobom.
b) Určte faktor trenia f medzi doskou a kotúčmi a rýchlosť v_0 pre tri rôzne hodnoty pomeru p: $p_1 = 0{,}25$; $p_2 = 0{,}75$ a $p_3 = 1{,}50$.

Pozn.: Kotúče sa pohybujú postupným pohybom bez otáčania a ich rozmery sú voči rozmerom pásika zanedbateľne malé.

2. Cyklista

Cyklista prechádzal po ceste, vedľa ktorej boli stĺpiky s rovnakou vzdialenosťou $d = 20$ m označujúce hranicu cesty. Najprv sa pohyboval rovnomerným pohybom s konštantnou rýchlosťou v_1. Keď prechádzal okolo prvého stĺpika, šliapol do pedálov a začal zrýchľovať svoj pohyb s konštantným zrýchlením a až po štvrtý stĺpik. Zo záznamu kamery, ktorou snímal svoju trasu, zistil, že od prvého stĺpika k druhému prešiel za čas $t_1 = 4{,}0$ s a od druhého k tretiemu za čas $t_2 = 3{,}0$ s.

a) Určte rýchlosť v_1 na začiatku zrýchľovania. Výsledok vyjadrite v jednotkách km/h.
b) Určte zrýchlenie a pohybu cyklistu medzi prvým a štvrtým stĺpikom.
c) Určte dobu t_3, za ktorú prejde cyklista dráhu medzi tretím a štvrtým stĺpikom.
d) Určte rýchlosť v_4, ktorú dosiahne cyklista medzi prvým a štvrtým stĺpikom.

3. Model rakety

Rakety používali už starí Číňania v prvom tisícročí v súvislosti s vynálezom pušného prachu. Chlapci si kúpili zábavnú raketu a rozhodli sa ju vyskúšať na poli za mestom, aby nikoho neohrozili. Po vypustení sa raketa pohybovala vo zvislom smere nahor. Let si natáčali na video a potom záznam analyzovali. Zistili, že palivo rakety došlo vo výške $h_1 = 90$ m, a túto výšku raketa dosiahla za čas $t_1 = 4{,}2$ s. Potom sa ešte chvíľu pohybovala nahor a nakoniec sa vrátila na zem.

a) Určte zrýchlenie a pohybu počas stúpania pôsobením raketového pohonu reaktívnu silu F raketového pohonu.
b) Určte maximálnu výšku h_2, ktorú raketa dosiahne.
c) Určte dobu t_3 letu rakety od štartu až po dopad na zem.

Pre jednoduchosť predpokladajte, že vo všetkých úsekoch sa raketa pohybovala rovnomerne zrýchleným (spomaleným) pohybom, a počas celého pohybu mala konštantnú hmotnosť $m = 300$ g. Odpor vzduchu neuvažujte. Tiažové zrýchlenie $g = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

4. Gule vo vode

Chlapci robili pokus s dvomi guľami vo vode. Obe gule mali rovnaký objem, ale boli z rôznych materiálov. Na dno prázdnej nádoby umiestnili senzor tlakovej sily, ktorej citlivá plocha bola veľmi malá. Po vložení ťažšej gule (1) na senzor na dne nádoby pôsobila guľa na senzor tlakovou silou $F1 = 250$ mN. Potom do nádoby naliali toľko vody, aby guľa (1) nevyčnievala z vody. Guľa (1) pritom zostala na dne nádoby. Tlaková sila pôsobiaca na senzor klesla o jednu tretinu. Potom do nádoby vložili druhú guľu (2), a tá zostala plávať na hladine vody, pričom nad hladinu vody vyčnievala jednou tretinou svojho objemu. Následne obe gule spojili tenkým vláknom, vložili ich do nádoby a do nádoby doliali ďalšiu vodu, až kým obe gule zostali pod hladinu vody v nádobe, pričom dolná guľa sa dotýkala senzora sily a pôsobila naň silou F_2.

a) Určte hustoty ρ_1 a ρ_2 oboch gúľ.
b) Určte silu F_2, ktorú zaznamenal senzor na dne nádoby.
c) Určte silu F_3, ktorá napínala vlákno.

Hustota vody $\rho = 1{,}00\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$.

Autori návrhov úloh: Ľubomír Konrád (A1,6,B2,3,C2,3,D1,2,4), Ivo Čáp (A3,4,7,B4), Kamil Bystrický (A4,C4,D3) Aba Teleki (A2,5,B1,C1)

Recenzia a úprava úloh a riešení: Ivo Čáp
Redakcia: Ivo Čáp
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2022 (51)

INFORMÁCIE

Šoltésove dni

26-ho a 27-ho októbra 2022

Konferencia Šoltésove dni bola organizovaná prvýkrát v roku 1994. Bola to prvá bratislavská konferencia učiteľov fyziky. Organizovali ju Kabinet fyziky Metodického centra mesta Bratislavy spolu s Gymnáziom Jura Hronca v Bratislave. Organizátori chceli založiť tradíciu konferencií, na ktorých by sa riešili aktuálne problémy v oblasti fyziky a vyučovania fyziky. Konferencia dostala názov *Šoltésove dni*, lebo organizátori touto cestou chceli vyjadriť úctu svojmu bývalému dlhoročnému kolegovi – RNDr. Júliusovi Šoltésovi [1].

Obr. 1: *RNDr. Július Šoltés (foto: archív jeho bývalej študentky)*

Július Šoltés sa narodil 2.7.1935 v Tulčíku. Po skončení vysokej školy učil jeden rok v Liptovskom Mikuláši. Od dňa, kedy vzniklo Gymnázium Jura Hronca, až do svojej smrti, pôsobil na tomto gymnáziu. Aktívne pôsobil ako organizátor, a taktiež ako učiteľ, vo výbore Fyzikálnej olympiády, ďalej vo Fyzikálnej terminologickej komisii Slovenskej Akadémie Vied. Bol členom Jednoty slovenských matematikov a fyzikov, kde pre svoju dlhoročnú činnosť bol odmenený v roku 1975 Pedagogickým vyznamenaním Jednoty slovenských matematikov a fyzikov. Taktiež dostal v roku 1979 Čestné uznanie Jednoty slovenských matematikov a fyzikov. Okrem týchto ocenení, za svoju záslužnú činnosť fakultného učiteľa obdržal Diplom dekana Matematicko-fyzikálnej fakulty, a taktiež poďakovanie vtedajšieho ministra školstva a primátora Bratislavy. V roku 1989 mu bol udelený titul Zaslúžilý učiteľ. RNDr. Július Šoltés zomrel 2.7.1990 v Bratislave [2].

Od roku 1994 do roku 2006 organizovalo odbornú konferenciu pre učiteľov fyziky s názvom *Šoltésove dni* každoročne Metodicko-pedagogické centrum v Bratislave. V súčasnosti ju organizuje Oddelenie didaktiky fyziky Katedry didaktiky matematiky, fyziky a informatiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Obr. 2: *V strede RNDr. Július Šoltés (foto: archív jeho bývalej študentky).*

Konferencia je určená pre učiteľov základných a stredných škôl nielen z blízkeho okolia Bratislavy, ale z celého Slovenska. Konferencie sa často zúčastnia aj hostia z Českej Republiky. Každoročne sa konferencie zúčastňuje okolo 80 učiteľov.

Obr. 3: *Spoločná fotka z konferencie Šoltésove dni 2018 (foto: vlastný archív autorky).*

Konferencia je bežne organizovaná prezenčne a trvá dva dni. Posledné dva roky; bola kvôli epidemiologickej situácii spojenej s koronavírusom Covid-19 konferencia uskutočnená online v rozsahu jeden deň.

Konferencia sa už tradične uskutočňuje formou dielní, ktoré sú doplnené odbornými prednáškami. Dielne väčšinou zabezpečujú členovia Oddelenia didaktiky fyziky Katedry didaktiky matematiky, fyziky a informatiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, avšak ako stáleho hosťa môžeme spomenúť PaedDr. Jozefa Beňušku, PhD. z Gymnázia Viliama Paulinyho-Tótha v Martine. Čo sa týka odborných prednášok, časť taktiež zabezpečujú členovia rôznych katedier Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Medzi stálymi účastníkmi, hosťami môžeme spomenúť tiež doc. RNDr. Františeka Kundracika, PhD. Okrem neho, za posledné roky, učiteľom prednášali napríklad doc. RNDr. Vladimír Černý, PhD., RNDr. Marián Melo, PhD., alebo Mgr. Juraj Tekel, PhD.. Okrem dielní a prednášok v rámci programu konferencie dostávajú priestor aj učitelia. Najčastejšie túto možnosť za posledné roky využili učiteľky Mgr. Adriana Macková a Ing. Jana Šošovičková, PhD.

Tento školský rok sa *Šoltésove dni 2022* uskutočnia tesne pred jesennými prázdninami na Slovensku, teda 26-ho a 27-ho októbra 2022. Účastníci sa môžu tešiť napríklad na prednášku pána prof. RNDr. Fedora Šimkoviča, CSc. o výskume neutrín, prednášku RNDr. Romana Nagya, PhD. o Webovom teleskope, alebo prednášku Mgr. Jaroslavy Slavkovej o fyzike oblakov a zrážok.

Čo sa týka dielní, učitelia si budú môcť vyrobiť rôzne pomôcky, napríklad tester vodivosti, alebo indikátor malého prúdu. Budú mať príležitosť vyrobiť si píšťalku, zahrať si didaktickú hru, alebo vcítiť sa napríklad do kože učencov, spisovateľov, sochárov alebo matematikov v rámci prechádzky Slnečnou sústavou. Keďže na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky prebiehajú rekonštrukčné práce, konferencia sa uskutoční čiastočne aj vo Vedeckom parku Univerzity Komenského a v zážitkovom centre vedy Aurelium v Bratislave. Táto skutočnosť prinesie účastníkom ďalšie výhody – účastníci sa budú môcť zúčastniť workshopu vo Fablabe, a taktiež budú môcť prejsť exponáty v Aureliu.

Všetky aktuálne informácie o konferencii *Šoltésove dni 2022* môže čitateľ nájsť na webovej stránke podujatia `https://sites.google.com/view/soltesovedni/`. Na tejto webovej stránke sa nachádza taktiež archív materiálov, prednášok a fotiek od roku 2018.

Tünde Kiss[4]

L i t e r a t ú r a

[1] Černá, V., Balážová, J., Fekárová, T. *Šoltésove dni ´94. Zborník z 1. bratislavskej konferencie učiteľov fyziky*. Metodické centrum mesta Bratislavy, I. vyd., Bratislava 1995. ISBN 80-7164-109-X

[2] prispievatelia Wikipédie, *Šoltés,* Wikipédia, Slobodná encyklopédia, `//sk.wikipedia.org/w/index.php?title=%C5%A0olt%C3%A9s&oldid=7151463` (prístup október 3, 2022).

[4] PaedDr. Tünde Kiss, PhD., Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava, e-mail: `tunde.kiss@fmph.uniba.sk`.

Správa o 52. konferencii slovenských matematikov

Mala sa konať v obvyklom termíne, teda v novembri 2020, na obvyklom mieste v Jasnej. Kvôli pandemickým opatreniam sa však niekoľkokrát „Matematická Jasná“ presúvala na iný termín. Podarilo sa ju zorganizovať až na prelome apríla a mája 2022 (presnejšie 28. apríla 2022 až 1. mája 2022), teda v neobvyklom termíne, ale aj na neobvyklom mieste – v Dolnom Kubíne. Z týchto a z pandemických dôvodov bola na konferencii slabšia účasť, ale neutrpela tým úroveň konferencie. Počet prihlásených prednášok oproti predchádzajúcim konferenciám bol porovnateľný, a tentokrát takmer každý účastník bol aktívnym účastníkom, teda buď predniesol prednášku alebo bol spoluautorom prednášajúceho. Stručná charakteristika programu v jednotlivých dňoch konferencie potvrdzuje toto konštatovanie, ale aj viacerí účastníci sa pochvalne vyjadrovali o priebehu a úrovni konferencie.

Prvý deň 52. KSM venovaný prevažne aplikáciám matematiky a informatiky

Program začal pozvanou prednáškou *Príbeh konvexnej optimalizácie* Márie Trnovskej z Univerzity Komenského v Bratislave a ďalšou pozvanou fyzikálnou prednáškou Mária Zimana z Fyzikálneho ústavu SAV s názvom *Doba kvantová.*

V tento deň odznelo potom 8 krátkych prihlásených prednášok, ktoré predniesli:

- Samuel Rosa (Výpočet pokrývajúceho elipsoidu s najmenším objemom)
- Mária Michalková (Screw theory v robotike)
- Tomáš Plachetka (Algoritmizácia konštruktívnej logiky)
- Katarína Lacková a spoluautor Peter Frolkovič (Efektívne metódy riešenia eikonalovej rovnice s regularizačným krivostným členom)
- Dagmar Žáková a spoluautor Peter Frolkovič (Numerické riešenie lineárnej rovnice advekcie)
- Michal Žeravý a spoluautor Peter Frolkovič (Numerické riešenie nelineárnych zákonov zachovania pomocou semi-implicitnej schémy vyššieho rádu presnosti)
- Aneta A., Ožvat a spoluautori Karol Mikula, Michal Kollár, Martin Ambroz, Jozef Šibík a Mária Šibíková (Prirodzená numerická sieť ako nástroj na klasifikáciu chránených biotopov Natura 2000 pomocou družicových snímok Zeme)

- Michal Kollár a spoluautori Róbert Čunderlík a Karol Mikula (GeoFilter – aplikácia na filtráciu geodetických dát).

Z názvov prednášok je zrejmé, že išlo väčšinou o prednášky prezentujúce aplikácie matematiky a informatiky v inžinierskych a prírodných vedách. Mali tiež odznieť prednášky troch mladých matematikov ocenených *Cenou akademika Schwarza*, ale konferencie sa zúčastnil len jeden – Martin Bachratý, ktorý predniesol prednášku z teórie grafov s názvom *Vrcholovo-tranzitívne čísla grafov*. Za obdobie 2020-2021 ocenenými boli:

1. miesto: Martin Bachratý, SvF STU, teória grafov
2. a 3. miesto: Michal Hospodár, MÚ SAV, teoretická informatika
2. a 3. miesto: Andrej Gajdoš, ÚMV UPJŠ, matematická štatistika.

Obr. 1: *Predseda JSMF M. Kalina a laureát Ceny akademika Štefana Schwarza M. Bachratý.*
(foto: M. Hriňák)

Večer sa konala schôdza Výboru Slovenskej matematickej spoločnosti.

Druhý deň 52. KSM venovaný vyučovaniu matematiky

Program bol opäť venovaný vyučovaniu matematiky na školách všetkých typov. Pozvané prednášky predniesli: Veronika Hubeňáková (UPJŠ) – prezentovala prednášku *Je digitálna inovácia vyučovania matematiky krokom vpred?* a náš hosť z ČR

Antonín Slavík (Univerzita Karlova), ktorý predniesol didakticky výborne vystavanú prednášku s názvom *Úlohy o kloboucích.*

V tento deň odznelo 9 krátkych prihlásených prednášok, ktoré predniesli:

- Lucia Csachová a spoluautori Mária Jurečková a Štefan Tkačik (*Kritické miesta školskej matematiky*)
- Veronika Bočková a Katarína Laššová (*Geometrické myslenie a priestorová predstavivosť študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie*)
- Mária Slavíčková (*Kto, alebo čo je WILMA?*)
- Tomasz Czyżycki – hosť z Poľska (*Mathematics can be discovered*)
- Martin Hriňák (*Projekt Zlepšime výsledky žiakov v matematike a fyzike*)
- Monika Krišáková a Matej Slabý (*Fun Think na Slovensku*)
- Ingrid Semanišinová a Veronika Hubeňáková (*Klub učiteľov matematiky*)
- Ján Brajerčík a spoluautori Mária Majherová a Peter Mlynárčík (*Elektronické učebné texty z matematiky pre prírodovedné odbory*)
- Irada Dzhalladova a Miroslava Růžičková (*Didactic material for the course „Economics of information security at the European University“*).

Obr. 2: *Prednáša Antonín Slavík - šéfredaktor časopisu Pokroky matematiky, fyziky & astronomie. (foto: M. Hriňák)*

Za týmito prednáškami nasledovala *Diskusia k aktuálnym otázkam výučby matematiky na ZŠ a SŠ* zameraná na prípravu nového štátneho vzdelávacieho programu pre ZŠ. Viedol ju Dušan Šveda, podpredseda pedagogickej sekcie SMS a zúčastnili sa online aj ďalší členovia pracovnej skupiny pre matematiku na čele s Katarínou Žilkovou.

Na konci dňa sa konal obľúbený spoločenský večer.

Tretí deň 52. KSM s čisto matematickými prednáškami

Nedeľný program začal pozvanou prednáškou Romana Nedelu s názvom *Groups of geometric transformation.* Po nej odznelo ešte 5 prihlásených krátkych prednášok, ktoré predniesli:

- Emília Halušková (O diskrétnych vlastnostiach niektorých reálnych funkcií)
- Katarína Hriňáková (Grafy s maximálnym Wienerovým indexom v rôznych triedach grafov)
- Stanislav Basarik a spoluautorka Lenka Halčinová (Zovšeobecnený Choquetov integrál a jeho aplikácie)
- Daniel Ševčovič (Kde by sme nemali robiť chyby pri sčitovaní nekonečných radov?)
- Mariana Marčoková (Ahmesove rady).

O konferencii na záver

Na záver treba konštatovať, že nám veľmi chýbali viaceré osobnosti slovenskej matematiky, ktoré sa týchto konferencií celé roky zúčastňovali a dnes už nie sú medzi nami: prof. Riečan, prof. Brunovský a prof. Bukovský.

***Obr. 3**: Pohľad na účastníkov konferencie (foto: M. Hriňák)*

Na druhej strane potešila účasť niekdajšieho organizátora a editora zborníkov týchto konferencií Jána Halušku, ktorý sa konferencie zúčastnil opäť asi po dvadsiatich rokoch. Potešil jeho záujem o každú prednášku, všetky oživoval diskusnými príspevkami.

Výber hlavných prednášajúcich uskutočnil programový výbor z návrhov členov Výboru SMS v zložení:
Martin Kalina, Mariana Marčoková, Daniel Ševčovič, Božena Dorociaková, Soňa Čeretková, Iveta Scholtzová, Dušan Šveda, Katarína Žilková.

Konferenciu zorganizovali:
Božena Dorociaková (ubytovanie, stravovanie, finančné úhrady), Mária Kúdelčíková (editor zborníka), Mariana Marčoková (program, editor zborníka), Zuzana Sedliačková (www stránka: www.konferenciajasna.sk, faktúry, administratíva), Martin Záborský (IT výpomoc).

Organizačný aj programový výbor dúfajú, že názov „Matematická Jasná“ nezanikne a nasledujúca 53. KSM sa bude konať opäť v Jasnej, i keď to nebude na jeseň 2022.

Tešíme sa na stretnutie v roku 2023!

Poďakovanie: Veľká vďaka za finančnú podporu konferencie patrí
Matematickému ústav SAV a
Jednote slovenských matematikov a fyzikov.

Za organizačný aj programový výbor konferencie

Mariana Marčoková[5]

[5] Katedra stavebnej mechaniky a aplikovanej matematiky, Stavebná fakulta, Žilinská univerzita, Univerzitná 1, 010 26 Žilina, **e-mail:** mariana.marcokova@gmail.com

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2020 (49)

6. EURÓPSKA FYZIKÁLNA OLYMPIÁDA (EuPhO)

20. – 24. 5. 2022, Ljubljana, Slovinsko, www.eupho2022.si

V dňoch 20. 5. až 24. 5. 2022, po dvoch ročníkoch v online priestore, sa uskutočnila šiesta Európska fyzikálna olympiáda v Ljubljane v Slovinsku.

Na 6. ročníku EuPhO súťažilo 182 žiakov z 31 krajín Európy a 6 krajín mimo Európy. Slovinsko ako usporiadateľ malo dve súťažné družstvá. Väčšina krajín bola zastúpená družstvom pozostávajúcim z 5 súťažiacich žiakov. Slovensko reprezentovali žiaci, ktorí sa na celoštátnom kole Fyzikálnej olympiády umiestnili na prvých piatich miestach.

Slovensko reprezentovali:
Pavol Pivko, Gymnázium, Grösslingová 18, Bratislava
Adam Džavoronok, Gymnázium, Poštová 9, Košice
Csaba Dékány, Gymnázium P. Pázmánya s VJM, Nové Zámky
Elena Chochoľaková, Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné
Matej Zigo, ŠPMNDaG, Bratislava

Vedúci: RNDr. Ľubomír Mucha, CVČ - RCM, Košice,
RNDr. Tomáš Lučivjanský, PhD., ÚFV PF UPJŠ Košice

Májový termín súťaže neumožňuje špeciálnu prípravu na EuPhO. Všetci piati študenti sa však v prvý májový týždeň zúčastnili výberového sústredenia na Medzinárodnú fyzikálnu olympiádu, ktoré prebiehalo v Košiciach, čo môžeme považovať za prípravu aj na EuPhO.

Samotná súťaž prebieha v rýchlom slede. Súťažné dní idú po sebe bez prestávky. Po nich hneď nasleduje zosúladenie bodov, ktoré udelila porota súťažiacim s bodmi, ktoré si udelili sami súťažiaci, v spolupráci s vedúcimi družstiev. To sa realizuje formou moderácie, pričom súťažiaci si sami moderujú svoje riešenia. Vedúci družstva je len v úlohe poradcu.

Pre vlastnú súťaž medzinárodná akademická porota už tradične pripravila zaujímavé a veľmi náročné úlohy, tri teoretické úlohy a jednu experimentálnu úlohu. Úlohy dve hodiny pred začiatkom súťaže preložili RNDr. Tomáš Lučivjanský, PhD. (PF UPJŠ Košice) a RNDr. Ľubomír Mucha (CVČ - RCM Košice). V prvý súťažný deň riešili experimentálnu úlohu s názvom Fyzika osvetlenia. V tejto úlohe analyzovali tepelné a svetelné vlastnosti svetelných zdrojov – klasickej žiarovky a LED osvetlenia. Úloha pozostávala z troch nezávislých častí – farba a teplota svetla, účinnosť osvetlenia a radiačný ohrev. V druhý súťažný deň riešili tri teoretické úlohy. V prvej úlohe mali určiť periódu kmitov tuhého valčeka ponoreného do kvapaliny v kadičke, pričom vedeli, že aj kvapalina v kadičke kmitá. V druhej teoretickej úlohe s názvom *Teplotné oscilácie* mali popísať ako závisí teplota rezistora na čase, ktorý bol pripojený k napäťovému zdroju pomocou cievky. Rezistor bol vyrobený z materiálu, ktorý vykazoval fázový prechod takým spôsobom, že jeho odpor nadobúdal dve rôzne hodnoty v závislosti od jeho teploty. V tretej úlohe riešili pohyb elektrického dipólu umiestneného v homogénnom magnetickom poli, pre rôzne začiatočné podmienky.

Za každú teoretickú úlohu mohli získať maximálne 10 bodov a za experimentálnu úlohu 20 bodov, teda celkovo 50 bodov.

Riešenia študentov opravila odborná medzinárodná porota, ktorá pripravila na každú úlohu veľmi podrobné riešenie aj s podrobným rozdelením bodov za jednotlivé časti úlohy. V nasledujúci deň, ako sme už spomenuli vyššie, prebiehali moderácie, a po ich skončení zostavili organizátori poradie súťažiacich. Medzinárodná akademická porota určila hranice pre jednotlivé druhy ocenenia. V zmysle štatútu EuPhO hranica pre zisk zlatej medaily bola stanovená na 32,5 bodu, striebornej na 25,5 bodu a bronzovej na 17,5 bodu Hranica úspešnosti bola stanovená na 14,4 bodu. Celkovo bolo udelených 12 zlatých medailí, 30 strieborných medailí, 44 bronzových medailí a 33 čestných uznaní. Predávanie medaily sa uskutočnilo v 24.5.2022, pričom sa ho zúčastnila ministerka školstva Slovinska. Výsledky jednotlivých úspešných súťažiacich sa nachádzajú na stránke `https://eupho.ee/eupho-2022/`. Informácie o ostatný riešiteľoch sa nezverejňujú.

Výsledky súťaže jednotlivcov (prvá trojka a slovenskí súťažiaci).

Celkove				Medaila
1.	Vlad -Stefan Oros	Rumunsko	42,3 bodu	zlatá
2.	Theo Lequy	Nemecko	42,0 bodu	zlatá
3.	Tim Bastian Enders	Nemecko	37,7 bodu	zlatá
4.	Pavol Pivko	Slovensko	35,7 bodu	zlatá
	⋮			
50.	Csaba Dékány	Slovensko	24,0 bodu	bronzová
	⋮			
69.	Adam Džavoronok	Slovensko	20,8 bodu	bronzová
	⋮			
	Matej Zigo	Slovensko	14,0 bodu	
	Elena Chochoľaková	Slovensko	9,8 bodu	

Neoficiálne poradie európskych krajín

1.	Nemecko	161,7 b
2.	Rumunsko	155,4 b
3.	Poľsko	152,6 b
4.	Taliansko	144,0 b
5.	Gruzínsko	143,1 b
6.	Slovinsko 1	128,9 b
7.	Česko	126,9 b
8.	Maďarsko	112,5 b
⋮		
14.	Slovensko	80,5 b

Poradie krajín sa nevyhlasuje, a bolo zostavené na základe získaných bodov len úspešných súťažiacich.

Je potrebné oceniť zlatú medailu Pavla Pivka a jeho štvrté miesto. Csaba Dékány a Adam Džavoronok získali bronzové medaily. Samotná súťaž ukázala, že riešenie úloh na EuPhO si vyžaduje veľkú kreativitu. Zadania sú krátke a žiaci nie sú nijakým spôsobom vedení k riešeniu danej úlohy. Pri riešení experimentálnej úlohy si musia sami navrhnúť postup merania a aj spôsob spracovania. Na druhej strane je potrebne zdôrazniť, že úlohy boli veľmi náročné. Ako vieme slovenské školstvo nevie žiakov pripraviť na takúto súťaž. Tu musí nastúpiť špecializovaná príprava na súťaž. Vzhľadom na neštandardnosť úloh navrhujem vytvoriť priestor pre samostatné sústredenie pre reprezentačné družstvo na EuPhO, kde v rámci prípravy žiakov na súťaž bude do programu sústredenia zahrnutá aj moderácia v anglickom jazyku. Vzhľadom na úroveň konkurencie by bolo vhodné oživiť jesenné sústredenie v Terchovej prostredníctvom priamej finančnej podpory MŠVVaŠ SR ako tomu bolo v predchádzajúcich rokoch (do roku 2013)

Účasť družstva SR na 6. EuPhO organizačne a finančne zabezpečila Iuventa.

6. ročník EuPhO sa uskutoční **v Hamburku v Nemecku** v júni 2023.

Slovenské družstvo na 6. ročníku EuPhO zľava: Adam Džavoronok, Ľubomír Mucha. Elene Chogoľaková, Csaba Dékány, Matej Zigo, Pavol Pivko, Tomáš Lučivjanský.

Ľubomír Mucha

Adresa autora: Ľubomír Mucha, CVČ - RCM, Strojárenská 3, 04001 Košice,
e-mail: lubomir.mucha@gmail.com

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2022 (51)

63. Medzinárodná matematická olympiáda

6.–16. 7. 2022,

Oslo, Nórsko

V dňoch 6.–16. 7. 2022 sa v nórskom Osle konal jubilejný 63. ročník Medzinárodnej matematickej olympiády (IMO). Celkovo sa ho zúčastnilo 589 súťažiacich zo 104 krajín. Každá krajina mohla vyslať najviac 6 súťažiacich.

Slovensko reprezentovali:

Viktor Balan, Gymnázium, Grösslingová, Bratislava, 4. ročník
Viktor Imrišek, Gymnázium, Grösslingová, Bratislava, 3. ročník
Samuel Koribanič, Gymnázium Ludvíka Svobodu, Humenné, 4. ročník
Eliška Macáková, Gymnázium CENADA, Bratislava, 2. ročník
Jakub Šošovička, Gymnázium CENADA, Bratislava, 3. ročník
Matej Vasky, Gymnázium Alejová, Košice, 3. ročník

Vedúcim družstva SR bol Stanislav Krajči (učiteľ na PF UPJŠ Košice, predseda Slovenskej komisie MO), zástupcu vedúceho a pedagogický dozor vykonával Patrik Bak (člen SK MO).

Družstvo SR na IMO 2022

Žiaci riešili počas dvoch dní (11. a 12. júla) dve trojice úloh, za každú úlohu bolo možné dostať najviac 7 bodov. Plný počet 42 bodov získali 10 súťažiaci, a to po jednom účastníkovi z Japonska, Vietnamu, Ukrajiny a Ruska aj všetci šiesti (!) Číňania. Rusko ako štát bolo z pochopiteľných dôvodov z účasti na IMO vylúčené a jej občania mohli súťažiť len sami za seba.

Hranice na získanie bronzovej, striebornej a zlatej medaily boli tento rok postupne 23, 29 a 34 bodov. Podľa pravidiel IMO medaily získava približne polovica účastníkov a tí si delia zlaté, strieborné a bronzové v pomere 1 : 2 : 3. Čestné uznanie získavajú tí riešitelia, ktorí vyriešili aspoň jednu úlohu na plný počet bodov.

Výsledky členov družstva SR sú uvedené v tabuľke:

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	Cena
Viktor Balan	7	7	0	1	1	7	23	Bronz
Viktor Imrišek	7	7	0	7	2	0	23	Bronz
Samuel Koribanič	5	7	0	0	1	0	13	čestné uznanie
Eliška Macáková	7	7	2	7	5	1	29	Striebro
Jakub Šošovička	7	7	1	7	2	0	24	Bronz
Matej Vasky	7	7	1	7	7	1	24	Bronz

Ako vidieť, dvaja z našich účastníkov dosiahli za svoje riešenia nenulový *súčin*, čo nie je na naše pomery jednoduché.

V neoficiálnom poradí krajín, ktoré vznikne sčítaním bodov celého družstva, sme sa umiestnili na 46. mieste, čo je oproti minulému roku opäť mierny pokles.

V tradičnom derby sme síce opäť porazili Česko (52.), avšak naši ďalší partneri z V4 Poľsko a Maďarsko sú pred nami (12., resp. 32.). Prvú päťku tvorili postupne Čína, Južná Kórea, USA, Vietnam a Rumunsko. Kompletné výsledky a štatistiky možno nájsť na internetovej stránke http://imo-official.org .

Slovensko sa už pravidelne zapája aj do tvorby úloh na IMO. Tento rok sa do užšieho výberu (tzv. shortlistu) 33 úloh dostali až 3 slovenské úlohy a jedna z nich, ktorej autorom je Patrik Bak, sa dokonca prebojovala do víťaznej šestice ako úloha 4.

Takáto šestica sa zo shortlistu vyberá niekoľkohodinovým náročným procesom v akomsi „parlamente“, ktorého členmi sú vedúci všetkých delegácií. Úlohy sú volené vždy tak, aby v nich boli čo najrovnomernejšie zastúpené všetky štyri olympijské oblasti, a to algebra, geometria, kombinatorika a teória čísel. (Tohtoročný výber možno vidieť na konci článku.) V jednotlivých dňoch sú úlohy obvykle radené podľa predpokladanej náročnosti.

Budúci ročník IMO sa bude konať v japonskej Čibe v termíne 2. – 13. júla 2023. Nasledovať by mali Spojené kráľovstvo (2024) a Austrália (2025).

Stanislav Krajči[6]

[6] Ústav informatiky, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice,
e-mail: stanislav.krajci@upjs.sk.

pondelok, 11. júla 2022

Úloha 1. Osloská banka vydáva mince dvoch druhov – alumíniové (označené A) a bronzové (označené B). Ingrid má n alumíniových a n bronzových mincí a zoradí ich v ľubovoľnom poradí zľava doprava. Pod *blokom* rozumieme podpostupnosť susedných mincí rovnakého druh. Nech k je pevné kladné celé číslo také, že $k \leq 2n$, Ingrid potom opakovane vykonáva nasledujúcu operáciu: Nájde najdlhší blok obsahujúci k. mincu zľava a presunie všetky mince tohto bloku na začiatok radu. Napríklad ak $n = 4$ a $k = 4$, tak proces začínajúci sa rozmiestnením AABBBABA bude

$$\texttt{AAB\underline{B}BABA} \to \texttt{BBB\underline{A}AABA} \to \texttt{AAA\underline{B}BBBA} \to \texttt{BBB\underline{B}AAAA} \to \texttt{BBB\underline{B}AAAA} \to \ldots$$

Nájdite všetky dvojice (n, k) kladných celých čísel také, že $k \leq 2n$ a pre toto k a ľubovoľné začiatočné rozmiestnenie bude v niektorom okamihu príslušného procesu prvých n mincí zľava z rovnakého kovu.

Úloha 2. Nájdite všetky funkcie f, kde $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, také, že pre každé x z množiny $\mathbb{R}^+$ existuje práve jedno y z množiny $\mathbb{R}^+$ také, že

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

($\mathbb{R}^+$ je množina všetkých kladných reálnych čísel.)

Úloha 3. Nech k je kladné celé číslo a S je konečná množina nepárnych prvočísel. Dokážte, že existuje najviac jeden spôsob (až na otočenie a osovú súmernosť), ako rovnomerne rozmiestniť prvky S na danú kružnicu tak, že súčin každých dvoch susedných čísel má tvar $x^2 + x + k$ pre nejaké kladné celé číslo x.

utorok, 12. júla 2022

Úloha 4. Nech $ABCDE$ je konvexný päťuholník taký, že $|BC| = |DE|$. Podobne nech vnútri $ABCDE$ existuje bod T taký, že $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ a $|\sphericalangle ABT| = |\sphericalangle TEA|$. Nech priamka AB pretína priamky CD a CT postupne v bodoch P a Q tak, že body P, B, A, Q ležia na jednej priamke v tomto poradí. Nech priamka AE pretína priamky CD a DT postupne v bodoch R a S tak, že body R, E, A, S ležia na jednej priamke v tomto poradí. Dokážte, že body P, S, Q, R ležia na jednej kružnici.

Úloha 5. Nájdite všetky trojice (a, b, p) kladných celých čísel takých, že p je prvočíslo a

$$a^p = b! + p.$$

Úloha 6. Nech n je kladné celé číslo. *Nordickým štvorcom* rozmeru n budeme nazývať tabuľku $n \times n$ obsahujúcu všetky celé čísla od 1 do n^2 tak, že každé políčko obsahuje práve jedno číslo. Dve políčka považujeme za susedné práve vtedy, keď majú spoločnú stranu. Políčko susediace len s políčkami s väčším číslom nazveme *dolina*. Pod *stupákom* rozumieme postupnosť jedného alebo viacerých políčok tabuľky takú, že platí:

(i) Prvé políčko tejto postupnosti je dolina.

(ii) Každé ďalšie políčko tejto postupnosti susedí s predchádzajúcim políčkom.

(iii) Čísla napísané v políčkach postupnosti sú v rastúcom poradí.

Nájdite najmenší možný počet stupákov v nordickom štvorci rozmeru n.

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2022 (51)

Smart študenti na Pedagogickej fakulte KU v Ružomberku

Pokovidová doba je tak trochu zvláštna... Už môžeme! Nielen že môžeme, ale aj chceme. Že čo? No predsa opäť zapájať našich smart študentov, aby sa stretali na vyučovaní a po vyučovaní a aby hľadali riešenia na veci okolo seba s cieľom pridať im úžitkovú hodnotu. Študenti dali hlavy dokopy a celý semester tvrdo pracovali na svojich smart projektoch. Mravenčia práca v tímoch vyvrcholila súťažou „Internet vecí v praxi“, ktorá sa konala 1. júna 2022 na Katedre informatiky PF KU v Ružomberku. Zúčastnilo sa jej dvanásť súťažiacich v piatich tímoch.

Obr. 1: *Tím Trivia s projektom "Kto nám zvoní?"*

Celá akcia sa niesla v kreatívnom duchu a jednotlivé tímy sa snažili presvedčiť súťažnú komisiu, že práve ich projekt je ten najlepší. Keďže išlo o praktickú súťaž, tak každý tím predviedol aj funkčný model založený na doske ESP32 alebo minipočítači Rasp-berry Pi. Projekt obsahoval aj príslušné senzory, softvér, online služby, webovú, či mobilnú aplikáciu.

Na koniec súťaže nastal veľký problém. Komisia bola postavená pred úlohu, určiť poradie súťažiacich tímov.

Na piedestály entuziazmu a kreativity by si zaslúžili stáť určite všetci súťažiaci. Avšak na koniec sa komisia uzniesla na tomto poradí:

1. miesto: Tím "*Guinea pigs*", projekt "*Merač kvality vody v akváriu*", autorského tímu v zložení Adam Vávro a Martin Ovšák.
2. miesto: Tím "*Trivia*", projekt "*Kto nám zvoní?*", ktorý tvorili študentky Kristína Šepeľová, Denisa Šintajová a Veronika Šimurdiaková.
3. miesto: Tím "*Strawberries*", projekt "*Detekcia objektov pomocou Raspberry Pi*", Alžbeta Urbanová, Kristína Valentínyová.

Obr. 2: *Súťažné tímy s odbornou komisiou.*

Víťazné tímy boli na záver odmenené za ich snahu a predvedené výsledky hodnotnými vecnými cenami z oblasti Internetu vecí. Veríme, že ich použijú na ďalšie zaujímavé a užitočné projekty.

Michal Rojček[7]

Súťaž bola organizovaná a vecne podporená projektom KEGA č. 008KU-4/2020 s názvom: „Komplexná inovácia a edukačná podpora predmetov študijného programu Učiteľstvo informatiky so začlenením problematiky Internetu vecí“.

[7] Katedra informatiky, PF KU v Ružomberku, Hrabovská cesta 1, 034 01 Ružomberok,
e-mail: michal.rojcek@ku.sk.

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
3/2022 ročník 51

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková, Ivo Kluvanec
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 550 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: september 2022

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal “Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences”
OMFI 3/2022 Volume 51
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

CONTENTS