Obzory matematiky, fyziky a informatiky 1/2012 (41)

Štýl **0MFI - Nadpis článku**

Keplerova úloha – algebraické riešenie

Štýl **0MFI – Meno autora**

Michal Demetrian

**Abstract:** We present the algebraic solution to the Kepler problem - i.e. we show how to find all the possible trajectories of a testing body in the Newtonian gravitational field of a massive central body - without any need of integrating an equation of motion (differential equation). The presented idea is rather well-known on the scientific level, however, almost absolutely unknown in pedagogical level in spite of the fact it offers a nice possibility to explain the Keplerian elipses to the secondary school students.

Štýl **0MFI – Key words**

Štýl **0MFI - Abstract - anglický**

**Key words:** problem solving, Kepler problem

**Súhrn:** Obsahom článku je algebraické riešenie tzv. Keplerovej úlohy – teda úlohy nájsť tvar trajektórie testovacieho telesa, ktoré sa pohybuje v Newtonovom gravitačnom poli. Pod pojmom algebraické riešenie myslíme to, že úlohu vyriešime bez integrácie akejkoľvek diferenciálnej rovnice. Idea, ktorú v práci prezentujeme, je dobre známa vedeckému svetu, ale takmer neznáme pedagógom na stredných školách, a to aj napriek tomu, že poskytuje možnosť priblížiť Keplerovské eliptické orbity študentom gymnázií.

Štýl **0MFI – Kľúčové slová**

Štýl **0MFI - Abstrakt- slovenský**

**Kľúčové slová:** riešenie úloh, Keplerova úloha

Štýl **0MFI – MESC kódy**

**MESC:** M50, U30

Našim cieľom je ukázať, že trajektória telesa hmotnosti m pohybujúceho sa v poli centrálnej sily (prvý odstavec článku resp. prvý odstavec za názvom sekcie)

Vzorec umiestniť v strednej časti tabuľky (3 stĺpce s šírkou: 1 cm, 11, cm, 1 cm). Vzorce písať pomocou editoru rovníc.

Štýl **0MFI – Základný text – 1. odstavec**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Štýl **0MFI - Vzorec** | $$F=\frac{α}{r^{3}}r$$ | (1) |

kde $α$ je konštanta, je nutne jednou z kužeľosečiek – t.j. je to buď priamka (jej časť), kružnica, elipsa, hyperbola alebo parabola. Ak je konštanta $α$ záporná, tak sila (1) je príťažlivá (pokračovanie textu za vzorcom, keď text nie je novým odstavcom). Pri označení

Štýl **0MFI –** **Základný text za vzorcom**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | $$α=κM\_{S}m$$ |  |

kde $κ$ je Newtonova gravitačná konštanta[[1]](#footnote-1), máme presne Keplerovu úlohu o pohybe planét v gravitačnom poli Slnka.

Štýl **0MFI – Poznámka pod čiarou - odkaz**

Štýl **0MFI – Poznámka pod čiarou**

Ak je $α$ kladná, tak sila (1) je odpudivá (ďalšie odstavce textu [nie prvý odstavec za názvom sekcie]). Pri označení:

Štýl **0MFI –** **Základný text**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | $$α=\frac{1}{4πε}Q\_{1}Q\_{2}$$ |  |

kde $ε$ je elektrická permitivita a $Q\_{1},Q\_{2}$ (fyzikálne veličiny v texte písať pomocou editoru rovníc)sú elektrické náboje (rovnakého znamienka), máme úlohu o pohybe dvoch odpudzujúcich sa nábojov. Zostáva posledná možnosť: $α=0$, vtedy je zrejme sila nulová a teda máme len rovnomerný priamočiary pohyb.

...

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | $$L=r×p$$ |  |

(vektorové veličiny sa píšu tučne) je konštantný. Keďže vektor momentu hybnosti je kolmý na rovinu určenú centrom (Slnkom), polohou telesa a smerom určeným rýchlosťou (tzv. rovina pohybu v danom okamihu), tak to znamená, že trajektória uvažovaného telesa je rovinná. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že pohyb prebieha v rovine $Oxy$ - robíme len voľbu súradníc. V našej úlohe je výhodné pracovať aj v polárnych súradniciach v rovine pohybu $\left(r,φ\right)$, ktoré súvisia so zvolenými kartézskymi súradnicami $\left(x,y\right)$ vzťahmi...

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | $$r\_{max}=a+aϵ=\frac{p}{1-ϵ}.$$ |  |

Štýl **0MFI –** **Obrázok popis**

Štýl **0MFI –** **Obrázok na celú šírku**

Obr. 1: K odvodeniu parametrov elipsy. $F$ označuje ohnisko (Focus), ktoré je v počiatku súradníc a leží v ňom silové centrum, napr. pre sústavu Slnko - Zem tam leží Slnko. $C$ označuje stred elipsy.

$$a$$

$$b$$

$$r$$

$$r\_{max}$$

$$r\_{min}$$

$$F$$

$$C$$

$$x$$

$$y$$

...Z prechádzajúceho textu ľahko prídeme k zaujímavému záveru: ak poznám začiatočné podmienky (t.j. poznám $E, L$ a $A$ – zase uvažujme netriviálne $L\ne 0$), tak potom: len s pomocou hodnoty $E$ viem zadeliť trajektóriu do skupín (sú k dispozícii štyri úrovne nečíslovaných odrážok: 0,0,1,2)

* elipsa (kružnica): $E<0$

Štýl **0MFI –** **položky s odrážkami (0), plné body**

* parabola: $E=0$
* hyperbola: $E>0$

Diskusia (sú k dispozícii štyri úrovne nadpisov)

Štýl **0MFI –** **Nadpis úrovne 1**

V predloženom texte sme prezentovali teoreticky známu, ale stredoškolských učiteľov zväčša úplne „utajenú“ možnosť riešenia Keplerovej úlohy. Predložený postup by mohol byť prezentovaný gymnaziálnym študentom v rámci semináru z fyziky. ...

Úlohy a otázky

1. Overte detailne, že platí vzťah (6).

Štýl **0MFI –** **položky s odrážkami (0), 1). 2). 3)**

1. Vráťte sa k prípadu $L=0$ a uvažujte $α$ kladné. Ak je na počiatku častica vo vzdialenosti $R$ od zdroja, akú jej musíme udeliť minimálnu rýchlosť smerom od zdroja, aby naň nespadla?

(sú k dispozícii tri úrovne: 0,1,2)

Poďakovanie

Tento text vznikol s podporou projektu VEGA 1/3042/06.

Štýl **0MFI –** **Literatúra – nadpis**

Literatúra

[1] Albert Shadowitz, *Special relativity,* Dover Publications, Inc. Mineola, 1988,
ISBN: 978-0486657431

Štýl **0MFI –** **Literatúra – položky**

[2] Boris Lacsný. Špeciálna teória relativity pomocou Loedelovych diagramov 1. (The Special Theory of Relativity by using Loedl’s Diagrams 1.), OMFI, 35(1):32–36, 2006.

**Adresa autora:**  Michal Demetrian, Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava IV, e-mail: demetrian@fmph.uniba.sk.

Štýl **0MFI –** **hypertextový odkaz**

Štýl **0MFI –** **Adresa autorov**

1. $κ≈ 6.67× 10^{-11}N∙m^{2} kg^{-2} $ a $M\_{S}$ je hmotnosť Slnka ($M\_{S}≈ 2× 10^{30}kg$). [↑](#footnote-ref-1)