

OBZORY

2/2022 (51)

MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2022 ročník 51

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 2/2022 Volume 51

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Zná m, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec

Editors in Chief: Jozef D o b o š (Mathematics and Computer Sciences)
Daniel K l u v a n e c (Physics)

International Editorial Board:

Anatolij D v u r e č e n s k i j (Slovakia)	Štefan L u b y (Slovakia)
Gábor G a l a m b o s (Hungary)	László N á n a i (Hungary)
Juraj H r o m k o v i č (Switzerland)	Adam P l o c k i (Poland)
Hans J o r d e n s (Netherland)	Zdeněk P ů l p á n (Czech republic)
Martin K a l i n a (Slovakia)	Ladislav Emanuel R o t h (USA)

Executive Editors: Štefan T k a č i k (Mathematics and Computer Sciences)
A b a T e l e k i (Physics)

Editorial Board:

Mathematics and Computer Sciences:

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Peter Maličký	Iveta Scholtzová
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Mariana Marčoková	Milan Turčáni
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Milan Matejdes	Peter Vrábel
	Tomáš Lengyelfalusi	Martin Papčo	

Physics:

Jozef Beňuška	Stanislav Holec	Viera Lapitková	Vladimír Šebeň
Ivo Čáp	Anna Jankovychová	Milan Noga	Boris Tomášik
Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó	Bohumil Vybíral

Reviewers:

Mathematics and Computer Sciences:

Ružena Blašková	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan
Radoslav Harman	Martin Papčo	Marián Trenkler
Mária Kmeťová	Iveta Scholtzová	Dušan Vallo

Physics:

Peter Demkanin	Peter Hanisko	Marián Kíreš	Arnold Pompoš
Jozef Hanč	Ján Klíma	Miroslava Ožvoldová	Mária Rakovská

Rovesnícke hodnotenie ako nástroj učenia sa

Timea Gábová, Dušan Šveda

Abstract [Peers' assessment as a learning tool]: This article deals with the peers' assessment and its possible impact on the students' topic understanding. It contains results of the research taking place in mathematics classes within two different school years and levels by teaching topics of the ratio, direct and indirect proportionality, and theory of numbers. Our results show that there should be some positive connection between the usage of the peers' assessment within the educational process and the pupils' topic understanding. At the same time, this article also presents the Peer-Assessment rubrics and the students' feedback on the usage of such rubrics.

Key words: Peer-Assessment, Rubrics, Formative assessment, school mathematics

Súhrn: Článok pojednáva o rovesníckom hodnotení a jeho možnom vplyve na porozumenie žiakov. Obsahom článku sú výsledky výskumu prebiehajúceho na hodinách matematiky v 2 rôznych ročníkoch a stupňoch škôl pri vyučovaní tém pomer, priama a nepriama úmernosť a teória čísel. Výsledky výskumu naznačujú, že by mohol existovať pozitívny vzťah medzi použitím rovesníckeho hodnotenia a porozumením žiakov. Článok okrem vyhodnotenia výsledkov obsahuje aj ukážku rubriky zameranej na rovesnícke hodnotenie a spätnú väzbu žiakov na použitie týchto rubriek.

Kľúčové slová: rovesnícke hodnotenie, rubriky, formatívne hodnotenie, školská matematika

MESC: C30, C70, D40, G70

Úvod

Téma rovesníckeho učenia a hodnotenia je dlhodobo aktuálnou, najmä vďaka modernejším prístupom k vyučovaciemu procesu a konštruktivistickému modelu vyučovania [2]. Práve konštruktivistický model a formatívne hodnotenie sú predmetom mnohých výskumov, ktoré ukazujú vzťah medzi hodnotením a kvalitou učenia. Podľa Sambell [5] sú základnými aspektmi hodnotenia zložky formatívneho a sumatívneho

hodnotenia, pričom každé hodnotenie by malo prispieť k vzdelávaniu a rozvoju žiakov. Je veľmi podstatné si uvedomiť, že počas rovesníckeho hodnotenia, ako súčasť formatívneho hodnotenia, žiaci nepôsobia ako pasívni príjemcovia spätnej väzby, ale sa stávajú aktívnym sprostredkovateľom v tomto procese. Práve to je podstatné pre budúci sebarozvoj žiaka a jeho učenie sa. Ak majú žiaci ťažiť z rovesníckeho hodnotenia, potrebujú pochopiť proces a kritériá toho hodnotenia. Najmä ak chceme, aby poskytli kvalitnú spätnú väzbu rovesníkom. Tieto procesy dávania a prijímania spätnej väzby rovesníkom sú dôležitým aspektom žiackeho učenia sa [4]. Proces rovesníckeho hodnotenia učí žiakov zručnosť učiť sa učiť. Je to v súlade s konštruktivistickým modelom vzdelávania, v ktorom je hodnotenie súčasťou procesu učenia sa [1]. Avšak, je nevyhnutné zväziť a akej klíme sú žiaci pri rovesníckom hodnotení. Je kľúčové, aby všetci žiaci boli v rovnakej pozícii. Práve to je dôležité na to, aby vzájomné hodnotenie nebolo „vzájomným vedením“ ale „vzájomným učením sa“ žiakov. Preto je podstatné zaviesť, podporovať, plánovať a efektívne riadiť rovesnícke učenie sa (pozri [7]). Rovesnícke hodnotenie je dôležitou časťou vyučovacieho procesu, a preto by mohlo mať väčší priestor na vyučovacích hodinách. Je to jeden zo spôsobov ako viesť žiakov k vzájomnému učeniu sa. Má výhody, ktoré by mali viesť k zaradeniu do vyučovacom procese. K niektorým výhodám rovesníckeho hodnotenia patrí:

- Rovesnícke hodnotenie buduje proces vlastného rozvoja.
- Rovesnícka spätná väzba podporuje spoluprácu.
- Rovesnícke hodnotenie vykresľuje kognitívny model vyučovania.
- Žiak môže rovesníkom niekedy lepšie pomôcť s medzerami vo vedomostiach.
- Žiaci zaoberajúci sa svojou prácou zvyšujú vlastný zmysel pre spravodlivosť.
- Rovesnícke hodnotenie pomáha k rovnováhe medzi učiteľom a žiakmi pričom uprednostňuje žiacku rolu vo vyučovacom procese.
- Zameranie na spätnú väzbu žiakov môže prispieť k jasnejším a kritickejšým prístupom a vyjadreniam žiackych názorov.
- Poskytuje okamžitú spätnú väzbu, čo je pre formatívne hodnotenie veľmi prospešné. Proces rovesníckeho hodnotenia učí žiaka dávať a prijímať spätnú väzbu, čo je dôležitá zručnosť.
- Rovesnícke hodnotenie s predstavou dôležitosti vo vyučovacom procese zvyšuje porozumenie. [6]

1 Metodika výskumu

Výskum mal podobný charakter ako, nedávny výskum zameraný na sebahodnotenie žiakov (pozri [3]) [3]. Má kvalitatívny charakter s použitím kvalitatívnych a kvantitatívnych metód pričom sme sa zamerali na tieto výskumné otázky:

- Existuje súvislosť medzi použitím rubriík rovesníckeho hodnotenia a úspechom žiakov pri riešení procedurálnych úloh?
- Existuje súvislosť medzi použitím rubriík rovesníckeho hodnotenia a úspechom žiakov pri riešení konceptuálnych úloh?
- Aký názor majú žiaci na používanie rovesníckeho hodnotenia?

Výskum prebiehal na osemročnom gymnázium v dvoch rôznych ročníkoch. V časti určenej pre nižšie ročníky gymnázia bola vybraná trieda zodpovedajúca 7. ročníku ZŠ počas tematického celku pomer, priama a nepriama úmernosť. V triede bolo 18 žiakov (vzorka nakoniec pozostávala zo 17 žiakov pretože, jeden žiak chýbal na 2. teste). Skupina žiakov bola rozdelená na 2 časti každá po 9 žiakov, pričom po prvom didaktickom teste len jedna skupina žiakov pracovala s rovesníckym hodnotením. Výskum tiež prebiehal v 3. ročníku bilingválneho gymnázia, kde sa ho zúčastnili dve paralelné triedy odpovedajúce 2. ročníku gymnázia. Tu výskum prebiehal počas tematického celku zameraného na teóriu čísel. V triedach bolo spolu 43 žiakov, ale keďže nie každý žiak sa zúčastnil oboch testov, konečná vzorka spočívala len z 36 žiakov. Pre riešenie výskumných úloh sme zostavili pre každý celok dva didaktické testy, tvorené troma dvojicami konceptuálnych a procedurálnych úloh, zameraných na teóriu čísel respektíve pomer, priama a nepriama úmernosť. Procedurálnou úlohou rozumieme úlohu zameranú na ovládanie poznatku, alebo algoritmu. Konceptuálnou úlohou rozumieme úlohu, v ktorej žiak musí prepojiť svoje vedomosti a vzťahy medzi poznatkami. Prvý didaktický test bol zadaný žiakom pred začiatkom vyučovania tematického celku, druhý didaktický test bol zadaný po prebratí tematického celku.

Ukážka procedurálnej a konceptuálnej úlohy prvého didaktického testu v úvode tematického celku pred priamou úmernosťou:

Úloha (P – procedurálna)

Zmeňte číslo 300 v pomere 4:3.

Úloha (K – konceptuálna)

Janka piekla koláč podľa nájdeného receptu pripadala na 150 g múky jeden balíček prášku do pečiva. Tesne pred dokončením cesta však Janka našla pôvodný overený recept, na ktorom stálo na 200 g múky 1 balíček prášku do pečiva (16 g). Koľko g prášku do pečiva má Janka odvážiť ak koláč pečie iba zo 150 g múky?

Ukážka z druhého didaktického testu, na konci tematického celku teória čísel:

Úloha (P – procedurálna)

Nájdite najmenší spoločný násobok čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Úloha (K – konceptuálna)

Na futbalový zápas prišlo menej ako 5000 divákov. Aký je presný počet divákov, ak

viš, že mladý matematik prehlásil, že platí: Ak vydelím počet divákov číslom 10 dostanem zvyšok 9, pri delení 9 zvyšok 8,..... až pri delení číslom 2 zvyšok 1.

Zároveň sme v každom ročníku žiakov rozdelili na dve skupiny, pričom jednej sme zaradili do výučby rovesníckej hodnotenie pomocou rubriky. Experimentálna skupina (skupina žiakov, ktorá pracovala s rubrikou) sa počas výučby hodnotila v skupinách alebo v dvojiciach. Napríklad mala za úlohu komentovať žiacke riešenie a následne prideliť úroveň porozumenia daného žiaka. Na ukážku uvádzame príklad rovesníckej rubriky a žiackeho riešenia.

Rovesnícka rubrika	
Úroveň/Pojem	Kritéria deliteľnosti
1	Pozná pojem: (žiak pozná pojem a jeho základné vlastnosti)
2	Vie použiť v 1. úrovni: (žiak dokáže použiť pojem v jednoduchých výpočtových úlohách)
3	Vie použiť v 2. úrovni: (žiak dokáže použiť pojem v slovných úlohách a úlohách zameraných na prax)
4	Rozumie pojmom: (žiak dokáže preformulovať a vysvetliť pojem, dokáže formulovať úlohy na daný pojem a dokáže vyriešiť úlohu, s ktorou sa ešte nestretol)

Tabuľka 1. Ukážka rubriky, zameranej na rovesnícke hodnotenie.

Následne sme analyzovali riešenia a porovnávali úspešnosť úloh skupiny žiakov, pracujúcich s rubrikou a tou, ktorá s ňou nepracovala. Na spracovanie výsledkov sme použili štatistický nástroj Mann-Whitney U test (ďalej len U test) a určili sme základné štatistické znaky - aritmetický priemer a medián.

Ukážka úloh k žiackemu riešeniu.

6. Od ľubovoľného trojciferného prirodzeného čísla odčítame poslednú číslicu. Dvojnásobok predposlednej číslice a štvornásobok prvej číslice. Dokážte, že takto vzniknuté číslo je deliteľné 8.
7. Nepoznáme počet kariet, ale vieme, že učiteľ sa sťažoval, že pri ukladaní do dvojradu, trojradu, štvorradu, päťradu aj šesťradu vždy jeden do úplného obdĺžnika chýba. Koľko má pripravených kartičiek?
8. Dokážte, že súčet štvorcov dvoch za sebou idúcich párnych čísel je deliteľný 4.

2 Výsledky výskumu

Najprv výsledky výskumu rozdelíme zvlášť na žiakov spadajúcich vekovo na 2. stupeň ZŠ a na žiakov vyšších ročníkov gymnázia. V oboch ročníkoch najprv porovnáваме výsledky 1. didaktického testu, aby sme zistili, či sú experimentálna a kontrolná

$m = a + b + c = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$
 $\frac{2}{a} \cdot 100 + b \cdot 10 + c - c - 2ab - 4a$
 $a \cdot 100 + b \cdot 10 + 2 \cdot b - 4a =$
 $8 \cdot (12a + b) = 8b \Rightarrow 8/b$

$4 / ((2m)^2 + (2m+2)^2)$
 $(2m)^2 + (2m+2)^2 = 4m^2 + 4m^2 + 8m + 4$
 $8m^2 + 8m + 4 = 4(2m^2 + 2m + 1)$

Obrázok 1. Ukážka rovesníckeho hodnotenia. Toto riešenie dostalo v rubrikách hodnotenie úrovne 2.

skupina žiakov vyrovnané. Potom zhrnieme prácu s rubrikou a následne porovnáme výsledky 2. didaktického testu. Neskôr uvedieme žiacky pohľad na prácu s rubrikami.

Rovesnícke hodnotenie v tematickom celku Pomer, priama a nepriama úmera

V tejto vzorke žiakov bolo 18 žiakov. Žiaci po prvom teste boli rovnomerne rozložení na dve rovnocenné skupiny. Každá mala 9 žiakov počas obdobia tohto tematického celku sme teda často pracovali buď v skupine a popritom používali aj rovesnícke hodnotenie v rámci skupiny, alebo sme zadávali žiakom rôzne domáce úlohy. Zatiaľ čo u žiakov jednej skupiny sme využívali rubriky v druhej skupine sme toto hodnotenie nechali na preferenciách samotných žiakov. Žiaci sa hodnotili medzi sebou anonymne formou domácich úloh, alebo hodnotili prácu „iného žiaka“ (teda vymyslené žiacke riešenie). Prácou v skupinách si následne dávali aj spätnú väzbu a hodnotenie navzájom.

	počet	Test 1		Procedurálna časť		Konceptuálna časť	
		priemer	medián	priemer	medián	priemer	medián
žiaci, ktorí nepracovali s rubrikou	8	3,75	3,5	2,25	2	1,13	1
žiaci, ktorí pracovali s rubrikou	9	4	4	2,33	2	1,66	2

Tabuľka 2. Výjadrenie porovnania úspešnosti v 2. didaktickom teste u žiakov, ktorí pracovali a nepracovali s rubrikami v získaných bodoch

Podľa plánu malo 6 traktorov dokončiť orbu za 12 dní. Na výpomoc však dostali ďalšie 2 traktory. O koľko dní sa im podarí skrátiť orbu ?

$$\begin{array}{l} \downarrow 6 \text{ traktorov} \dots\dots 12 \text{ dní} \uparrow \\ \downarrow 8 \text{ traktorov} \dots\dots x \text{ dní} \uparrow \end{array}$$

$$x \cdot 8 = 12 \cdot 6$$

$$x = 9$$

Podarí sa im skrátiť orbu o 3 dni:

Bude im to trvať 9 dní,
ale skrátia si čas o 3 dni!
Dávaj lepší pozor na otázku

Obrázok 2. Ukážka rovesníckeho hodnotenia.

Ako príklady uvádzame riešenie dvoch žiakov a následného rovesníckeho hodnotenia. Na riešení z (obrázka 2) vidieť, že žiak okomentoval chybu svojho spolužiaka, pričom, následne v celom pracovnom liste ohodnotil spolužiakové vedomosti úrovňou 3. Na riešení z (obrázka 3) vidieť komentár k nesprávnemu riešeniu úlohy, ktoré spolužiak následne ohodnotil úrovňou 1.

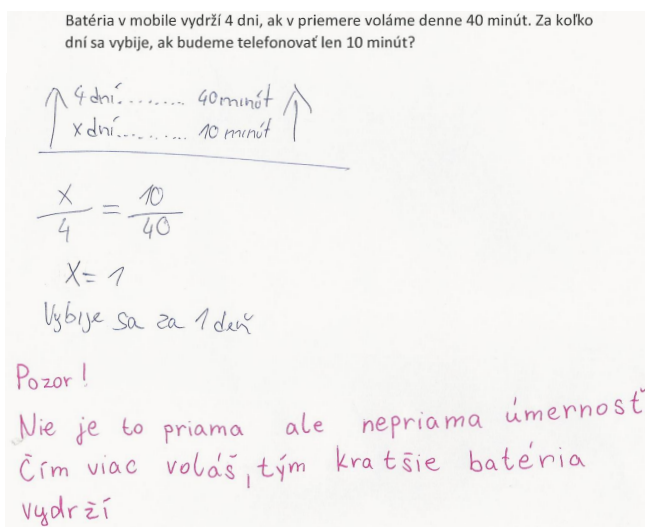
Na základe základných štatistických údajov vidíme v bodoch (tabuľka 2) aj na základe U testu, že neexistuje štatistický významný rozdiel medzi skupinami v prvom didaktickom teste s hladinou významnosti 5 %. Taktiež platí na hladine významnosti 5 %, neexistuje rozdiel medzi skupinami ani v konceptuálnej ani v procedurálnej časti 1. didaktického testu.

Ďalej sme skúmali či nastal rozdiel v 2. didaktickom teste spolu a následne samostatne procedurálnu časť a konceptuálnu časť. Na základe U testu môžeme tvrdiť, že na hladine významnosti 5 % existuje rozdielnosť v úspešnosti v 2. didaktickom teste vzhľadom na použité rovesnícke rubriky. Tí žiaci, ktorí tieto materiály používali majú úspešnosť v bodoch vyššiu (tabuľka 3).

	počet	priemer	medián
žiaci, ktorí nepracovali s rubrikou	8	2,25	2,5
žiaci, ktorí pracovali s rubrikou	9	4,72	5

Tabuľka 3. Vyjadrenie porovnania úspešnosti v získaných bodoch 2. didaktického testu

Skúmali sme či nastal rozdiel v procedurálnej časti didaktického testu 2. Na základe U testu môžeme tvrdiť, že na hladine významnosti 5 % existuje rozdielnosť v úspešnosti v procedurálnej časti didaktického testu 2 vzhľadom na použité rovesnícke rubriky. Tí žiaci, ktorí tieto materiály používali majú úspešnosť v bodoch vyššiu (tabuľka 4).



Obrázok 3. Ukážka rovesníckeho hodnotenia.

	počet	priemer	medián
žiaci, ktorí nepracovali s rubrikou	8	1,9	2
žiaci, ktorí pracovali s rubrikou	9	2,9	3

Tabuľka 4. Vyjadrenie porovnania úspešnosti procedurálnej časti 2 testu v získaných bodoch

Následne či nastal rozdiel v konceptuálnej časti 2. didaktického testu. Na základe U testu môžeme tvrdiť, že na hladine významnosti 5 % existuje rozdielnosť v úspešnosti v konceptuálnej časti 2. didaktického testu vzhľadom na použité rovesnícke rubriky. Úspešnosť žiakov používajúcich tieto materiály bola vyššia (tabuľka 5).

	počet	priemer	medián
žiaci, ktorí nepracovali s rubrikou	8	0,8	0,75
žiaci, ktorí pracovali s rubrikou	9	1,9	2

Tabuľka 5. Vyjadrenie porovnania úspešnosti konceptuálnej časti 2. testu v získaných bodoch

Na základe týchto štatisticky významných rozdielov, ktoré ukazujú, že žiaci v experimentálnej skupine dosiahli lepšie výsledky usudzujeme, že žiakom práca z rovesníckym hodnotením pomohla s porozumením a teda bola pre nich prospešná.

Na ukážku sme sa rozhodli vybrať riešenie jedného žiaka, volajme ho Adam. Adam mal v prvom teste priemerný počet bodov a taktiež aj obe časti sa pohybovali na úrovni priemeru, pričom bolo vidieť, že sa ani hlbšie nezamýšľal nad úlohami. Čo vidieť napríklad pri úlohe 3, kde len prvoplánovo napísal odpoveď (obrázok č 4).

Rodinný dom je rozdelený na 2 samostatné byty. Ako sa má rozdeliť preplatok vody medzi tieto 2 domácnosti, ak poznáte nasledujúce informácie/skutočnosti:

- rodina na prízemí spotrebovala 40 m³ vody;
- rodina na prvom poschodí spotrebovala 70 m³ vody;
- obe rodiny platia mesačné preddavky 15 eur (počítaj 12 krát);
- preplatok vody je 11 eur;
- m³ vody stojí 2,65 eur.

(v poplatku za vodu je započítaná spotreba + mesačný poplatok)

Preplatok si rozdelili v pomere 4:7

Obrázok 4. Ukážka Adamovho riešenia úlohy z didaktického testu 1.

Následne Adam bol v skupine, ktorá pracovala s rovesníckym hodnotením. A rubrikami na rovesnícke hodnotenie. Následne sme zopakovali úlohu z prvého didaktického testu, bez toho, aby si žiak uvedomil, že danú úlohu už riešil a bez toho, aby sme 1. didaktický test nejak komentovali. Jeho riešenie sa zmenilo takto obrázok č.5. Síce si stále neuvedomoval, že výsledok mu nejak neseďí, a stále nezakomponoval do riešenia aj mesačný poplatok, ale jasne vidieť, že riešenie sa posunulo vpred.

Následne jeho druhý didaktický test bol na plný počet bodov (6 bodov, obrázok č. 6). žiak síce nepísal komentár, ale jasne vidieť, že si uvedomuje, že sezóna netrvá polovicu obdobia. U žiakov som taktiež postrehla, že ich argumentačné schopnosti boli na vyššej úrovni. Čo ale, môže byť spôsobené aj tým, že sme sa vrátili po dištančnej výučbe.

Rovesnícke hodnotenie v tématickom celku Teória čísel

V tejto vzorke sa zúčastnili 2 triedy odpovedajúce 2. ročníku gymnázia. Teda sme mali dve paralelné skupiny žiakov rovnakého ročníka s rovnakou vyučujúcou. Keďže nie všetci žiaci písali oba testy, žiakov, ktorí chýbali na niektorom z testov sme vylúčili. Následne jedna trieda (z nej bolo na oboch testoch 18 žiakov) pracovala s rovesnícky hodnotením počas nasledujúceho tématického celku (obrázok 7). Žiaci pracovali a hodnotili sa vo dvojiciach aj v skupinách. Druhá trieda fungovala ako kontrolná skupina (v nej oba testy písalo 16 žiakov).

Na základe základných štatistických údajov vidíme v bodoch (tabuľka 6) aj na základe U testu, že neexistuje štatistický významný rozdiel medzi skupinami v prvom didaktickom teste s hladinou významnosti 5 %. Taktiež platí na hladine významnosti 5 %, neexistuje rozdiel medzi skupinami ani v konceptuálnej ani v procedurálnej časti 1. didaktického testu.

Rodinný dom je rozdelený na 2 samostatné byty. Ako sa má rozdeliť preplatok vody medzi tieto 2 domácnosti, ak poznáte nasledujúce informácie/skutočnosti:

- rodina na prízemí spotrebovala 40 m³ vody;
- rodina na prvom poschodí spotrebovala 70 m³ vody;
- obe rodiny platia mesačné preddavky 15 eur (počítaj 12 krát);
- preplatok vody je 11 eur;
- m³ vody stojí 2,65 eur.

(v poplatku za vodu je započítaná spotreba + mesačný poplatok)

$$\begin{array}{l}
 \text{Prízemie} = 40 \text{ m}^3 \text{ vody} \\
 \text{Poschodie} = 70 \text{ m}^3 \text{ vody} \\
 \text{Preddavky} = 15 \text{ € mesačne} \\
 \text{Preplatok} = 11 \text{ €} \\
 \text{m}^3 \text{ vody} = 2,65 \text{ €} \\
 \text{Pomer preplatku} = ?
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 40 \cdot 2,65 = 106 \\
 70 \cdot 2,65 = 185,50 \\
 15 \cdot 12 = 180 \\
 185,50 - 180 = 5,50 \\
 180 - 106 = 74
 \end{array}$$

Rodina na prízemí má preplatok 74 €.
 Rodina na poschodí má nedoplatok 5,50 €.

Obrázok 5. Ukážka druhého pokusu Adamovho riešenia úlohy z 1. testu

	Test 1			Procedurálna časť		Konceptuálna časť	
	počet	priemer	medián	priemer	medián	priemer	medián
žiaci, ktorí nepracovali s rubrikou	16	10	11	6	7	4	4
žiaci, ktorí pracovali s rubrikou	18	9	10	7	7	2,8	2,5

Tabuľka 6. Vyjadrenie porovnania úspešnosti v 1. teste u žiakov, ktorí pracovali a nepracovali s rubrikami v získaných bodoch

Následne sme podobne ako v predchádzajúcej triede skúmali či nastal rozdiel v druhom didaktickom teste spolu a samostatne procedurálnu a konceptuálnu časť. Na základe U testu môžeme tvrdiť, že na hladine významnosti 5 % existuje rozdielnosť v úspešnosti v 2. didaktickom teste vzhľadom na použité rovesnícke rubriky. Tí žiaci, ktorí tieto materiály používali majú úspešnosť v bodoch vyššiu (tabuľka 7).

Taktiež sme skúmali či nastal rozdiel v procedurálnej časti 2. didaktického testu 2. Na základe U testu môžeme tvrdiť, že na hladine významnosti 5 % existuje rozdiel-

Hlavná sezóna na horskej chate trvá 5 mesiacov. Počas tejto hlavnej sezóny je pomer obsadených a neobsadených postelí 4:1. Mimo hlavnej sezóny je tento pomer 2:3. Aký je pomer obsadených a neobsadených postelí počas celého roka?

1. Január	4	:	1
2. Február	4	:	1
3. Marec	4	:	1
4. Apríl	4	:	1
5. Máj	2	:	3
6. Jún	2	:	3
7. Júl	2	:	3
8. August	2	:	3
9. September	2	:	3
10. Október	2	:	3
11. November	2	:	3
12. Decembar	2	:	3
	<hr/>		
	36	:	26 = <u>17:13</u>

Obrázok 6. Ukážka Adamovho riešenia 2. testu

4. Neexistujú \times Číselný, sú do 5 rokov veľkých prvočísel

5. $\frac{n^4 - m^2}{12} = \sqrt{\quad}$
 $\hookrightarrow 2^4 - 2^2 = 16 - 4 = 12 \quad /:12 \text{ (1)}$
 $5^4 - 5^2 = 625 - 25 = 600 \quad /:12 \text{ (50)}$
 Pretože rozdiel čísel n^4 a m^2 je vždy deliteľný číslami 3 a 4, a teda aj 12

6. $100 - 0 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = 100 - 0 - 2 - 4 = 94 \quad /:8 \text{ (11,75)}$ Neplatí to \times
 $2 \cdot 0 \neq 2$
 $2 \cdot 0 = 0$
 $100 - 0 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = 100 - 0 - 0 - 4 = 96 \quad /:8 \text{ (12)}$ Platí to
 $653 - 3 - 2 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = 653 - 3 - 10 - 24 = 616 \quad /:8 \text{ (77)}$

Obrázok 7. Ukážka práce s rovesníckym hodnotením

	počet	priemer	medián
žiaci, ktorí nepracovali s rubrikou	16	2,25	2,5
žiaci, ktorí pracovali s rubrikou	18	4,72	5

Tabuľka 7. Výjadrenie porovnania úspešnosti 2. didaktického testu v získaných bodoch

nosť v úspešnosti v procedurálnej časti 2. didaktického testu vzhľadom na použité rovesnícke rubriky. Tí žiaci, ktorí tieto materiály používali, majú úspešnosť v bodoch vyššiu (tabuľka 8).

	počet	priemer	medián
žiaci, ktorí nepracovali s rubrikou	16	6,37	6
žiaci, ktorí pracovali s rubrikou	18	7,77	8

Tabuľka 8. Výjadrenie porovnania úspešnosti procedurálnej časti 2. testu v získaných bodoch

Rozdiel nastal aj v konceptuálnej časti druhého didaktického testu. Na základe U testu môžeme tvrdiť, že na hladine významnosti 10 % existuje rozdielnosť v úspešnosti v konceptuálnej časti 2. didaktického testu vzhľadom na použité rovesnícke rubriky. Tí žiaci, ktorí tieto materiály používali, majú úspešnosť v bodoch vyššiu (tabuľka 9).

	počet	priemer	medián
žiaci, ktorí nepracovali s rubrikou	16	2,5	2
žiaci, ktorí pracovali s rubrikou	18	3,9	4

Tabuľka 9. Výjadrenie porovnania úspešnosti konceptuálnej časti 2. testu v získaných bodoch

Aj na základe výsledkov týchto tried, tvrdíme, že žiakom práca s rovesníckym hodnotením pomohla pri riešení a porozumení matematických úloh. Ich pozeranie sa na kritériá úspešnosti poznanie úrovni hodnotenia rozvíjalo a zlepšovalo kvalitu ich porozumenia. Pretože obe skupiny mali rovnaké vyučujúce, rovnaké podmienky vyučovania a líšili sa len zavedením rovesníckeho hodnotenia, nepredpokladáme, že by to mohlo byť spôsobené niečím iným. Avšak je to stále iba malá vzorka, preto sa máme v pláne jej ďalej venovať.

Aký názor majú žiaci na používanie rovesníckych rubriek?

Vzhľadom na to, že podľa nás malo rovesnícke hodnotenie význam zaujímali nás aj názory žiakov na tento nástroj hodnotenia. Žiaci mali odpovedať na tieto otvorené otázky:

- Ako sa ti pracovalo s rubrikami?
- Malo rovesnícke hodnotenie podľa teba význam, a aký?

- Aké výhody má rovesnícke hodnotenie?
- Aké nevýhody má rovesnícke hodnotenie?
- Malo používanie tohto hodnotenia vplyv na tvoje porozumenie danej téme?

Od mladších žiakov sme síce dostali pozitívnu spätnú väzbu, ale bola len na úrovni veľmi jednoduchým až jednoslovných viet. Popríklad nevedeli odpovedať na otázku vôbec. Späť sme preto diskutovali o tomto spôsobe hodnotenia a túto spätnú väzbu len stručne zhrnieme. Žiakom sa pracovalo dobre. A brali to ako pozitívnu zmenu hodnotenia. Neuvedomovali si však to, že pri hodnotení boli nútení uvažovať nad učivom. Preto nevedeli ani odpovedať, či to malo na ich učenie vplyv. Starší žiaci nám poskytli kvalitnejšiu spätnú väzbu, preto uvádzame niektoré doslovné prepisy:

- *Ako sa ti pracovalo s rubrikami?* Veľmi dobre bola to príjemná zmena. Bola to zaujímavá skúsenosť, no už by som ju asi nezopakovala. S rubrikami sa pracovalo dobre. Boli prehľadné a zrozumiteľné. Nie veľmi dobre, pretože ako žiak neviem, ako má žiak zvládnuť učivo.“
- *Malo rovesnícke hodnotenie podľa teba význam, a aký?* Áno naučili sme sa byť kritickejší voči ostatným aj voči sebe. Uvedomili sme si stupeň svojej „inteligencie“. Malo, v tom, že sme museli objektívne zhodnotiť spolužiaka ako učiteľa.
- *Aké výhody má rovesnícke hodnotenie?* Miernejší prístup k hodnoteniu, menší stres. Mohli sme sa zhodnotiť úprimne. Aby sme vedeli ako na tom sú ostatní a mohli precvičovať to čo nám nejde. Niekedy je lepšie dostať hodnotenie od spolužiakov. Poznáme názor niekoho iného ako učiteľa. Že sa učíme hodnotiť, keďže to nie je ľahké.
- *Aké nevýhody má rovesnícke hodnotenie?* Nedokázali sme byť taký profesionálny ako učiteľa. Nemusi byť vždy objektívne.
- *Malo používanie rovesníckeho hodnotenia vplyv na tvoje porozumenie danej téme?* Áno, slúžilo mi to na opakovanie. Vedeli sme si to navzájom vysvetliť.

3 Záver

Práca s rovesníckym hodnotením je pre všetkých zúčastnených náročná, ale prospešná. Na výskume sa zúčastnili len malé vzorky žiakov, ale z výsledkov môžeme predpokladať, že existuje pozitívny vzťah medzi používaním rubriky a úspešnosťou v matematických úlohách. A je vhodné ho ďalej skúmať. Zo spätnej väzby žiakov usudzujeme, že žiaci o toto hodnotenie javia záujem, a sami hlavne starší žiaci si uvedomujú jeho výhody a nevýhody. Používanie rovesníckeho hodnotenia má potenciál byť jedným z vhodných nástrojov na silnú vnútornú motiváciu žiakov. Avšak pri tomto spôsobe hodnotenia je dôležitá príprava a nastavenie žiakov, a pocit rovnosti medzi nimi.

Literatúra – References

- [1] Foldevi, M., Sommansson, G., Trell, E. *Problem based medical education in general practice: experience from Linköping, Sweden*. British Journal of General Practice, 44, 473–476. 1994.
- [2] Chambers, K., Whannell P., Whannell, R. *The use of peer assessment in a regional Australian university tertiary bridging course*. Australian Journal of Adult Learning Volume 54, Number 1. 2014.
- [3] Gábová, T. Šveda, D.: *Sebahodnotiace rubriky ako nástroj pre lepšie porozumenie matematiky*, in: *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, 50 (3), 2021.
- [4] Kolmos, A., J. E. Holgard, *Alignment of PBL and assessment. 1st International Conference on Research in Higher Education*. Honolulu: American Educational Research Association, pp. 1–9. 2007.
- [5] Sambell, K., Mcdowell, L., Montgomery, C. *Assessment for learning in higher education*. London, UK: Routledge. 2013.
- [6] Spiller, D. *ASSESSMENT MATTERS: Self-Assessment and Peer Assessment: Teaching Development Unit/ Wāhanga Whakapari Ako 2012*.
- [7] Wride, M. *Guide to Peer-Assesment, Academic practice*, University of Dublin Trinity College 2017.

Pod'akovanie: Článok vznikol s podporou projektu KEGA 020UPJŠ-4/202.

Adresy autorov:

Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika,
Jesenná 5, 040 01 Košice

e-mail: timea.gabova@gmail.com, dusan.sveda@upjs.sk

O rozložení prvočísel v okolí faktoriálů

Antonín Čejchan, Michal Křížek, Lawrence Somer

Abstract [On distribution of primes around factorials]: The distribution of primes is quite irregular. We prove the following theorem which however allows some regularity: If a prime number p satisfies $n! + 1 < p < n! + r^2$, where r is the smallest prime larger than a given natural number n , then $p - n!$ is also a prime. We state a similar theorem for primes just below $n! - 1$. Further we prove similar statements also for the case when $n!$ is replaced by $q\#$ which is the product of all primes not exceeding a prime q .

Key words: factorial primes, Euclidean primes, primorial primes, strong law of small numbers

Souhrn: Rozložení prvočísel je dosti nepravidelné. V článku dokážeme následující větu, která však jistou pravidelnost připouští: Jestliže prvočíslo p splňuje nerovnosti $n! + 1 < p < n! + r^2$, kde r je nejmenší prvočíslo větší než n , pak $p - n!$ je také prvočíslo. Obdobnou větu vyslovíme i pro prvočísla těsně pod $n! - 1$. Dále dokážeme podobná tvrzení i pro případ, kdy $n!$ je zaměněno za $q\#$, což je součin všech prvočísel nepřesahujících prvočíslo q .

Klíčová slova: faktoriální prvočísla, Eukleidova prvočísla, primoriální prvočísla, silný zákon malých čísel

MESC: F60

1 Prvočísla v okolí faktoriálů

V celém článku budeme předpokládat, že $n \in \mathbb{N}$ je libovolné pevně zvolené přirozené číslo a $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ je jeho faktoriál.

Naše hlavní výsledky jsou shrnuty ve větách 1.3, 1.5, 3.3 a 3.4. Nejprve však uvedeme dvě dobře známá lemmata, která ilustrují, že v blízkém okolí nad $n! + 1$ a pod $n! - 1$ se nenalézají žádná prvočísla, tj. v polouzavřených intervalech $[n! - n, n! - 1)$ pro $n > 3$ a $(n! + 1, n! + n]$.

Lemma 1.1

Je-li prvočíslo $p > n! + 1$, pak $p > n! + n$.

Důkaz. Tvrzení lemmatu okamžitě plyne ze skutečnosti, že po sobě jdoucí čísla

$$n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$$

jsou všechna složená. □

Podobně lze dokázat i další lemma.

Lemma 1.2

Je-li prvočíslo $p < n! - 1$ a $n > 3$, pak $p < n! - n$.

Předpoklad $n > 3$ vylučuje nežádoucí počáteční případ $n = p = 3$, pro který nerovnost $p < n! - n$ zřejmě neplatí.

Připomeňme (viz [5]), že všechna prvočísla tvaru $n! + 1$ se nazývají *faktoriální prvočísla*. Například pro

$$n = 1, 2, 3, 11, 27, 37, 41, 73, 77, 116, 154, 320, 340, 399, 427, 872, \dots$$

je $n! + 1$ prvočíslem. Prvočísla tvaru $n! - 1$ se také nazývají *faktoriální prvočísla*. Dostaneme je pro

$$n = 3, 4, 6, 7, 12, 14, 30, 32, 33, 38, 94, 166, 324, 379, 469, 546, 974, \dots$$

Nyní vyslovíme větu, která ilustruje pozoruhodné vlastnosti po sobě jdoucích prvočísel v pravém okolí bodu $n! + 1$.

Věta 1.3

Nechť r je nejmenší prvočíslo, pro něž $r > n$. Jestliže prvočíslo p splňuje nerovnosti

$$n! + 1 < p < n! + r^2, \tag{1}$$

pak $p - n!$ je také prvočíslo.

Důkaz. Případ $n = 1$ je zřejmý. Nechť tedy $n > 1$ a nechť prvočíslo p splňuje (1). Předpokládejme naopak, že $p - n!$ je složené. Potom existuje prvočíslo m a celé číslo $k \geq m$ tak, že

$$p - n! = mk.$$

Odtud a z nerovnosti $p - n! < r^2$ vyplývající z (1) vidíme, že $mk < r^2$. Pro prvočísla m a r tak dostaneme $m < r$, a tudíž prvočíslo m splňuje nerovnost $m \leq n$. Protože $m \mid n!$ a $m \mid (p - n!)$, platí, že $m \mid p$, což je ve sporu s tím, že p je prvočíslo a že $p > n! + 1 > n \geq m$. □

Příklad 1.4

Pro $n = 5$ je $r^2 = 49$ a po sobě jdoucí prvočísla nad $5!$ máme

$$\begin{aligned}
 5! &= 120 = 127 - 7 = 131 - 11 = 137 - 17 = 139 - 19 = 149 - 29 \\
 &= 151 - 31 = 157 - 37 = 163 - 43 = 167 - 47 \\
 &= 173 - 53 = 179 - 59 = 181 - 61 = 191 - 71 = 193 - 73 \\
 &= \underline{197 - 7 \cdot 11}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Tedy všechny tyto rozdíly prvočísel dávají stejné číslo $5! = 120$. Je patrné, že po sobě jdoucích prvočísel $p > n! + n$, pro něž je $p - n!$ také prvočíslu, je více než těch, co splňují (1). Nerovnost (1) tedy dává jen první dva řádky vztahů (2). Tímto způsobem lze ale pokračovat dále, dokud nenarazíme na (podtržený) rozdíl, kde se neodečítá prvočíslu (srov. tabulku 1 pro $n = 5$).

Věta 1.5

Nechť $n > 2$ a nechť s je největší prvočíslu, pro něž $s < n$. Jestliže prvočíslu p splňuje

$$n! - s^2 < p < n! - 1, \tag{3}$$

pak $n! - p$ je také prvočíslu.

Důkaz lze provést zcela analogicky jako pro větu 1.3. Dodatečný předpoklad $n > 2$ pouze garantuje existenci prvočísla s .

Příklad 1.6

Ve větě 1.5 položíme $n = 7$. Pak $s^2 = 25$ a

$$\begin{aligned}
 7! &= 5040 = 5039 + 1 = 5023 + 17 = 5021 + 19 \\
 &= 5011 + 29 = 5009 + 31 = 5003 + 37 = 4999 + 41 = 4997 + 43 \\
 &= 4987 + 53 = 4973 + 67 = 4969 + 71 = 4967 + 73 = 4957 + 83 \\
 &= 4951 + 89 = 4943 + 97 = 4937 + 103 = 4933 + 107 = 4931 + 109 \\
 &= \underline{4919 + 11^2}.
 \end{aligned}$$

Všechny tyto součty prvočísel dávají stejné číslo $7! = 5040$. Opět dostáváme více po sobě jdoucích prvočísel p , než těch splňujících (3), pro něž $n! - p$ je prvočíslu, viz poslední dva sloupce tabulky 1 a poznámku 2.2.

\vdots
 $\cdot n! + r^2$
 $\}$ zde je každé prvočíslo p podle věty 1.3 takové, že $p - n!$ je též prvočíslo
 $\cdot n! + n$
 $\}$ zde nejsou žádná prvočísla podle lemmatu 1.1
 $\cdot n! + 1$ může být faktoriální prvočíslo
 $\cdot n!$
 $\cdot n! - 1$ může být faktoriální prvočíslo
 $\}$ zde nejsou žádná prvočísla podle lemmatu 1.2
 $\cdot n! - n$
 $\}$ zde je každé prvočíslo p podle věty 1.5 takové, že $n! - p$ je též prvočíslo
 $\cdot n! - s^2$
 \vdots
 $\cdot 3$
 $\cdot 2$
 $\cdot 1$

Obrázek 1. Rozložení prvočísel v okolí $n!$ pro $n > 2$.

n	N_1	N_2	N_3	N_4
2	2	2	–	–
3	6	6	1	1
4	6	7	2	6
5	9	14	1	10
6	7	7	2	10
7	12	17	2	17
8	8	15	3	10
9	11	18	3	4
10	7	11	5	8

Tabulka 1. Zde N_1 je počet prvočísel splňujících (1), N_2 je počet po sobě jdoucích prvočísel nad $n! + 1$, pro něž je $p - n!$ prvočíslo, N_3 je počet prvočísel splňujících (3), N_4 je počet po sobě jdoucích prvočísel pod $n! - 1$, pro něž je $n! - p$ prvočíslo, tj. $N_1 \leq N_2$ a $N_3 \leq N_4$.

2 Další příklady a otevřené problémy

Na obrázku 1 vidíme pozoruhodné rozložení prvočísel v okolí $n!$. Mohlo by se však stát, že otevřené intervaly $(n! + 1, n! + r^2)$ a $(n! - s^2, n! - 1)$ vystupující v (1) a (3) nebudou obsahovat žádné prvočíslo, i když žádný takový případ není znám.

Příklad 2.1

Tvrzení vět 1.3 a 1.5 pro $n = 2, 3, \dots, 10$ jsou shrnuty v tabulce 1.

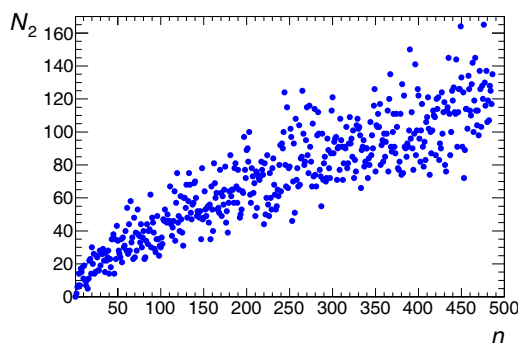
Pro hodnoty $n \leq 500$ jsme použili softwarový balík Maple. Zejména jsme se opírali o příkazy:

- `isprime` slouží k zjištění, zda je zadaný vstupní parametr prvočíslem,
- `nextprime` vrací hodnotu nejbližšího prvočísla většího než vstupní parametr,
- `ifactor` provádí rozklad vstupního parametru na prvočísla.

Numerické testy naznačují, že pokud \bar{p} je nejmenší prvočíslo větší než $n! + 1$, pro něž $\bar{p} - n!$ je složené, pak $\bar{p} - n!$ je vždy součinem dvou ne nutně různých prvočísel, srov. tabulku 2. Na obrázku 2 vidíme vzrůstající trend počtu po sobě jdoucích prvočísel p nad $n! + 1$, pro něž $p - n!$ je také prvočíslo.

n	N_1	N_2	$\bar{p} - n!$
10	7	11	$169 = 13^2$
50	27	34	$3\,481 = 59^2$
100	30	30	$10\,201 = 101^2$
150	37	48	$31\,133 = 163 \cdot 191$
200	54	89	$76\,729 = 277^2$
250	55	79	$88\,579 = 283 \cdot 313$
300	77	121	$176\,959 = 311 \cdot 569$
350	76	76	$124\,609 = 353^2$
400	85	122	$242\,321 = 443 \cdot 547$
450	95	133	$307\,297 = 487 \cdot 631$
500	95	105	$294\,319 = 521 \cdot 569$

Tabulka 2. Zde N_1 je počet prvočísel splňujících (1), N_2 je počet po sobě jdoucích prvočísel nad $n! + 1$, pro něž $p - n!$ je také prvočíslo a \bar{p} je nejmenší prvočíslo větší než $n! + 1$, pro které je $\bar{p} - n!$ složené.



Obrázek 2. Počet po sobě jdoucích prvočísel p nad $n! + 1$, pro něž $p - n!$ je také prvočíslo pro všechna $n \leq 486$.

Otevřeným problémem je, zda rozdíl $\bar{p} - n!$ z posledního sloupce tabulky 2 je vždy součinem dvou (ne nutně různých) prvočísel, která jsou větší než n .

Poznámka 2.2. Pokud horní odhad $n! + r^2$ vystupující v (1) je prvočíslo \tilde{p} , pak $N_1 = N_2$ v tabulce 1, protože rozdíl $\tilde{p} - n! = (n! + r^2) - n! = r^2$ je složený. Tudíž posloupnost po sobě jdoucích prvočísel p nad $n! + 1$, pro něž je $p - n!$ také prvočíslo, končí před $n! + r^2$. Například $2! + 3^2 = 11$, $3! + 5^2 = 31$ a $6! + 7^2 = 769$ jsou prvočísla, srov. tabulku 1 pro $n \in \{2, 3, 6\}$. Rovněž $100! + 101^2$ a $350! + 353^2$ jsou prvočísla, srov. tabulku 2 pro $n \in \{100, 350\}$. Dolní odhad $n! - s^2$ vystupující v (3) není nikdy prvočíslo, kromě triviálního případu $n = 3$. Protože $s \mid n!$, tak $s \mid (n! - s^2)$. Pro $n > 3$ tak je $N_3 < N_4$ v tabulce 1.

Je-li p nejmenší prvočíslo větší než $n! + 1$, pak podle [7, A037153] je $p - n!$ také prvočíslo pro všechna $n \leq 4003$ (viz též [7, A037151, A037155]). Dalším otevřeným problémem je, zda toto tvrzení platí pro všechna n . Zde je třeba mít na mysli tzv. silný zákon malých čísel (viz např. [1, 2]), kdy platnost některých zdánlivých zákonitostí je porušena pro větší n . Například v knize [3] se definuje x_n rekurentně takto:

$$x_0 = 1, \\ x_n = \frac{1}{n}(1 + x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{n-1}^3).$$

Tedy $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 1^3 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}(1 + 1^3 + 2^3) = 5$, $x_3 = \frac{1}{3}(1 + 1^3 + 2^3 + 5^3) = 45$ atd. Pak x_n je celé číslo pro $n \in \{0, 1, \dots, 88\}$, ale je necelé pro $n = 89$.

Nyní budeme modifikovat naše předchozí výsledky na jiné třídy čísel.

3 Prvočísla v okolí primoriálů

Nadále necht' q je libovolné pevně zvolené prvočíslo. Symbolem $q\#$ označme součin všech prvočísel nepřesahujících q , tj.

$$q\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot q \quad (4)$$

a $q\#$ se nazývá *primoriálem* q .

Klasický důkaz Eukleidovy věty o nekonečnosti prvočísel je veden sporem, viz [5]. Předpokládá se, že existuje jen konečný počet prvočísel a že největší z nich je q . Pak se vyšetřuje číslo $q\# + 1$, což vede ke sporu, protože $q\# + 1$ je buď nové prvočíslo, anebo $q\# + 1$ je složené a dělitelné prvočíslem větším než q . Z tohoto důvodu se prvočísla tvaru $q\# + 1$ nazývají *Eukleidova prvočísla*, viz [4]. Například

$$2\# + 1 = 3, \quad 3\# + 1 = 7, \quad 5\# + 1 = 31, \quad 7\# + 1 = 211, \quad 11\# + 1 = 2311$$

jsou Eukleidova prvočísla. Avšak ne každé číslo tohoto tvaru je prvočíslem, neboť

$$13\# + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 59 \cdot 509.$$

Poznamenejme, že $q\# + 1$ je Eukleidovo prvočíslo pouze pro

$$q = 2, 3, 5, 7, 11, 31, 379, \dots$$

Podobně můžeme vyšetřovat primoriální čísla tvaru $q\# - 1$, jež jsou prvočísly pro

$$q = 3, 5, 11, 13, 41, 89, 317, 337, 991, \dots$$

V tomto případě se nazývají *primoriální prvočísla*, srov. [6].

Lemma 3.1

Je-li $p > q\# + 1$ prvočíslo, pak $p > q\# + q$.

Důkaz. Tvrzení lemmatu plyne okamžitě z (4) a skutečnosti, že po sobě jdoucí čísla

$$q\# + 2, q\# + 3, \dots, q\# + q$$

jsou všechna složená. □

Podobně lze dokázat i následující lemma.

Lemma 3.2

Je-li $p < q\# - 1$ prvočíslo a $q > 3$, pak $p < q\# - q$.

Věta 3.3

Nechť $q < r$ jsou po sobě jdoucí prvočísla. Jestliže prvočíslo p splňuje nerovnosti

$$q\# + 1 < p < q\# + r^2, \tag{5}$$

pak $p - q\#$ je také prvočíslo.

Důkaz. Budeme postupovat analogicky jako v důkazu věty 1.3. Budiž p prvočíslo splňující (5). Předpokládejme naopak, že $p - q\#$ je složené. Pak existuje prvočíslo m a celé číslo $k \geq m$ tak, že

$$p - q\# = mk. \tag{6}$$

Odtud a z nerovnosti $p - q\# < r^2$ vyplývající z (5), vidíme, že $mk < r^2$, a tedy $m \leq q < r$. Protože $m \mid q\#$ a $m \mid (p - q\#)$ podle (6), zjistíme, že $m \mid p$, což je ve sporu s předpokladem, že p je prvočíslo a že $p > q\# + 1 > q \geq m$. □

Podobně lze dokázat i následující tvrzení.

Věta 3.4

Nechť $s < q$ jsou po sobě jdoucí prvočísla. Jestliže prvočíslo p splňuje nerovnosti

$$q\# - s^2 < p < q\# - 1, \quad (7)$$

pak $q\# - p$ je také prvočíslo.

Příklad 3.5

Abychom ilustrovali smysl lemmat 3.1 a 3.2 a také vět 3.3 a 3.4 položíme $q = 13$. Vidíme, že platí podobné pozoruhodné vlastnosti po sobě jdoucích prvočísel v okolí $q\# \pm 1$ podobně jako v příkladech 1.4 a 1.6, a to

$$\begin{aligned} 13\# &= 30030 = 30047 - 17 = 30059 - 29 = 30071 - 41 = 30089 - 59 \\ &= 30091 - 61 = 30097 - 67 = 30103 - 73 = 30109 - 79 = 30113 - 83 \\ &= 30119 - 89 = 30133 - 103 = 30137 - 107 = 30139 - 109 = 30161 - 131 \\ &= 30169 - 139 = 30181 - 151 = 30187 - 157 = 30197 - 167 = 30203 - 173 \\ &= 30211 - 181 = 30223 - 193 = 30241 - 211 = 30253 - 223 = 30259 - 229 \\ &= 30269 - 239 = 30271 - 241 = 30293 - 263 = 30307 - 277 = 30313 - 283 \\ &= \underline{30319 - 17^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13\# &= 30030 = 30029 + 1 = 30013 + 17 = 30011 + 19 = 29989 + 41 \\ 29983 + 47 &= 29959 + 71 = 29947 + 83 = 29927 + 103 = 29921 + 109 \\ &= 29917 + 113 = 29881 + 149 = 29879 + 151 = 29873 + 157 = 29867 + 163 \\ &= 29863 + 167 = 29851 + 179 = 29837 + 193 = 29833 + 197 = 29819 + 211 \\ &= 29803 + 227 = 29789 + 241 = 29761 + 269 = 29759 + 271 = 29753 + 277 \\ &= \underline{29741 + 17^2}. \end{aligned}$$

Obrázek 1 lze snadno modifikovat na prvočísla v okolí $q\#$. Rovněž tabulka 3 odpovídající těmto prvočíslům má podobný charakter jako tabulka 1.

Vezmeme-li v úvahu, že

$$4! < 5\# < 5! < 7\# < 6! < 11\# < 7! < 13\# < 8! < 17\# < 9! < 10! < 19\#,$$

pak vidíme, že čísla Q_i v jednotlivých sloupcích Q_i jsou obecně větší než N_i z tabulky 1, když $(n - 1)! < q\# < n!$.

q	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2	2	2	–	–
3	6	6	1	1
5	10	10	1	6
7	19	19	4	22
11	23	25	7	19
13	29	29	9	23
17	25	36	10	33
19	38	42	20	32

Tabulka 3. Zde Q_1 je počet prvočísel splňujících (5), Q_2 je počet po sobě jdoucích prvočísel nad $q\# + 1$, pro něž je $p - q\#$ prvočíslo, Q_3 je počet prvočísel splňujících (7), Q_4 je počet po sobě jdoucích prvočísel pod $q\# - 1$, pro něž je $q\# - p$ prvočíslo, kde $q > 2$, tj. $Q_1 \leq Q_2$ a $Q_3 \leq Q_4$.

Poznámka 3.6. Rozložení prvočísel je dosti nepravidelné. Věty 1.3, 1.5, 3.3 a 3.4 však implikují, že v okolí některých přirozených čísel rozložení prvočísel vykazuje jakýsi řád. Věty 3.3 a 3.4 lze navíc snadno modifikovat na případ, kdy $q\#$ je všude zaměněno za součin $i(q\#)$ pro libovolné pevné $i \in \mathbb{N}$. Například pro $i = 31$ a $q = 3$ máme $31 \cdot 6 = 186 = 191 - 5 = 193 - 7 = 197 - 11 = 199 - 13 = \underline{211 - 5^2}$.

Literatura – References

- [1] R. K. Guy: The strong law of small numbers, Amer. Math. Monthly 95 (1988), 697–712.
- [2] R. K. Guy: The second strong law of small numbers, Math. Mag. 63 (1990), 3–20.
- [3] R. K. Guy: Unsolved problems in number theory, second edition, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [4] M. Křížek, L. Somer: Euclidean primes have the minimum number of primitive roots, J. Algebra Number Theory Appl. 12 (2008), 121–127.
- [5] M. Křížek, L. Somer, A. Šolcová: Kouzlo čísel: Od velkých objevů k aplikacím, edice Galileo, sv. 39, Academia, Praha, 2018.
- [6] T. Özsari: Claims on primorial prime numbers, arXiv:math/0310412v1.
- [7] oeis.org

Poděkování: Autoři děkují Filipu Křížkovi za nakreslení obrázku 2 a anonymnímu recenzentovi za velice cenné připomínky. Článek byl podpořen RVO 67985840 České republiky.

Adresy autorů:

Fyzikální ústav AV ČR, Cukrovarnická 112/10, 162 00 Praha 6, Česká republika
 Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, Česká republika
 Department of Mathematics, Catholic University of America, Washington, D.C. 20064, U.S.A.
 e-mail: antonin.cejchan@centrum.cz, krizek@math.cas.cz, somer@cua.edu

Gaussovo (normální) rozdělení

Zdeněk Půlpán, Ondřej Slavíček

Abstract [Gaussian distribution]: In geodetic measurements, Gauss used the experience that the distribution of the measured quantities corresponds to the previously known bell curve to estimate the accuracy of the measurement. Here it is first shown how the analytical expression of such a curve can be easily obtained and then attention is drawn to some applications in technology, psychology and pedagogy.

Key words: Gaussian distribution, estimation of in-plane measurement accuracy, technical and psychological measurements.

Souhrn: Při geodetických měřeních Gauss používal k odhadu přesnosti měření zkušenost, že rozdělení naměřených veličin odpovídá již dříve známé zvonovité křivce. Zde je nejprve ukázáno, jak lze k analytickému vyjádření takové křivky snadno dojít a pak je upozorněno na některé aplikace v technice, v psychologii a pedagogice.

Klíčová slova: Gaussovo rozdělení, odhad přesnosti měření v rovině, technická a psychologická měření.

MESC: A30, B50, C70, D20, E10, F70.

Úvod

K. F. Gauss (1777–1855) byl sice „čistým“ matematikem, měl však i cit pro aplikace. Přispěl k pokroku v numerické matematice, v teorii elektromagnetismu i v geodézii (organizoval rozsáhlá geodetická měření). Již před Gaussem se typickou zvonovitou křivkou zabýval Francouz Abraham de Moivre (1667–1704). Gauss však pro tuto zvonovitou křivku odvodil v praxi použitelný vzorec a prozkoumal další její vlastnosti. Zvonovitá funkce se mu hodila pro odhad chyby při geodetických měřeních. Ukážeme, proč je uvedená křivka pro geodety (a nejen pro ně) tak důležitá a jaký je rozdíl v popisu chyby jednorozměrné od chyby dvourozměrné. Gaussovo rozdělení je limitním rozdělením pro mnohá jiná rozdělení a vyhovuje jistě extrémální podmínce pro Shannonovu neurčitost. P. S. Laplace (1749–1827) předvedl metodu výpočtu některých integrálů, souvisejících s onou zvonovitou křivkou. Proto se někdy Gaussovo rozdělení nazývá také Gauss-Laplaceovo.

1 Přesnost geodetických měření

Uvažujme o identifikaci bodu A v rovině se souřadnicemi x, y (viz obr. 1), kde počátek soustavy souřadné budeme mít v bodě O . Identifikace bodu A je závislá na náhodě a jeho souřadnice jsou hodnotami dvourozměrné náhodné veličiny (X, Y) . Předpokládejme, že měřená souřadnice x bodu A padne do intervalu $\langle x, x + \Delta x \rangle$ s pravděpodobností $f(x) \cdot \Delta x$, kde $f(x)$ je spojitá funkce hustoty pravděpodobnosti v intervalu $(-\infty; +\infty)$ se střední hodnotou v bodě 0 a také podobně i pro souřadnici y v intervalu $\langle y, y + \Delta y \rangle$ s pravděpodobností $f(y) \cdot \Delta y$, kde $f(y)$ je hustota pravděpodobnosti měřené veličiny Y také se střední hodnotou v bodě 0. Předpokládáme, že chyby ve směru souřadné osy x jsou nezávislé na chybách v ose y , pravděpodobnost určení bodu A ve vyšrafovaném diferenciálním obdélníku se stranami $\Delta x, \Delta y$ (viz obr. 1) je proto rovna součinu

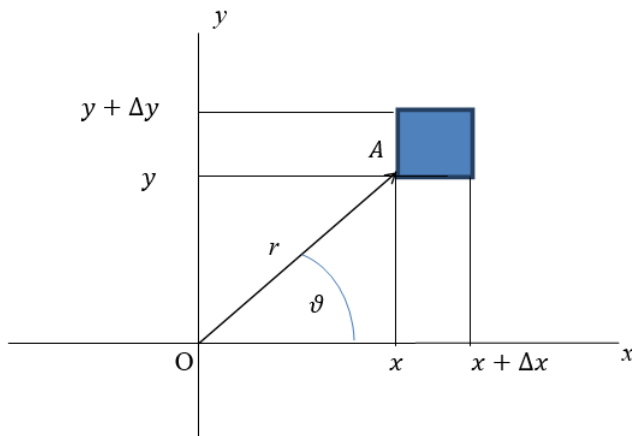
$$f(x) \cdot \Delta x \cdot f(y) \cdot \Delta y. \quad (1)$$

Protože předchozí pravděpodobnost nezávisí na směru (úhlu ϑ), ale pouze na vzdálenosti od bodu O , můžeme ji psát také pomocí funkce $g(r)$, kde r je vzdálenost bodu O od vyšrafovaného obdélníku:

$$g(r) \cdot \Delta x \cdot \Delta y. \quad (2)$$

Vztahy (1) a (2) vyjadřují tutéž pravděpodobnost, proto musí platit

$$g(r) = f(x) \cdot f(y). \quad (3)$$



Obrázek 1. Přesnost geodetických měření

Protože levá strana předchozího vztahu nezávisí na úhlu ϑ , pak derivováním dostaneme:

$$\frac{\partial g(r)}{\partial \vartheta} = 0 = f(x) \frac{\partial f(y)}{\partial \vartheta} + f(y) \frac{\partial f(x)}{\partial \vartheta}. \quad (4)$$

Užitím polárních souřadnic pro $r > 0, \vartheta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a jejich transformace na kartézské souřadnice x, y ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \vartheta \\ y &= r \cdot \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (5)$$

můžeme vztah (3) po derivaci podle úhlu ϑ přepsat nejdříve na

$$0 = f(x) \frac{\partial f(y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \vartheta} + f(y) \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \vartheta}, \quad (6)$$

a pak na

$$0 = f(x) \cdot f'(y) \cdot x + f(y) \cdot f'(x) \cdot (-y). \quad (7)$$

Pro $x \neq 0, y \neq 0, f(x) \neq 0, f(y) \neq 0$ dostáváme

$$\frac{f'(x)}{x \cdot f(x)} = \frac{f'(y)}{y \cdot f(y)}. \quad (8)$$

Protože jsou podle předpokladu identifikace bodu A veličiny X a Y nezávislé, předchozí vztah znamená, že obě části rovnosti (8) jsou rovny blíže neurčené konstantě K , tj.

$$\frac{f'(x)}{x \cdot f(x)} = K = \frac{f'(y)}{y \cdot f(y)}. \quad (9)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = K \cdot x, \quad (10)$$

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = K \cdot y.$$

Integrací předchozích vztahů (10) dostaneme

$$\ln f(x) = \frac{Kx^2}{2} + C, \text{ nebo také } f(x) = A \cdot e^{\frac{1}{2}Kx^2}, \text{ kde } A = e^C. \quad (11)$$

Předpokládáme-li, že větší chyby jsou méně pravděpodobné, musí být $K < 0$. Volíme proto konstantu $K = -2k^2, k > 0$. Takže máme

$$f(x) = Ae^{-k^2x^2}, f(y) = Ae^{-k^2y^2}. \quad (12)$$

Proto

$$g(r) = A^2 \cdot e^{-k^2(x^2+y^2)} = A^2 \cdot e^{-k^2r^2}. \quad (13)$$

Protože $g(r)$ je hustota pravděpodobnosti v polárních souřadnicích, musí platit

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} g(r) dr d\vartheta = 1. \quad (14)$$

Dosažením za hustotu $g(r)$ dostaneme normovací podmínku:

$$A^2 \cdot 2\pi \int_0^{+\infty} r \cdot e^{-k^2 r^2} dr = A^2 \cdot \pi \left[\frac{e^{-k^2 r^2}}{-k^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi A^2}{k^2} = 1 \quad (15)$$

a z toho pro A platí

$$A = \frac{k}{\sqrt{\pi}}. \quad (16)$$

Dostáváme tak normální (Gaussovo) rozdělení s hustotou

$$f(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-k^2 x^2}. \quad (17)$$

Pro Laplaceův integrál platí $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$. Proto musí být $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$). Normální rozdělení náhodné veličiny X tvaru

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

označujeme $N(0; 1)$ a nazýváme normovaným normálním rozdělením. Pro náhodnou veličinu se střední hodnotou $EX = \mu$ a rozptylem $DX = \sigma^2$ má hustota normálního (Gaussova) rozdělení tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (18)$$

a označujeme ho $N(\mu; \sigma^2)$.

Jako důležité se ukazuje normální rozdělení v souvislosti ve statistice velmi užívané Lindeberg – Lévyho věty, která říká, že součet vzájemně nezávislých náhodných veličin, které jsou stejně distribuovány (rozděleny) s konečnou střední hodnotou a konečným rozptylem, má pro dosti velký počet měření přibližně normální rozdělení.

Měříme-li náhodnou veličinu X , zjistíme v i -tém měření hodnotu $X_i = x_i$, kterou si můžeme v mnoha případech představit jako součet správné hodnoty X_p a chyby ϵ_i , tedy $X_i = X_p + \epsilon_i$. Předpokládáme-li, že pravděpodobnost určité kladné chyby je stejná jako záporné (s toutéž absolutní hodnotou), musí být střední hodnota chyby

$E\epsilon_i = 0$. Dále můžeme v nevelkém rozsahu měřených hodnot předpokládat konstantnost rozptylu chyby měření (nezávislost na i), tedy $DX_i = D\epsilon_i = \sigma^2$. Jsou-li jednotlivá měření na sobě nezávislá a i navíc se stejným rozdělením s konečnou střední hodnotou a konečným rozptylem, pak podle věty Lindeberg - Lévy-ho má $\sum_{i=1}^n (X_i - X_p) \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \epsilon_i$ pro $n \rightarrow \infty$ normované normální rozdělení $N(0; 1)$. Důležité je, že limitní přechod k normálnímu rozdělení je pro velkou třídu rozdělení dosti rychlý (například pro binomická rozdělení s parametry n, p pro běžnou potřebu stačí, že $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$).

Při současném měření dvou vzájemně nezávislých veličin X, Y bude-li v prvním rozměru pro meze $x, x + dx$ pravděpodobnost rovna $f_1(x)dx$, v druhém pro meze $y, y + dy$ pravděpodobnost rovna $f_2(y)dy$, pak pro pravděpodobnost, že výsledek měření bude ve čtverci s vrcholy v bodech $(x, y), (x, x + dx), (x + dx, y + dy), (x, y + dy)$, musí platit $f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot dx dy$. Je-li rozdělení obou veličin normální, první s rozdělením $N(\mu_x; \sigma_x^2)$, druhé s rozdělením $N(\mu_y; \sigma_y^2)$, pak

$$f_1(x) \cdot f_2(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Tam, kde je hustota konstantní, musí být $\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = t^2$, kde $t > 0$ je konstanta. Množina všech bodů, které splňují předchozí rovnici, je elipsa o poloosách $t\sigma_x, t\sigma_y$. Snadno určíme pravděpodobnost, že chyba bude ležet v intervalu eliptického prstence v mezích poloos $t\sigma_x, (t + dt)\sigma_x$ a $t\sigma_y, (t + dt)\sigma_y$. Tato pravděpodobnost bude součinem plochy diferenciálního prstence, příslušného změně proměnné t o dt a pravděpodobnosti

$$\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Protože plocha elipsy je $F = \pi ab = \pi\sigma_x\sigma_y t^2$, je $dF = 2\pi\sigma_x\sigma_y t \cdot dt$. Pak ale bude pravděpodobnost, že chyba bude ležet v ploše diferenciálního prstence rovna

$$P_t^{t+dt} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot 2\pi\sigma_x\sigma_y t \cdot dt = t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt.$$

Pro dvojrozměrnou chybu je pro obvod elipsy hustota $f(t)$ podle předchozího výsledku daná vztahem

$$f(t) = t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (19)$$

Vztah (19) se liší od vztahu (17), resp. (18), pro chybu jednorozměrnou. U dvojrozměrných chyb neexistují chyby záporné, graf hustoty je asymetrický, jak je možné se snadno přesvědčit.

2 Metoda nejmenších čtverců (MNČ)

Je také Gaussovou zásluhou, že se od roku 1795 začala používat MNČ (Gauss ji použil pro eliminaci chyb geodetického vyměřování).

Mějme n -krát nezávisle opakované měření veličiny X jehož výsledkem jsou hodnoty x_1, x_2, \dots, x_n . Přitom správná hodnota není známa, označme ji x . Odhadem jediné hodnoty, která by mohla zastupovat správnou hodnotu, Gauss stanovil takové číslo x_0 , pro něž je součet čtverců odchylek $Q = Q(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2$ minimální. Minimum lze zde najít derivováním, když derivaci dQ/dx položíme rovnou nule:

$$\frac{dQ}{dx} = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - x) = 0.$$

Z předchozího výrazu dostaneme pro x_0 výpočet $x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$. Že se jedná skutečně o minimum, plyne z toho, že $\frac{d^2Q}{dx^2} = -2 \sum_{i=1}^n (-1) = 2n > 0$.

Uvažované měření, při kterém jsme získali n hodnot, lze tedy zastupovat za určitých podmínek hodnotou jedinou, která je ve smyslu metody nejmenších čtverců aritmetickým průměrem \bar{x} . Ten zastupuje střední hodnotu veličiny X . Nyní předpokládejme, že měříme veličinu X , která má normální rozdělení $N(\mu; \sigma^2)$ s neznámými parametry μ, σ^2 . Budeme nyní hledat takové odhady parametrů μ a σ^2 , které maximalizují součin

$$L = L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

(Hodnota L odpovídá hustotě n -rozměrného měření jehož výsledek je (x_1, x_2, \dots, x_n) za daného předpokladu.)

Maximu L odpovídá maximum $\ln L$ a opět použijeme derivování. Protože v tomto případě je L funkcí dvou proměnných, použijeme parciálních derivací:

$$\ln L = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0.$$

Z první derivace dostaneme známý odhad $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$, z druhé odhad pro parametr σ^2 ve tvaru $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = s_n^2$.

Odhad metodou maximální věrohodnosti L (funkce L se nazývá věrohodnostní funkce) pro normálně rozdělenou náhodnou veličinu vede k odhadu metodou nejmenších čtverců; jejím jedním výsledkem je výběrový rozptyl s_n^2 . (Odhad momentovou metodou vede k odhadu rozptylu ve tvaru $s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. Jeho výhodou je, že je nestranný, pro střední hodnotu je $ES_{n-1}^2 = \sigma^2$ na rozdíl od odhadu s_n^2 , pro který platí $ES_n^2 = E \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2$, který je pouze asymptoticky nestranný.)

3 Aplikace v psychologii

Pomocí normálního rozdělení nemodelujeme jen rozdělení chyb technických měření. Ukazuje se také (experimentálně to bylo potvrzeno), že toto rozdělení popisuje i biologickou variabilitu. Od 19. století se předpokládalo, že většina přímo měřených veličin jakéhokoliv původu má toto rozdělení (odtud také jeho název „normální“). Sem například patřilo rozdělení lidí podle výšky, hmotnosti či některých částí lebky či jiných kostí. Histogramy mnoha takových měření měly tvar, podobající se typické zvonovité křivce. Na tomto základě se předpokládalo, že i řada psychologických měření má v populaci normální rozdělení odhadovaných vlastností, například lidských schopností. Podle toho se v psychologii vytvářely dotazníky, které měly charakterizovat testovaného v reakčních schopnostech, odolnosti vůči stresu, úroveň jeho únavy po určité zátěži, numerické zručnosti, prostorové představivosti, atd. Výsledky všech takových šetření měly být také normálně rozděleny (tj. v tehdejší pojetí měly mít histogramy všech takových měření zvonovitý tvar). Ti, kteří v testech vybraných schopností uspěli s výsledkem nadprůměrným, byli označováni jako „nadprůměrně inteligentní“, příslušné dotazníky pak jako „testy inteligence“. První test inteligence vytvořil na začátku 20. století A. Binet (1857–1911). Testy inteligence se lišily svým obsahem (dotazníkovými položkami), proto každý měřil něco jiného, věřilo se však tomu, že změna dotazníkových položek nemá zásadní vliv na výsledek dotazníku. Původně inteligenční kvocient IQ znamenal podíl mentálního věku a chronologického věku vynásobený 100. Mentální věk se určoval pomocí dotazníku, kdy respondent jeho vyřešením se zařadil mezi referenční populaci se stejným výkonem určitého chronologického věku. Takto na jednorozměrné a spojitě stupnici byla populace pomocí určitého dotazníku klasifikována (například populace branců). Teprve později stupnice pro měření inteligence pomocí dotazníku (testu) byla více propojena se statistikou (a příslušným dotazníkem). To je spojeno se jmény Ch. Spearmana, R. Cattella, L. L. Thurstona a P. Guilforda. Ukážeme si princip metody.

Mějme dotazník s celkem n položkami (otázkami, úkoly, ...), které jsou homogenní v tom smyslu, že na každou z nich bude respondent odpovídat správně s pravděpodobností p . O pravděpodobnosti p se předpokládá, že je určitou mírou inteligence respondenta. Odpoví-li respondent na k dotazníkových položek správně a lze-li ještě předpokládat, že položky jsou nezávislé, můžeme si výsledný skór představit jako součet n nezávislých náhodných veličin X_i s alternativním rozdělením ($X_i = 1$ když respondent odpověděl na i -tou položku správně s pravděpodobností p , $X_i = 0$ když odpověděl špatně s pravděpodobností $1 - p$), kde

$$\begin{aligned} EX_i &= 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p, \\ DX_i &= EX_i^2 - (EX_i)^2 = p - p^2 = p(1 - p). \end{aligned} \quad (20)$$

Veličina $X = \sum_{i=1}^n X_i$, představující celkový počet správně zodpovězených položek, má pak binomické rozdělení a platí

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \quad (21)$$

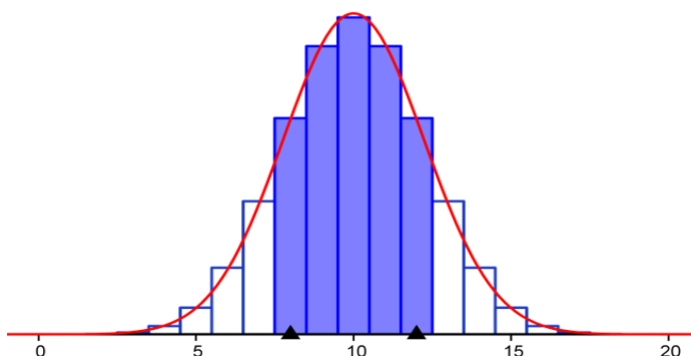
Můžeme-li ještě předpokládat, že $0,1 < p < 0,9$ a počet dotazníkových položek je velký ($n > 30$), lze náhodnou veličinu X aproximovat normálním rozdělením prostřednictvím Moivreovy – Laplaceovy věty

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq k|p) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) \\ &\sim \Phi \left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) = \int_{-\infty}^{\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt = P(k|p). \end{aligned} \quad (22)$$

(Přitom jsme označili $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$.)

Diskrétní binomické rozdělení se zde aproximuje spojitým normálním rozdělením tak, že když například $P(k|p) = 0,5$, pak IQ = 100, když $P(k|p) = 0,25$, pak IQ = 50, obecně IQ = $2 \cdot P(k|p) \cdot 100$. Stupnice pro IQ je tedy nerovnoměrná (viz Obr. 2) vzhledem ke k .

Parametr p můžeme z experimentu odhadnout hodnotou $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{X}{n}$ (za předpokladu statistické nezávislosti a stejné obtížnosti p všech dotazníkových položek). Pro účely aproximace binomického rozdělení rozdělením normálním, které jsme nastínily, je lepší odhadovat přímo střední hodnotu np , resp. směrodatnou odchylku binomického rozdělení $\sqrt{np(1-p)}$ do vztahu (22) pro funkci $\Phi(x)$ (jejíž hodnoty pro každé normované x jsou tabelovány) z empirické střední hodnoty, resp. empirické



Obrázek 2. Vztah binomického rozdělení s parametry $n = 20$ a $p = 0,5$ a rozdělení normálního se střední hodnotou 10 a rozptylem 5. Tmavěji označená plocha je mírou pravděpodobnosti $P(8 \leq X \leq 12)$ binomické náhodné veličiny, plocha pod grafem normálního rozdělení mezi vyznačenými trojúhelníky na ose x je mírou jejího odhadu.

směrodatné odchylky měřené veličiny X . Zkušenost ukázala, že ne každý dotazník měl v uvažované populaci normálně rozdělené výsledky (které byly počtem pozitivně zodpovězených dotazníkových položek). Usuzovalo se, že příčinou jsou nedostatky v obsahu a konstrukci dotazníku. Snaha byla co nejlépe vyhovět podmínkám Moivreovy – Laplaceovy věty. Pro praktické používání dotazníku jako měrného prostředku s aspoň přibližně normálně rozdělenými výsledky je obtížné, a proti účelu dotazování, konstruovat položky tak, aby jich bylo dostatečné množství a přitom všechny měly stejnou obtížnost. Statistickou nezávislost položek je také obtížné splnit (je rovněž komplikované uvedené předpoklady statisticky ověřovat, i slabá statistická závislost položek má na celkový výsledek dotazníku velký vliv). Přitom psychologové trvali v některých šetřeních (např. v testech inteligence) na tom, aby výsledky dotazníku byly v populaci normálně rozloženy (podobně jako je to v technických měřeních) a mohlo se tak používat statistické interpretace výsledků podobně jako v technice. Tak byl zaveden *psychometrický postulát* o potřebě konstruovat některé dotazníky (speciálně testy inteligence) tak, aby výsledky v populaci, pro kterou byl dotazník určen, byly normálně rozdělené. Každý takový dotazník (zvláště měl-li měřit inteligenci) se proto musel nejprve na výběrovém reprezentativním souboru respondentů kalibrovat. To znamená, nejen to, že z pokusů na vybraném reprezentativním souboru respondentů se pro určitý dotazník (který má zde funkci „metru“) odhadnou parametry pro normální rozdělení pomocí výběrové střední hodnoty a výběrového rozptylu z empirických počtů správně zodpovězených položek jednotlivých respondentů (tj. empiricky odhadované veličiny X), ale hlavně to, že se musí vhodně měnit nebo upravovat počet dotazníkových položek. Dotazník měl mít dostatečný počet položek

a doba jeho řešení respondenty nemohla být příliš krátká (vyplňování takového dotazníku někdy mělo trvat respondentu i několik hodin). A priori nelze předpokládat (nejsou pro to ani formální důvody statistické), že psychický výkon, měřený dotazníkem (např. testem inteligence) má v populaci normální rozdělení. Normalita výsledků byla tedy kalibrací příslušnému dotazníku (testu inteligence) vnucena záměrně volbou určitých položek i formou. Pro psychometrická měření tedy neplatilo to, co pro velkou třídu měření fyzikálních. Psychometrický dotazník je originálním měřicím prostředkem a měření pomocí něho závisí na tom, co a jak bylo do něho autorem dotazníku vloženo. Neuniverzálnost měřícího prostředku (dotazníku) znamená, že měření podle různých dotazníků *nemusi být* s hlediska významu (interpretace) vzájemně porovnatelná. Přímá měření fyzikální se realizují univerzálním prostředkem (např. metrem) a velmi často jejich výsledkem je normálně rozdělená náhodná veličina s jednoznačným významem (je to vždy když měření je výsledkem působení součtu nezávislých, stejně rozdělených náhodných chyb s konečnou střední hodnotou a konečným rozptylem).

Výsledek X (chápaný jako počet správně označených dotazníkových položek) a interpretace dotazníkového šetření jsou závislé na obsahu dotazníku (ale i konstrukci a způsobu zadávání, proto se příprava takového dotazníku postupně stávala komplikovaným úkolem) místo pouze na osobnosti. Krom toho zkoumaný jedinec je komplikovaný i ve vztahu k aktu dotazování a měřené psychické vlastnosti jsou ve své podstatě složité a měření by mělo být spíše vícerozměrné povahy (má několik psychologicky vymezených dimenzí). Zde pomohla i faktorová nebo shluková analýza a i jiné statistické techniky. V dnešní době je také zpochybňováno měření inteligence jako aproximace jistých spojitých latentních veličin (některé vlastnosti člověka nemusí být měřitelné na spojitě stupnici a mění se v čase, a to skokem, příkladem je situace, označovaná jako „vhled“, problémem je, že tato měření jsou v podstatě nepřímá, určitou proměnnou měříme prostřednictvím jiných, jí ovlivňovaných proměnných).

Ještě obtížnější je zjišťování *znalosti* (něčeho) pomocí dotazníku (vědomostní dotazník velmi často je jen jednorázovou akcí a jeho dlouhodobější příprava se podceňuje). Podceňuje se dosud i představa znalosti jako vícerozměrné veličiny (psychologové již na to přišli).

4 Jedna z fyzikálních aplikací

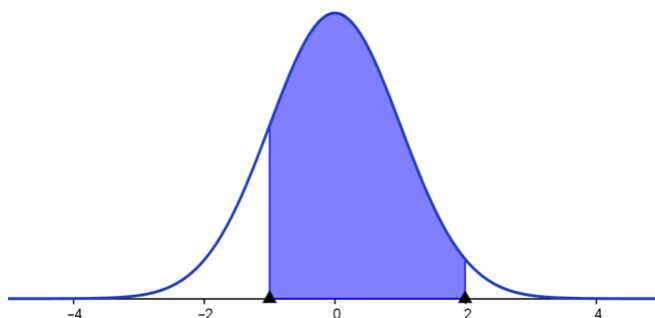
Uvažujme jiný příklad. Máme-li jednorozměrnou verzi fyzikům známé difuzní rovnice popisující difuzi fyzikální veličiny $u(x, t)$ v množině reálných čísel x (obvyčně

značí polohu) a t (obvyčejně značí čas) ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (23)$$

s počáteční podmínkou $u(x, 0) = \delta(x)$, kde δ je Diracova funkce (ta má nulové hodnoty všude, kromě $x = 0$ a její integrál přes všechna x je jedna), pak její řešení je pro každé pevné t funkce typu (17):

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (24)$$



Obrázek 3. Graf normovaného normálního rozdělení (se střední hodnotou 0 a rozptylem 1); vybarvená část představuje pravděpodobnost, že gaussovska (normálně rozdělená) náhodná veličina bude mít hodnotu mezi $-0,5$ a 2 (plocha pod grafem omezená zdola osou x má velikost 1).

Kdy nabývá entropie své maximální hodnoty?

V práci [4] jsme definovali (krom jiného) i Shannonovu entropii pro charakterizaci neurčitosti rozhodování v pravděpodobnostním prostoru $[\Omega; A_\Omega; P]$ s konečným základním prostorem Ω .

Mějme náhodnou veličinu X s diskrétním rozložením na množině $\Omega = \{x_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ s pravděpodobnostní funkcí $P(X = x_i) = p_i, 0 \leq p_i \leq 1; i = 1, 2, \dots, n; \sum_i p_i = 1$. Entropií náhodné veličiny X nazýváme hodnotu výrazu

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \text{ [bit]} \quad (\text{klademe } 0 \cdot \log_2 0 = 0) \quad (25)$$

Entropie náhodné veličiny X je míra neurčitosti apriorní identifikace její polohy na číselné ose při libovolné realizaci.

Pro $H(X)$ pak platí $0 \leq H(X) \leq \log_2 n$, největší hodnota $H(X)$ přísluší rozdělení rovnoměrnému s pravděpodobnostní funkcí $p_i = \frac{1}{n}$, nejmenší hodnota entropie přísluší náhodné veličině s rozdělením u něhož pro jednu hodnotu, např. x_j , je $p_j = 1$ (pro zbývající hodnoty x_i je pak $p_i = 0$). Důkaz tohoto tvrzení vyplývá z následujících úvah:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} = - \log_2 \frac{1}{n} = \log_2 n. \quad (26)$$

Typ rozdělení náhodné veličiny X při maximální hodnotě entropie $H(X)$ najdeme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce L má tvar

$$L(p_1, p_2, \dots, p_n, \lambda) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right), \quad (27)$$

a když její derivace podle všech proměnných položíme rovny nule

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = - \log_2 p_i - \frac{1}{\ln 2} + \lambda = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n p_i - 1 = 0, \quad (28)$$

dostaneme, že extrémní hodnoty nabývá entropie pro $p_i = \frac{1}{n}$. V našem případě je touto extrémní hodnotou maximum $H(X) = \log_2 n$.

Pro případ spojitého rozdělení náhodné veličiny X (na pravděpodobnostním prostoru s $\Omega = (-\infty; +\infty)$ a systémem borelovských podmnožin A_Ω) s hustotou $f(x) \geq 0$, definovanou pro $x \in \langle a; b \rangle$, $\int_a^b f(x) dx = 1$ kde a, b jsou reálná čísla, určíme entropii $H(X)$ vztahem

$$H(X) = - \int_a^b f(x) \cdot \log_2 f(x) dx. \quad (29)$$

Pro takto definovanou entropii pak platí nerovnost $0 \leq H(X) \leq \log_2 (b - a)$ a maximální hodnoty je dosaženo pro rovnoměrné rozložení na intervalu $\langle a; b \rangle$. To můžeme ukázat následujícím postupem.

Nejdříve si všimneme, že pro speciální volbu $f(x) = \frac{1}{b-a}$ pro $x \in \langle a; b \rangle$ dostaneme $H(X)$ ve tvaru

$$- \int_a^b \frac{1}{b-a} \log_2 \frac{1}{b-a} dx = \log_2 (b - a). \quad (30)$$

Nyní řešíme extrémní úlohu: hledáme hustotu $f(x)$ definovanou na $\langle a; b \rangle$ takovou, aby pro ni integrál $-\int_a^b f(x) \cdot \log_2 f(x) dx$ nabýval maximální hodnoty za omezu-jících podmínek $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x) dx = 1$. Sestrojíme opět Lagrangeovu funkci

$L(f, \lambda)$ ve tvaru

$$L(f, \lambda) = -\frac{f \cdot \ln f}{\ln 2} + \lambda \cdot f, \quad (31)$$

odtud dostáváme podmínku

$$\frac{\partial L}{\partial f} = -\frac{\ln f}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + \lambda = 0, \quad (32)$$

a z ní

$$\ln f = \lambda \cdot \ln 2 - 1, \quad (33)$$

tedy

$$f = e^{\lambda \cdot \ln 2 - 1} > 0. \quad (34)$$

Dále pak je

$$\frac{\partial^2 L}{\partial f^2} = -\frac{1}{f \cdot \ln 2} = -\frac{1}{\ln 2 \cdot e^{\lambda \cdot \ln 2 - 1}} < 0, \quad (35)$$

proto maxima se dosahuje pro funkci nezávislou na x ve tvaru $f(x) = e^{\lambda \cdot \ln 2 - 1}$. Z toho, že f má být hustota pravděpodobnosti však plyne, že $e^{\lambda \cdot \ln 2 - 1} = \frac{1}{b-a}$, a tedy funkcionál $H(X)$ nabývá svého maxima pro funkci $f(x) = \frac{1}{b-a}$. Dokázali jsme tedy, že hodnota $\log_2(b-a)$ udává maximální entropii pro hustotu $f(x) = \frac{1}{b-a}$.

Nyní ukážeme, že maximální hodnoty entropie

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{-\infty} f(x) \cdot \log_2 f(x) dx$$

pro spojitou náhodnou veličinu X s hustotou $f(x) \geq 0$ na intervalu $(-\infty; +\infty)$ se střední hodnotou $EX = \mu$ a rozptylem $DX = \sigma^2$ dosahuje normálně rozložená náhodná veličina právě s uvedenými parametry.

Opět sestrojíme Lagrangeovu funkci, tentokrát pro tři druhy vazeb:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \mu, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \sigma^2 + \mu^2. \quad (36)$$

Ta je ve tvaru

$$L(f, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -\frac{f \cdot \ln f}{\ln 2} + \lambda_1 \cdot f + \lambda_2 \cdot x \cdot f + \lambda_3 \cdot x^2 \cdot f. \quad (37)$$

Derivováním L podle f a položením této derivace nule dostaneme

$$\frac{\partial L}{\partial f} = -\frac{\ln f}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + \lambda_1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 = 0, \quad (38)$$

$$f(x) = e^{1 + (\lambda_1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2) \ln 2} = K \cdot e^{ax^2 + bx + c}.$$

Dosažením předchozího vztahu do tří vazbových podmínek dostaneme výsledný tvar, odpovídající hustotě normálního rozdělení:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (39)$$

Závěr

Snažili jsme se ukázat, že normální rozdělení je nejdůležitějším typem rozdělení náhodné veličiny (je limitním pro řadu jiných rozdělení, zmínili jsme se o binomickém rozdělení), uplatňuje se nejen v teorii pravděpodobnosti a statistice (zvláště v teorii měření), ale také je podstatou i některých teorií fyzikálních a psychologických. Nezmiňovali jsme se o některých teoriích biologických, kde podstatou je náhoda (například množení, růst, ...), která má svůj vnější projev v normálním rozdělení některých biologických veličin (je původcem tzv. biologické variability).

L i t e r a t u r a – R e f e r e n c e s

- [1] Hamming, R., W.: *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, Mc Graw–Hill, New York 1962.
- [2] Mareš, M. : *Příběhy matematiky*, Pistorius, 2. vydání, Příbram 2013.
- [3] Britton, Nicholas, F.: *Essential Mathematical Biology*, Springer – Verlag London Limited 2003, University of Bath, Bath BA2 7AY, UK, 3rd printing 2005.
- [4] Půlpán, Z.: Neurčitosti pro fuzzy množiny a intuicionistické fuzzy množiny *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, č. 4/2021(50), str.9 – 19.
- [5] Guilford, J. P.: *Psychometrics methods*, McGraw-Hill, New York, 1936.
- [6] Půlpán, Z.: *Odhad informace z dat vágní povahy*, ed. Gerstner, Academia, Praha 2012.
- [7] Rao, C. R.: *Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace*, Academia, Praha 1978.

Adresy autorů:

Dopravní fakulta Jana Pernera, Univerzita Pardubice, Studentská 95, 532 10 Pardubice

e-mail: zdenek.pulpan@upce.cz, ondrej.slavicek@upce.cz

Zadania úloh

72. ročníka Matematickej olympiády

Kategória A

Úloha A-I-1. (*Jaroslav Švrček*) V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 2x + \lfloor y \rfloor &= 2022, \\ 3y + \lfloor 2x \rfloor &= 2023. \end{aligned}$$

($\lfloor a \rfloor$ označuje *dolnú celú časť* reálneho čísla a , t. j. najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako a . Napr. $\lfloor 1,9 \rfloor = 1$ a $\lfloor -1,1 \rfloor = -2$.)

Úloha A-I-2. (*Patrik Bak*) Daný je ostrouhlý trojuholník ABC . Na polpriamkach opačných k CA a BA ležia postupne body D a E tak, že $|DC| = |AB|$ a $|EB| = |AC|$. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku ADE leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC .

Úloha A-I-3. (*Josef Tkadlec*) Pre dané kladné celé číslo n uvažujme obdĺžnikový hrací plán $2n \times 2$ a na ňom $2n$ žetónov očíslovaných $1, 2, \dots, 2n$ a rozmiestnených ako na obrázku vľavo. V jednom ťahu je možné posunúť jeden žetón z jeho políčka na políčko susediace stranou, pokiaľ je prázdne.¹ Najmenej koľkými ťahmi možno z pôvodného rozostavenia získať rozostavenie na obrázku vpravo?



Úloha A-I-4. (*Martin Melicher*) Sú dané dve nepárne prirodzené čísla k a n . Martin pre každé dve prirodzené čísla i, j spĺňajúce $1 \leq i \leq k$ a $1 \leq j \leq n$ napísal na tabuľu zlomok i/j . Určte medián všetkých týchto zlomkov, t. j. také reálne číslo q , že ak všetky zlomky na tabuli zoradíme podľa hodnoty od najmenej po najväčšiu (zlomky s rovnakou hodnotou v ľubovoľnom poradí), uprostred tohto zoznamu bude zlomok s hodnotou q .

¹Hru si môžete vyskúšať na <https://skmo.sk/72a3>.

Úloha A-I-5. (*Josef Tkadlec*) Daný je ostrouhlý rôznostranný trojuholník ABC . Os vnútorného uhla pri vrchole A a osi strán AB , AC vymedzujú trojuholník. Dokážte, že priesečník jeho výšok leží na ťažnici z vrcholu A .

Úloha A-I-6. (*Martin Melicher*) Uvažujme postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanú nasledovne:

- $a_1 = 3$;
- ak $n \geq 2$, tak $a_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} - 1$.

Dokážte, že existuje

- a) nekonečne veľa prvočísel deliacich aspoň jeden člen tejto postupnosti;
- b) nekonečne veľa prvočísel nedeliacich žiadny člen tejto postupnosti.

Kategória B

Úloha B-I-1. (*Patrik Bak*) Na tabuľu napíšeme desať navzájom rôznych kladných celých čísel. V každom kroku najskôr podčiarkneme každé číslo, ktoré nie je súčtom žiadnych dvoch rôznych čísel napísaných na tabuľi, a potom všetky podčiarknuté čísla zotrieme.

- a) Dokážte, že pre ľubovoľných desať napísaných čísel zostane po konečnom počte krokov tabuľa prázdna.
- b) Určte najväčší počet krokov, po ktorých vykonaní ešte nemusí zostať tabuľa prázdna. Uveďte príklad desiatich čísel, pre ktoré tento počet dosiahneme.

Úloha B-I-2. (*Jaromír Šimša*) Označme M počet všetkých možných vyplnení tabuľky 3×3 navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9. Ďalej označme N počet takýchto vyplnení, kde sú navyše súčty všetkých čísel v každom riadku aj stĺpci nepárne čísla. Určte hodnotu $N : M$.

Úloha B-I-3. (*Jaroslav Švrček*) Určte všetky dvojice reálnych čísel (a, b) , pre ktoré majú kvadratické trojčleny $P(x)$ a $Q(x)$, pričom $P(x) = x^2 + ax + b$ a $Q(x) = x^2 + bx + a$, nasledujúcu vlastnosť: Každá z rovníc

$$\begin{aligned} aP(x) + bQ(x) &= 0, \\ aQ(x) + bP(x) &= 0 \end{aligned}$$

je kvadratická rovnica s dvojnásobným koreňom.

Úloha B-I-4. (*Patrik Bak*) V konvexnom päťuholníku $ABCDE$ platí $BC \parallel DE$, $CD \parallel AE$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE|$ a $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$. Dokážte, že $|CD| = |DE|$.

Úloha B-I-5. (*Josef Tkadlec*) Skúmajte trojice (a, b, c) kladných celých čísel spĺňajúcich podmienku $ab = c^2$.

- Pre každé prvočíslo p uveďte príklad trojice (a, b, c) , pre ktorú platí $a + b - 2c = p$.
- Dokážte, že pre každú trojicu (a, b, c) je $a + b + 2c$ zložené číslo.

Úloha B-I-6. (*David Hruška*) Daný je trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole B . Označme I stred kružnice jemu vpísanej, M stred prepony AC a X priesečník priamky IM s priamkou BC . Dokážte, že ak ležia body B, I, M, C na jednej kružnici, tak trojuholník ABX je rovnoramenný.

Kategória C

Úloha C-I-1. (*Jaroslav Zhouf*) Koľko z 2002 zlomkov

$$\frac{0}{2022}, \frac{1}{2021}, \frac{2}{2020}, \dots, \frac{2021}{1}$$

má celočíselnú hodnotu?

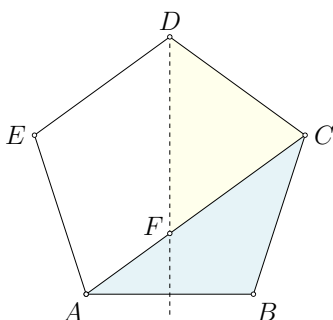
Úloha C-I-2. (*Josef Tkadlec*) Žiačka má z päťminútoviek priemer známok presne 1,12. Dokážte, že z nich má aspoň 22 jednotiek. (Možné známky sú 1, 2, 3, 4, 5.)

Úloha C-I-3. (*Patrik Bak, Eliška Macáková*) V trojuholníku ABC označme M stred strany AB , N stred strany AC a P stred úsečky MN . Dokážte, že ak $|MN| = |AP|$, tak $BP \perp CP$.

Úloha C-I-4. (*Radek Horenský*) Hráme nasledujúcu hru. Na začiatku je na stole k kôpok, na ktorých je postupne 1, 2, 3, ..., k žetónov. V každom ťahu vyberieme ľubovoľné dve kôpky a odstránime z oboch rovnaký počet žetónov. Naším cieľom je, aby na stole zostal jediný žetón. Môže sa nám to podariť, ak

- $k = 10$,
- $k = 11$?

Úloha C-I-5. (*David Hruška*) Nech $ABCDE$ je pravidelný päťuholník. Priesečník uhlopriečky AC s osou strany AB označme F (pozri obrázok). Dokážte, že trojuholníky ABC a CDF majú rovnaký obsah.



Úloha C-I-6. (*Ján Mazák*) Určte najväčšie prirodzené číslo n také, že $n \geq 10$ a pre ľubovoľných 10 rôznych čísel z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ platí nasledujúce tvrdenie: Ak nie je ani jedno z týchto 10 čísel prvočíslo, tak je súčet niektorých dvoch z nich prvočíslo.

Za Slovenskú komisiu Matematickej olympiády spracoval Stanislav Krajčí
e-mail: stanislav.krajci@upjs.sk

Kompetencie žiakov a ich rozvoj v kontexte témy Základy fyziky mikrosveta

Simona Gorčáková

Abstract: The fundamentals of microworld physics are one of the topics that figure in the objective requirements for the knowledge and skills of a high school graduate in physics. As the objective requirements contain both a content and a performance standard that goes beyond the current innovated state education program, the preparation of high school graduates in physics requires, in addition to the valid physics textbooks, material reflecting these requirements. The aim of this paper is to present the material created for this topic. A case study focused on working with this material is also included.

Key words: methodological materials, fundamentals of microworld physics

Súhrn: Základy fyziky mikrosveta je jedna z tém, ktoré figurujú v cieľových požiadavkách na vedomosti a zručnosti maturanta z fyziky. Keďže cieľové požiadavky obsahujú obsahový aj výkonový štandard, ktorý je nad rámec platného inovovaného štátneho vzdelávacieho programu, príprava maturantov z fyziky vyžaduje okrem platných učebníc fyziky aj materiál reflektujúci tieto požiadavky. Cieľom tohoto príspevku je predstaviť materiál vytvorený k tejto téme. Rovnako je súčasťou aj prípadová štúdia zameraná na prácu s týmto materiálom.

Kľúčové slová: metodické materiály, základy fyziky mikrosveta

MESC: B70, C30, U60, U70

Úvod

Učiteľ je v dnešnej dobe nútený, počas prípravy žiakov na maturitnú skúšku z fyziky, siahať po materiáloch, ktoré nie sú primárne určené pre maturantov, a ktoré teda nezohľadňujú cieľové požiadavky na ich vedomosti a zručnosti [1]. Navyše, v rámci vzdelávania nielen prírodovedných predmetov je kladený dôraz na rozvíjanie kompetencií žiakov, ktoré potom môžu ďalej využívať v profesionálnom aj osobnom živote. Velmovská a kol. [2] uvádza, že: „Hoci naši žiaci disponujú pomerne veľkým množstvom vedomostí, majú priemerné schopnosti pracovať s nimi. Nemajú potrebné kompetencie na ich úspešné využitie pri riešení problémov.“ Podľa Haverlíkovej, v rámci vyučovania fyziky v súčasnej dobe, je kladené do popredia aktívne učenie.[3] Preto by rozvíjanie kompetencií a aktívne učenie mala aspoň čiastočne

reflektovať aj príprava maturantov z fyziky. Najčastejšie využívajú učitelia na prípravu maturantov učebnice, ktoré sú len prehľadom stredoškolského učiva. Ani jedna z nich nie je zameraná na rozvíjanie kompetencií a nezohľadňuje cieľové požiadavky.

Materiály, ktoré zohľadňujú cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z fyziky, a ktoré zahŕňajú rozvoj kompetencií žiakov, nie sú na dnešnom trhu dostupné, preto cieľom príspevku je predstaviť učiteľom materiály, ktoré sme vytvorili v rámci rigorózneho práce [4], a ktoré zohľadňujú vyššie uvedené prvky. Príprava maturantov z fyziky zahŕňa širokú oblasť tém, mnoho z nich je však obsahom vyučovania fyziky počas celého stredoškolského vzdelávania. Tento príspevok je zameraný len na tvorbu materiálov pre jednu tematickú oblasť, a to *Základy fyziky mikrosveta*.

Tvorba materiálov určených pre maturantov z fyziky zahŕňa viacero čiastkových procesov. Najskôr sme realizovali analýzu základných pedagogických dokumentov, teda porovnanie inovovaného Štátneho vzdelávacieho programu [5] a Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z fyziky [1], ktoré sú východiskom pre stanovenie obsahu materiálov. Následne sme sa venovali kľúčovým kompetenciám, ktoré sú potrebné pre život v 21. storočí. Kládli sme ich do kontextu cieľových požiadaviek a kompetencií uvedených v štátnom vzdelávacom programe. Prvá kapitola príspevku je preto zameraná na tvorbu metodických materiálov. Opisujeme postup, ktorý sme pri ich tvorbe zvolili, témy patriace do oblasti *Základy fyziky mikrosveta*, uvádzame ukážky z pracovného listu pre žiaka aj pre učiteľa spolu s komentárom k jednotlivým častiam.

Materiály, ktoré sme vytvorili, sme overili vo vyučovaní fyziky a prípadné potrebné zmeny zapracovali. Poslednú kapitolu venujeme prípadovej štúdii zameranej na aktivitu s rádioaktívnym rozpadom. Účelom štúdie bolo overiť a optimalizovať materiál vytvorený k téme *Rádioaktívny rozpad*. V rámci štúdie opíšeme prácu s nami vytvoreným materiálom aj priebeh aktivity.

Tvorba učebných materiálov

Cieľom tohoto príspevku je predstavenie učebného materiálu pre žiaka a materiálu pre učiteľa k téme *Základy fyziky mikrosveta*, keďže na trhu nie je dostupná učebnica fyziky pre maturantov. Niektorí učitelia na prípravu maturantov v tejto oblasti využívajú učebnicu *Fyzika pre 4. ročník gymnázia* [6], ktorá však nezohľadňuje rozvoj kompetencií a aktívnu činnosť žiaka, ktorá podľa Demkanina a Kováča [7] má byť súčasťou fyzikálneho vzdelávania. Dostupná je aj učebnica *Zmaturuj z fyziky* [8], ktorá tiež nie je zameraná na kompetencie žiaka, ale slúži skôr ako sprievodca stredoškolským učivom fyziky.

Pri tvorbe materiálu sme vychádzali predovšetkým z Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z fyziky [1]. Vytvorili sme 10 pracovných listov určených pre žiaka, a ku každému aj pracovný list určený pre učiteľa, ktoré tematicky kopírujú cieľové požiadavky k tejto téme na úrovni *aplikovať* [1]. Ide o témy:

- 1) Rádioaktivita v medicíne.
- 2) Rádioaktívny rozpad.
- 3) Kardioštimulátor a štítna žľaza.
- 4) Určovanie veku organických zvyškov.
- 5) Slnko – energia budúcnosti?
- 6) Stelárne a štiepne reakcie.
- 7) Fotón – rozruch okolo energie!
- 8) Fotoelektrický jav.
- 9) Spektrum vodíka.
- 10) Čo je elementárna častica?

Úlohy v pracovných listoch sú zamerané na cieľové požiadavky rovnako ako na rozvoj kompetencií žiakov (Obr. 1).

Úlohy

1. Priradíte oblasti grafu závislosti N od Z k príslušným druhom rádioaktívneho žiarenia a uveďte časticu, ktorá bola pri danom žiarení vylúčená.
2. V medicíne sa uhlík ^{11}C využíva na tomografiu, jód ^{131}I na scintigrafiu a rádium ^{126}Ra na rádioterapiu. S pomocou periodickej tabuľky chemických prvkov zostavte rovnice jednotlivých rozpadov.
3. Vysvetlite, prečo bolo zakázané využívanie rádia aj na terapeutické účely.
4. Objasnite, prečo a akým spôsobom sa využíva ochrana v miestnosti, kde prebieha rádioterapia.

Obr. 1: Príklad úloh z PL 01 Rádioaktivita v medicíne.

Kompetencie spolu s cieľmi aktivity sú uvedené v liste pre učiteľa (Obr. 2).

Rádioaktivita v medicíne



Cieľom aktivity je zopakovanie základných pojmov súvisiacich s rádioaktívnym rozpadom v kontexte medicíny. Žiaci majú na základe predošlých vedomostí a štyroch dokumentov, ktorých obsahom je rádioaktivita spojená s medicínou, vyriešiť úlohy.

Kompetencie:


Vytvoriť model transformácie.

Použiť a interpretovať dokumenty.

Obr.2: Příklad Poznámky pre učiteľa a Kompetencií z UL 01 Rádioaktivita v medicíne.

List pre učiteľa okrem toho obsahuje vzorové riešenia úloh, označené boldom a kurzívou, metodické poznámky pre učiteľa, ktoré sme zvýraznili kurzívou a doplnili k nim špeciálnu ikonu (Obr. 3).

2. V medicíne sa uhlík ^{11}C využíva na tomografiu, jód ^{131}I na scintigrafiu a rádium ^{226}Ra na rádioterapiu. S pomocou periodickej tabuľky chemických prvkov zostavte rovnice jednotlivých rozpadov.

 Na základe dok 1.1 by mali žiaci dokázať určiť, o aké premeny ide pri jednotlivých medicínskych metódach. Keďže rádium objavila M. Curie a jej terapia využíva α rozpad nejakého jadra, rádioterapia je charakteristická alfa rozpadom.

Tomografia: $^{11}_6\text{C} \rightarrow ^{11}_5\text{B} + ^0_1\text{e}$

Scintigrafia: $^{131}_{53}\text{I} \rightarrow ^{131}_{54}\text{Xe} + ^0_{-1}\text{e}$

Rádioterapia: $^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow ^{222}_{86}\text{Rn} + ^4_2\text{He}$

Poznámka pre učiteľa

Vzorové riešenie

Obr. 3: Příklad vzorového riešenia a Poznámky pre učiteľa z UL 01 Rádioaktivita v medicíne.

Námety na aktivity spolu s úlohami sme čerpali z rôznych zahraničných učebníc fyziky [9 - 14], pričom sme ich adaptovali na požiadavky kladené v iŠVP a cieľových požiadavkách, aby boli rozvíjané kompetencie žiakov. Vzhľadom na prehľadnosť pracovných listov pre žiaka a učiteľa, zdroje uvádzame v tejto kapitole. Okrem toho sme ako poslednú aktivitu vytvorili pojmový komiks podľa Sukeľovej [15].

Vytvorené aktivity sú učiteľom sprístupnené na stránke <http://e-fyzika.ddp.fmph.uniba.sk> v časti Metodické materiály (<https://lnk.sk/axe7>). V ďalšom uvádzame ukážku pracovného listu pre učiteľa k téme Rádioaktívny rozpad.

Prípádová štúdia zameraná na aktivitu k rádioaktívnemu rozpadu

Účel a zdôvodnenie prípadovej štúdie

Naším cieľom bolo vytvoriť učebný materiál k téme Základy fyziky mikrosveta, ktorý má podnecovať žiakov k aktívnemu učeniu, pri tvorbe materiálov sme využívali zahraničné materiály a naše skúsenosti z vyučovania. Vytvorené materiály sme následne využívali vo vyučovaní fyziky, overili a upravili.

Účelom tejto štúdie bolo analyzovať prácu s materiálom vytvoreným ku konkrétnej aktivite – *Rádioaktívny rozpad* a učebný materiál následne optimalizovať. Rovnako sme sa snažili nájsť vhodné pomôcky na jej realizáciu, keďže existuje viacero verzií zvoleného experimentu.

Techniky zberu a správy údajov

Aktivitu *Rádioaktívny rozpad* sme realizovali v rámci vyučovania fyziky v 4. ročníku francúzskeho bilingválneho gymnázia v Bratislave. Zúčastnilo sa jej 28 žiakov, ktorí boli rozdelení do štvorčlenných skupín. Keďže v tom čase prebiehalo dištančné vyučovanie, žiaci sa do aktivity zapojili v rámci online skupín, pričom merania prebiehali u nich doma. Skupinovú prácu sme zvolili, aby žiaci mali priestor na spoluprácu a komunikáciu, ktoré v rámci dištančného vyučovania nemajú veľký priestor. Žiaci boli dopredu oboznámení s pomôckami, ktoré si v rámci domácej prípravy na vyučovanie museli nachystať.

V priebehu aktivity sme sa pripájali k jednotlivým skupinám, a potom sme v rámci spoločnej hodiny porovnávali výsledky jednotlivých skupín, diskutovali o problémoch, s ktorými sa žiaci stretli, o výsledkoch merania a ich interpretácii a možných zlepšeniach experimentu. Aktivite sme venovali dve vyučovacie hodiny – jednu vyučovaciu hodinu realizácia, druhú diskusia.

Priebeh realizácie aktivity

Na začiatku sme žiakov rozdelili do siedmich štvorčlenných skupín. Ich úlohou bolo realizovať aktivitu s pomôckami podľa vlastného výberu. S cieľom aktivity, ktorým bolo modelovanie rádioaktívneho rozpadu, boli oboznámení. Pripravili sme tri verzie experimentu, z ktorých si žiaci mohli vybrať.

Prvá verzia spočívala v modelovaní s využitím herných kociek. Úlohou žiakov bolo pripraviť si 20 herných kociek – každý zo štvorice. Následne ich mali podľa pokynov hádzať, a odoberať vždy všetky kocky so zvoleným číslom (napr. s číslom 2). Mali vykonať 10 hodov, pričom po každom z nich bolo treba zaznamenať počet zostávajúcich kociek. Keby sa meranie uskutočnilo prezenčne, hody by bolo treba

vykonávať, kým by na každej kocke nepadlo vybrané číslo. Ďalším krokom bolo zjednotenie údajov, teda celkové výsledky zahŕňali výsledky každého žiaka zo štvorice – teda počet kociek na začiatku nie 20, ale 80. Nakoniec mali žiaci vytvoriť graf závislosti počtu zostávajúcich kociek od počtu hodov.

Druhou verziou bolo modelovanie s využitím pukancov. Žiaci si dopredu mali pripraviť 8 rovnakých balíkov pukancov určených do mikrovlnnej rúry (predpokladalo sa, že doma disponujú mikrovlnnou rúrou). V tejto verzii experiment vykonával jeden žiak doma, ostatní zaznamenávali a spracovávali údaje. Ich úlohou bolo zaznamenávať počet nevypukaných pukancov v závislosti od doby pukania v mikrovlnnej rúre. Najskôr jeden balík nechali vypukať, pričom mali odmerať dobu ohrevu v mikrovlnke. Tiež museli spočítať počet zrníek kukurice, ktoré jeden balík obsahuje. Túto dobu rozdelili na rovnaké časové úseky t . Ďalšie balíky nechávali pukať v časových úsekoch t , $2t$, $3t$ atď. Na záver mali vytvoriť graf závislosti počtu nevypukaných pukancov od doby ohrevu.

Tretia verzia zahŕňala modelovanie rádioaktívneho rozpadu využitím poleného hrachu. Každý zo štvorice realizoval vlastné meranie, ktoré potom v rámci skupiny porovnal so spolužiakmi. Každý žiak si prichystal 100 kusov poleného hrachu, ktoré následne púšťal z nejakej výšky na stôl, po dopade odobral všetky kusy, ktoré padli na zvolenú stranu (buď oblú alebo plochú – po dohode v rámci skupiny). Zvyšné hrachy znovu pustil na stôl a hody opakoval, kým mu neostal ani jeden hrach. Nakoniec bolo treba zostrojiť graf závislosti počtu zostávajúcich hrachov od počtu hodov.

Jednotlivé skupiny sa mohli dohodnúť, ktorú verziu aktivity budú realizovať. Uvádzame tabuľku (Tab.1) s počtom skupín, ktoré si zvolili jednotlivé verzie.

Tab. 1: Výber aktivít jednotlivými skupinami

Verzia	Počet skupín, ktoré ju realizovali
Prvá - kocky	0
Druhá - pukance	2
Tretia – polený hrach	5

Vzhľadom na počet kociek potrebných pre realizáciu prvej aktivity, si ju nevybrala žiadna zo skupín. Najjednoduchším na zaobstaranie bol balík poleného hrachu, preto si túto verziu vybral najväčší počet skupín, čo žiaci uvádzali pri zdôvodňovaní svojho výberu. Žiaci mali tiež k dispozícii pracovný list, ktorý uvádzame nižšie (Obr. 4).

Rádioaktívny rozpad

Moment rozpadu rádioaktívneho jadra nevieme predpovedať. Čo je známe, je len pravdepodobnosť rozpadu za jednotku času, ktorá je vyjadrená konštantou λ . Rovnako, keď hádzeme kockou, nevieme predpovedať, koľkokrát musíme hodiť kockou, aby padla jednotka. Známa je len pravdepodobnosť, že padne jednotka. Rádioaktívny rozpad je teda nepredpovedateľný a spontánný jav, ktorý vieme modelovať hádzaním kociek aj využitím pukancov, či poleného hrachu.

Úloha:

Zisti, ako závisí počet nevypukaných pukancov od času pukania.

Zisti, ako závisí počet hrachov padnutých na obľú stranu od počtu hodov.

Zisti, ako závisí počet kociek na ktorých nepadlo vybrané číslo od počtu hodov.

Verzie:

Kocky – každý zo štvorice si pripraví 20 kociek, ktoré budete hádzať. Zvoľte jedno číslo (rovnaké pre každého), vykonajte 10 hodov kockami, pričom po každom hode odstránite všetky kocky so zvoleným číslom. Po každom hode zaznamenajte počet zostávajúcich kociek.

Pukance – spoločne si pripravte 8 balíkov pukancov a mikrovlnnú rúru. Meranie zrealizuje jeden zo štvorice doma. Ostatní pomôžu pri spracovávaní merania. Najskôr jeden balík nechajte vypukať, odmerajte čas, ktorý to trvalo. Túto dobu rozdeľte na rovnaké časové úseky t . Spočítajte počet zrnok kukurice, ktoré jeden balík obsahuje. Ďalšie balíky nechajte pukať v časových úsekoch t , $2t$, $3t$ atď. Zaznamenajte počet nevypukaných pukancov po každom pukaní.

Hrach - každý zo štvorice si pripraví 100 zrnok poleného hrachu, ktoré budete púšťať z nejakej výšky na stôl. V rámci skupiny sa dohodnite, ktorú stranu budete sledovať (obľú alebo plochú). Po každom hode zaznamenajte počet hrachov, ktoré na vybranú stranu padli a tieto odoberte. Zvyšné znovu pustite. Hody opakujte, kým Vám neostane žiaden hrach.

Postup:

1. Vyber si jednu z verzií experimentu a zrealizuj meranie.
2. Údaje zaznamenaj do tabuľky a zostroj graf závislosti počtu zostávajúcich kociek, hrachu, pukancov, od času, ktorý balík pukal/od počtu hodov.
3. Zobrať trendovú spojnicu spolu s jej rovnicou.

Odpovedz:

1. Aká je pravdepodobnosť, že zrnko kukurice sa premení na pukaneč? Že na kocke padne vybrané číslo? Že hrach padne na vybranú stranu?
2. Ak uvažujeme, že pukanie kukurice je modelom rádioaktívneho rozpadu, uveďte, aká je v danom prípade hodnota rozpadovej konštanty λ .
3. Vysvetli, čo znamenajú jednotlivé členy rovnice trendovej spojnice.

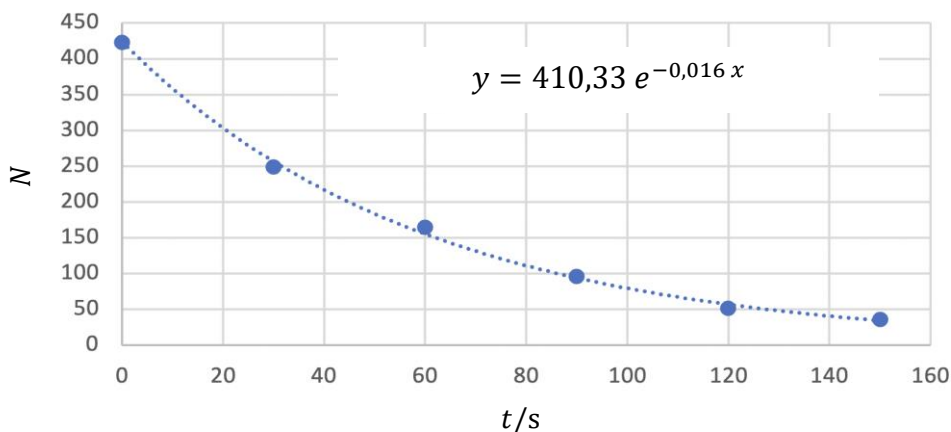
Obr. 4: Pracovný list pre žiaka k aktivite rádioaktívny rozpad.

Žiaci realizovali aktivity počas jednej dištančnej vyučovacej hodiny, pričom boli v MS Teams rozdelení do skupín, a tak mohli spolu kooperovať. Počas tejto vyučovacej hodiny sme u žiakov nepostrehli problémy so samotnou realizáciou merania. Problémy, ktoré sme so žiakmi riešili, sa týkali najmä tvorby grafu v softvéri Microsoft Excel, ktorý si väčšina na tvorbu grafu zvolila. Okrem toho žiaci na tvorbu grafu volili aj mobilnú aplikáciu Vernier Graphical Analysis, s ktorou majú už skúsenosti z hodín fyziky. Môžeme konštatovať, že vytvoriť graf po upresnení nezávislej premennej zvládla každá skupina. U dvoch skupín sme zaznamenali problém s pridaním trendovej spojnice do grafu a so zobrazením jej predpisu.

Počas druhej dištančnej vyučovacej hodiny sme so žiakmi diskutovali o výsledkoch merania, ktoré sme aj interpretovali. Pri porovnaní výsledkov skupín sa ukázali ako najmenej presné merania tie, pri ktorých boli využité pukance. Výsledky merania pri hrachu boli takmer ukážkovo presné. Pravdepodobnosť vychádzala v rozmedzí od $e^{-0,51} = 0,60$ do $e^{-0,48} = 0,62$.

Interpretácia dát zahŕňala hlavne prepojenie medzi veličinami, ktoré sa vyskytujú pri rádioaktívnom rozpade a hodnotami, ktoré žiaci namerali. Interpretovali sme rovnicu, ktorá vyšla jednej skupine pri verzii s pukancami. Potom sme interpretovali jednu rovnicu od dobrovoľníkov, ktorí pracovali s hrachom. Začali sme pukancami. Na Obr. 5 uvádzame graf, ktorý vytvorila skupina s pukancami.

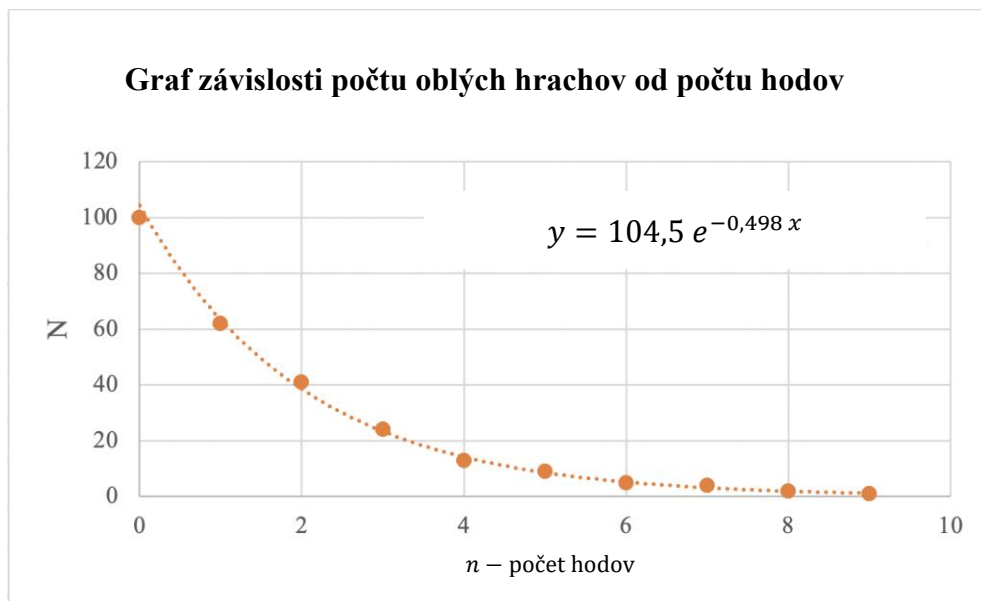
Graf závislosti nevypukaných zrnok kukurice od doby pukania



Obr. 5: Graf zostrojený z dát, ktoré žiaci namerali pri pukaní kukurice.

Po prezentácii merania žiakmi, sme začali diskutovať význam rovnice. Keďže na začiatku napočítali žiaci 423 zrnok kukurice, konštantu 410,33 veľmi rýchlo spojili s týmto počtom. So závislou a nezávislou premennou nebol žiaden problém, pretože aj v grafe ich mali pomenované, teda y z rovnice zodpovedalo N a x zase času t . Problém nastal pri určení konštanty z rovnice 0,016. Žiaci poznali zákon rádioaktívneho rozpadu a vedeli, že by táto hodnota mala zodpovedať rozpadovej konštanty λ , ktorá vyjadruje pravdepodobnosť rozpadu. Keďže pravdepodobnosť, že sa zrno kukurice premení na pukavec je 0,5, žiaci očakávali, že aj hodnota λ vyjde 0,5. Do toho im nahral fakt, že skupinám, ktoré pracovali s hrachom, vychádzala $\lambda = 0,498$ a pri

hrachu je tiež pravdepodobnosť, že hrach spadne napr. na oblú stranu 0,5. Preto sme zobrazili aj ich graf (Obr. 6), a začali sme diskutovať o tom, čo je v tom meraní iné a komu teda vyšla správne hodnota rozpadovej konštanty.



Obr. 6: Graf zostrojený žiakmi, ktorý pracovali s hrachom

Pri porovnaní si jedna žiačka všimla, že rozdiel v grafoch je práve v hodnotách na x -ovej osi. Zatiaľ čo pri pukancoch ide o čas v sekundách, pri hrachu je iba počet hodov. Tak sa spustila debata o tom, či tento fakt má nejaký vplyv na hodnotu exponentu. Takmer ihneď zareagoval jeden žiak, ktorý povedal, že určite áno, lebo rozpadová konštantka hovorí o pravdepodobnosti premeny jadra za daný čas, pretože jej jednotka je s^{-1} . Preto sme žiakom dali za úlohu, zistiť, aký veľký je časový úsek, aby rozpadová konštantka mala hodnotu 0,016. Zistili, že to vychádza 31,25 s, čo vzhľadom na presnosť merania zodpovedá rozdielu časových úsekov, v ktorých merali. Nasledovala otázka, ako to je pri hrachu. Žiaci však okamžite reagovali s tým, že keďže nemeriame čas, ale počet hodov, rozpadová konštantka bude vyjadrovať pravdepodobnosť, že sa jadro premení za jeden hod. Jeden hod ako časový úsek. Teda aj hodnota rozpadovej konštanty vyšla vzhľadom na presnosť merania správne.

¹Žiaci po tejto diskusii zhodnotili, že im pojem rozpadová konštanta dáva oveľa väčší zmysel.

Následne nás zaujímalo, s akými problémami sa žiaci počas realizácie aktivít stretli. Znovu sa ukázalo, že aj realizácia bola viac problematická pri pukancoch ako pri hrachu. Problém uvádzaný skupinami, ktoré zvolili pre svoj experiment práve polený hrach, bol nastavenie výšky púšťania hrachu tak, aby dopadol všetok na stôl a nerozletel sa ďaleko do strán. Všetky skupiny tvrdili, že im hodnú chvíľu trvalo prísť na to, ako majú hrach pustiť tak, aby dobre dopadol a nestratili nejaké kusy mimo.

Problémy s realizáciou aktivity s pukancami, ktoré si zvolili dve skupiny boli nasledovné:

- Časová náročnosť – určenie počtu pukancov v jednom balíku bolo zdĺhavé, pričom ostatní žiaci v skupine nemali čo robiť. Obe skupiny uviedli, že v jednom balíku pukancov do mikrovlnky sa nachádza približne 500 kusov zrníek kukurice. Teda aj následné spočítavanie počtu nevypukaných pukancov bolo zdĺhavé, vzhľadom na to, že to mohol robiť iba jeden žiak. Alternatívou by mohlo byť vysypanie pukancov na stôl, ich odfotenie, rozdelenie fotky na 4 sektory, pričom každý žiak by spočítal pukance vo svojom sektore.
- Technická stránka realizácie – problém s určovaním počtu pukancov na začiatku experimentu. Pukance sú namočené v bravčovej masťi, teda sú mastné a pozliepané dokopy. Rovnako aj problém s mikrovlnnou rúrou, keďže nie na každej je možné nastaviť výkon. To spôsobilo, že v jednej skupine, kde majú doma veľmi výkonnú mikrovlnnú rúru, vypukanie pukancov trvalo krátky čas, a to spôsobilo krátke časové úseky na pukanie pukancov.
- Veľa odpadu a vysoké vstupné náklady – podľa žiakov taký počet balíkov kukurice doma nie je možné zjesť. Teda žiaci museli určité množstvo pukancov vyhodiť. Pritom náklady sú približne 5 eur, keďže je potrebných 8 balíkov, pričom jeden stojí okolo 0,6 eura.

Verzia, ktorá sa žiakom najviac páčila, bola, podľa ich slov, tretia – s hrachom. Viacerí žiaci sa vyjadrili, že by radšej zvolili kocky, ktoré však doma nemali. Zaznel aj návrh, že hody kockami sa dajú simulovať na internete, avšak nie všetkým sa toto

¹ V skutočnosti žiaci nemerali akou pravdepodobnosťou hrach dopadne na stôl plochou, či oblou stranou, ale merali, akou pravdepodobnosťou sa ustáli hrach na rovnej, alebo oboj strane. Tu je asymetria zjavná, a nedá sa očakávať pravdepodobnosť javu 0,5, ako v prípade hodu s mincou (kde symetria zjavná je). Ak počet javov po n -tom hode je N_n a javy sú nezávislé, pravdepodobnosť p javu je približne rovná $p \approx N_{n+1}/N_n$. V experimente s hrachom táto pravdepodobnosť vyšla $p \approx e^{-0,498} = 0,61$, čo z grafu na obr. 6 vidieť. Experiment je atribút pravdy, preto má význam hovoriť len o tom, či experiment potvrdil, alebo nepotvrdil hypotézu (o pravdepodobnosti), resp. či experiment je vierohodný alebo nie. (Poznámka redakcie).

riešenie pozdávalo, lebo to nebrali ako reálne meranie, ale ako niečo umelo vytvorené.

Celkovo hodnotili žiaci aktivitu dobre. Páčilo sa im, že výsledky merania korešpondovali s tým, čo už o rádioaktívnom rozpade vedeli. Boli veľmi spokojní, že experiment zvládli z veľkej časti zrealizovať sami a že zvládli spracovať dáta.

Diskusia

Cieľom tejto štúdie bolo optimalizovať materiály a zvoliť vhodnú verziu experimentu k tejto aktivite.

Prvým dôležitým záverom, ktorý z nej vyplynul, bolo, že v pracovnom liste musíme upresniť, aký graf majú žiaci vytvoriť. Vzhľadom na čo majú skúmať počet nevypukaných pukancov, počet zostávajúceho hrachu alebo počet zostávajúcich kociek. Máme za to, že vzniknuté nejasnosti boli spôsobené hlavne troma rôznymi verziami, pričom v každej sa nezávisle premenná mierne líšila, avšak vo finálnej verzii pracovného listu sme dbali na toto upresnenie.

Druhé zistenie sa týkalo spracovania dát. Počas realizácie aktivity sme nechali voľbu softvéru na žiakov. Vybrali si mobilnú aplikáciu Vernier Graphical Analysis alebo Microsoft Excel. Keďže realizácia aktivity prebiehala počas dištančného vyučovania, žiaci mali ťažkosti so zdieľaním svojich výsledkov so spolužiakmi v prípade voľby mobilnej aplikácie. Tiež sa ukázalo, že niektorí nevedeli pridať do grafu trendovú spojnicu a jej predpis. Počas prezenčnej výuky je výhodnejšie použiť mobilnú aplikáciu, keďže bežne žiaci nemajú prístup k počítačom, čo ale vyžaduje použitie mobilných telefónov. Požiadavku na vytvorenie grafu sme doplnili o informáciu, že ho treba vytvoriť v MS Excel, s ktorým by mali mať všetci žiaci už predošlú skúsenosť, ale do poznámky pre učiteľa sme uviedli aj možnosť využitia mobilnej aplikácie.

Ďalšie zistenie súvisí s voľbou pomôcok na realizáciu tejto aktivity. Každá zo zvolených verzií má určité výhody a nevýhody, ktoré sa líšia vzhľadom na to, či vyučovanie prebieha prezenčnou alebo dištančnou formou. Prvá verzia s kockami je výhodná vzhľadom na fakt, že vieme pracovať s pravdepodobnosťou rozpadu – nemusíme odstraňovať len jedno číslo, môžeme aj dve, tri, štyri a pod. Tým pádom vieme v modeli meniť aj dobu polpremeny. Problém tejto verzie je, že nie každý učiteľ disponuje takým množstvom kociek, aby každá skupina mala 20 kusov, a tiež je aktivita ťažšie realizovateľná v dištančnej forme.

Čo sa týka verzie s hrachom, tu už nemôžeme hovoriť o rôznej pravdepodobnosti, teda nevieme ovplyvniť konštantu, ktorá má predstavovať dobu polpremeny. Výhodou tohoto variantu je, že v čase dištančného vyučovania je pre žiakov ľahko realizovateľný aj v domácom prostredí. Jediný problém, ktorý by pri tejto aktivite mohol nastať je, že žiaci by mohli nadobudnúť mylnú predstavu o úbytku hmotnosti pri rádioaktívnom rozpade – ak odoberáme hrach, ktorý padol na plochú stranu, vzorka

má menšiu hmotnosť. Na tento rozpor treba pri realizácii tejto verzie aj verzie s kocami žiakov upozorniť.

Verziu s pukancami určenými do mikrovlnnej rúry, ktorá vyšla ako najproblematickejšia pri jej realizácii, sme sa rozhodli nepoužiť. Faktom však ostáva, že premena zrnka kukurice na pukaneč je najlepším modelom rádioaktívneho rozpadu. Žiaci ne-nadobudnú pocit, že pri rádioaktívnej premene vzniká úbytok hmotnosti, zároveň môžu byť pripravené pukance príjemnou odmenou na zakončenie vyučovacej hodiny. V učebnom materiáli sme teda použili ako pomôcku pukance, avšak nie tie, určené do mikrovlnnej rúry, ale na panvicu. Pomôcky potrebné na realizáciu tejto aktivity počas prezenčného vyučovania, sú náročnejšie na zaobstaranie pre učiteľa – potrebuje zdroj tepla a panvicu, ale stačí mu menšie množstvo pukancov. Pre žiaka je to jednoduchšie na realizáciu doma. Zachováva sa však efekt premeny.

Záver

Vzhľadom na to, že v dnešnej dobe nie je dostupná učebnica určená pre maturantov z fyziky, ktorá zohľadňuje cieľové požiadavky na ich vedomosti a zručnosti a rozvíjanie ich kľúčových kompetencií, bolo cieľom príspevku predstaviť vytvorený materiál pre žiaka a učiteľa k téme *Základy fyziky mikrosveta*, ktorý by ich zohľadňoval.

V príspevku sme opísali prístup, ktorý sme zvolili pri ich tvorbe. Spomenuli sme zoznam tém, na ktoré sú pracovné listy zamerané. Uviedli sme ukážky z pracovných listov.

Vytvorené materiály sme implementovali do vyučovania fyziky s cieľom overiť ich a následne optimalizovať. Potrebné zmeny sme do materiálov zapracovali. Spôsob, akým overenie prebiehalo, opisujeme v poslednej kapitole v rámci prípadovej štúdie. Prípadovú štúdiu sme zamerali na aktivitu *Rádioaktívny rozpad*, ale podobným spôsobom sme overili aj ostatné materiály. Účelom prípadovej štúdie bolo overiť materiál vytvorený k modelovaniu rádioaktívneho rozpadu, ktorý sme v tejto kapitole uviedli a vybrať vhodné pomôcky na realizáciu tohoto modelu. Realizácie aktivity sa zúčastnilo 28 žiakov. So žiakmi sme modelovali rádioaktívny rozpad a následne diskutovali o materiáli aj o samotnej aktivite. Výsledky prípadovej štúdie ukázali, že vybraná aktivita pomohla žiakom objasniť pojem rozpadová konštanta a sprostredkovala lepšiu predstavu o tom, ako rádioaktívny rozpad prebieha. Ostatné pracovné listy vytvorené v rámci tejto práce sme implementovali do vyučovania fyziky. Na základe ohlasov od žiakov sa domnievame, že sú vhodné na využitie vo vyučovaní.

Pod'akovanie

Tento text vznikol s podporou projektu KEGA č. 013UK-4-2021 Metodické materiály zamerané na systematický rozvoj kritického myslenia.

L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s

- [1] ŠPÚ (Štátny pedagogický ústav). *Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z fyziky*. [online]. Bratislava, ŠPÚ, 2019. [cit. 2021-11-17]. Dostupné na: <https://lnk.sk/joo0>.
- [2] Klára Velmovská, Anna Trúsiková, Tünde Kiss. *Aspekty rozvoja kritického myslenia*. Bratislava, Knížničné a edičné centrum, 2021, ISBN 978-80-8147-100-1.
- [3] Viera Haverlíková. Backgrounds and challenges in designing the pre-service physics teachers' experiential camp. ICERI2021 Proceedings, 6807-6810, 2021, ISBN: 978-84-09-34549-6.
- [4] Simona Gorčáková. *Základy fyziky mikrosвета pre maturantov*. Rigorózna práca. Bratislava, FMFI UK. 2022. 90 s.
- [5] ŠPÚ (Štátny pedagogický ústav). *Štátny vzdelávací program pre gymnáziá*. [online]. Bratislava, ŠPÚ, 2015. [cit. 2021-1-20]. Dostupné na: <https://lnk.sk/btus>.
- [6] Ján Pišút a kol. *Fyzika pre 4. ročník gymnáziá*. Bratislava, SPN. 1987. 327 s. ISBN 67-121-87.
- [7] Peter Demkanin, Milan Kováč. Opportunities to allow a student to realise his plans within a formal physics education. INTED2021, Valencia, IATED, 8705-8709, 2021, ISBN 978-84-09-27666-0.
- [8] Pavol Tarábek. *Zmaturuj z fyziky*. Bratislava: Pedagogické vydavateľstvo Didaktis. 2006. 224 s. ISBN 978-80-89160-88-4.
- [9] Ivan Štoll. *Fyzika pro gymnázia – Fyzika mikrosвета*. 5. vyd. Praha, Prometheus. 2021. 192 s. ISBN 978-80-7196-506-0.
- [10] Adolphe Tomasino a kol. *Physique TermS – Obligatoire*. Paríž, Nathan. 2002. 384 s. ISBN 2-09-172064-X.
- [11] Jérôme Coup a kol. *Physique Term S – Enseignement Obligatoire*. Paríž, Bordas. 2002. 367 s. ISBN 2-04-729536-X.
- [12] Lionel Douthe, Baptiste Fray a kol.. *Physique Chimie Ire*. Lyon, Lelivrescolaire.fr. 2019. 416 s. ISBN 978-2-37760-144-8.
- [13] Lionel Douthe, Baptiste Fray a kol.. *Physique Chimie 2de*. Lyon, Lelivrescolaire.fr. 2019. 352 s. ISBN 978-2-37760-143-1.
- [14] Thierry Dulaurans, André Durupthy a kol.. *Physique Chimie 1er S*. Paríž, Hachette Éducation. 384 s. ISBN 978-2-01-135535-5.
- [15] Tatiana Sukeľová. *Podnecovanie diskusie zaradením pojmových komiksov*. Diplomová práca. Bratislava, FMFI UK. 2021. 82 s.

Adresa autora: Simona Gorčáková, Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava IV
e-mail: gorcakova@fmph.uniiba.sk

Texty úloh 1. kola 64. ročníka Fyzikálnej olympiády (šk. r. 2022-2023) kategórie E, F, G

Kategória E

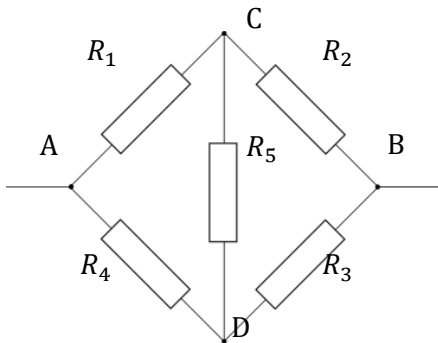
1. Oneskorený vlak

Vlak sa pohybuje po trati konštantnou rýchlosťou v_0 po dobu $t_1 = 1,00$ h, ale potom sa musí zastaviť pre práce na trati a čaká na mieste po dobu $t_2 = 0,50$ h. Keď sa dá znova do pohybu, jeho konštantná rýchlosť je len 75% pôvodnej rýchlosti v_0 . Vlak dorazí do cieľa s oneskorením $t_4 = 1,50$ h oproti cestovnému poriadku, ktorý počítal s konštantnou rýchlosťou v_0 po celú dobu jazdy.

Keby miesto, kde vlak sa musel zastaviť, by bolo o $s_2 = 45,0$ km ďalej v smere jazdy, oneskorenie vlaku (oproti cestovnému poriadku) by bolo len $t_5 = 1,00$ h.

- Koľko mala trvať (t_c) cesta podľa cestovného poriadku?
- Aká bola rýchlosť v_0 vlaku v prvej časti (plánovaná rýchlosť podľa cestovného poriadku)?
- Aká bola celková dĺžka s trate?
- Zostroj grafy rýchlosti ako funkcie času v oboch prípadoch do spoločného grafu.

2. Zložitý elektrický obvod



Obr. E-1

Na obrázku E-1 je zložitý elektrický obvod, kde medzi bodmi A a B sú zapojené rezistory R_1 až R_5 . Rezistory R_2 a R_4 môžeme nahradiť rezistormi s odporom $R_0 = 0 \Omega$ predstavujúcimi skrat, alebo s nekonečne veľkým odporom $R_\infty = \infty \Omega$, ktoré predstavujú prerušenie vetiev.

Napiš hodnoty rezistorov R_2 a R_4 , aby rezistory R_1, \dots, R_5 vytvárali medzi bodmi A a B obvod ekvivalentný obvodu:

- s tromi rezistormi v sérii,
- s tromi rezistormi zapojených paralelne.

Urči hodnoty odporov R_2 a R_4 (môžu byť iné ako 0 alebo ∞) tak, aby

- c) výsledný odpor R_{AB} medzi bodmi A a B nezávisel od hodnoty odporu R_5 .

Vo všetkých prípadoch a), b), c) znázorni riešenie na obrázku a vypočítaj výsledný odpor R_{AB} medzi bodmi A a B.

Úlohu rieš pre hodnoty odporov: $R_1 = 1,0 \Omega$, $R_3 = 3,0 \Omega$, $R_5 = 5,0 \Omega$.

Poznámka: o elektrických obvodoch, sériovom a paralelnom zapojení pozri napr.:

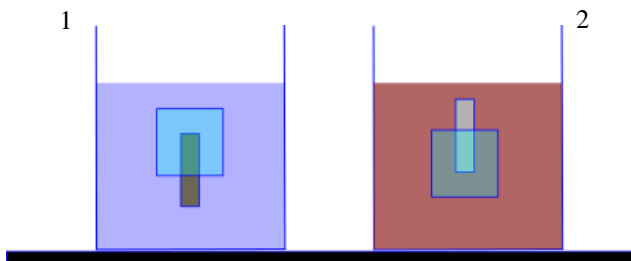
<https://teachers-paradise.webnode.sk/a13-3-elektricke-obvody/>



<https://teachers-paradise.webnode.sk/a13-3-elektricke-obvody/>

3. Objem valčeka v ľade

V pohári 1 je voda, v pohári 2 je neznáma kvapalina. Máme dve rovnaké kocky ľadu s dĺžkou strany 1 cm. V každej kocke je zamrznutý valček ako ukazuje obrázok E-2. Oba valčeky majú rovnaký tvar a objem, sú z rôznych materiálov a z ľadových kociek vyčnievajú $1/3$ svojej dĺžky.



Obr. E-2

V oboch prípadoch sa kocky vznášajú v kvapalinách v stabilnej polohe, ako ukazuje obr. E-2. Stabilnou orientáciou rozumieme nasledovné: ak kocku mierne pootočime, vráti sa do takej orientácie, akú ukazuje príslušný obrázok.

- Určte objem V_v valčekov v jednotkách mm^3 , ak v nádobe 1 je valček z hliníku.
- V ktorom pohári je kvapalina s väčšou hustotou? Aká je hustota valčeka v nádobe 2 v porovnaní s hustotou hliníku a s hustotou ľadu? Svoju odpoveď zdôvodni.

Kocky ľadu sa začnú roztápať. Valčeky zostávajú zamrznuté v ľade.

- Čo sa udeje s kockou ľadu v pohári 1 (bude sa vznášať, vypláva na voľnú hladinu, klesne na dno pohára)? Svoju odpoveď zdôvodni.

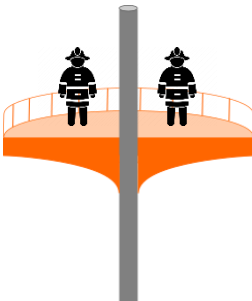
Voda z ľadu v pohári 2 sa nerozpúšťa v neznámej kvapaline, ale na začiatku zostáva v spojení s ľadom a vytvára na jeho povrchu tenkú vrstvu (v dôsledku tzv. povrchového napätia).

- d) Čo sa udeje s kockou ľadu spojeného s vodou z ľadu v pohári 2 (bude sa vznášať, vypláva na voľnú hladinu, klesne na dno pohára)? Svoju odpoveď zdôvodni.
- e) Čo sa udeje s kockou ľadu v pohári 2 (bude sa vznášať, vypláva na voľnú hladinu, klesne na dno pohára), ak roztopená voda sa oddelí od kocky ľadu? Svoju odpoveď zdôvodni.

Hustota vody $\rho_V = 1,00 \text{ g/cm}^3$, hustota ľadu $\rho_L = 0,92 \text{ g/cm}^3$, hustota hliníka $\rho_A = 2,70 \text{ g/cm}^3$.

4. Výt'ah z nebies

Pre veľmi vysoké budovy sa skúmajú možnosti záchrany osôb z vysokých poschodí. Jednou z možností je ľahká hliníková tyč s prierezom $S = 1,00 \text{ cm}^2$ a medená plat-



Obr. E-3

forma, ktorá kľže dole po tyči, obr. E-3. Na platforme je trecia brzda, ktorá udržiava počas klesania bezpečnú konštantnú rýchlosť. Platforma zostúpila z výšky h až na prízemie za čas $T = 1 \text{ min } 40 \text{ s}$. Hmotnosť platformy $M_p = 100 \text{ kg}$ a niesla dve osoby s celkovou hmotnosťou $M = 200 \text{ kg}$. Pri trení uvoľnené teplo čiastočne zohrieva hliníkovú tyč (časť $k_1 = 40 \%$ uvoľneného tepla). Rovnakú časť odovzdáva brzda platforme. Kým platforma zostúpi až na prízemie, zvyšná časť, 20% tepla sa odovzdá do okolia. Na posledných pár metroch platforma zabrzdí a bezpečne sa zastaví na prízemí. Pri poklese z výšky h až na prízemie sa teplota platformy zvýši o $\Delta t_{Cu} = 8,05 \text{ }^\circ\text{C}$.

- Urči zmenu Δt_A teploty hliníkovej tyče spôsobenú trením v brzde.
- Urči výšku h , z ktorej platforma klesala.
- Z akej výšky H by musela klesať platforma s uvedeným nákladom, aby jej teplota vzrástla z $t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ na bod varu vody (pri normálnom tlaku vzduchu)?

Hustota hliníka $\rho_{Al} = 2712 \text{ kg/m}^3$, Merné hmotnostné teplo hliníka $c_{Al} = 910 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{ }^\circ\text{C})$ a medi $c_{Cu} = 390 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{ }^\circ\text{C})$, gravitačná konštanta $g = 10 \text{ N/kg}$. Paluba platformy je tepelne izolovaná.

5. Vesmírne smetie

UNOOSA (United Nations Office for Outer Space Affairs – Úrad OSN pre vesmírne záležitosti) eviduje celkom $N = 7389$ umelých satelitov nad povrchom Zeme, z ktorých $N_a = 4852$ je aktívnych. Súhrnná hmotnosť aktívnych satelitov je $M_a = 3\,738\,339$ kg. Satelity lietajú v rôznych výškach h nad povrchom Zeme, pozri Tab. E-1. Budeme predpokladať, že každý satelit lieta po kružnicovej trajektórii so stredom v strede Zeme rýchlosťou niekoľko km/s.

Keby sa zrazili dva satelity letiace proti sebe pri týchto rýchlostiach, rozpadli by sa na drobné kúsky letiace všetkými možnými smermi, a mohli by spustiť lavínu ďalších zrážok.

Predpokladaj, že všetky satelity (vrátane neaktívnych) sa rozpadli na kúsky s hmotnosťou $m = 0,10$ g, ďalej predpokladaj, že všetky kúsky zostali vo vrstve, v ktorej boli pôvodné satelity, a vo vrstve sú rozložené rovnomerne.

- Urči objem V_1 v jednotkách km^3 , ktorý by pripadal na jeden úlomok v každej z vrstiev. Tabuľku E-1 doplň o ďalší stĺpec obsahujúci objem V_1 . Uveď, v ktorej vrstve je tento objem najmenší.
- Navrhni fyzikálne prijateľnú metódu k odhadu priemernej vzdialenosti l medzi kúskami úlomkov v každej vrstve. Údaje doplň do ďalšieho stĺpca v tabuľke. Uveď, v ktorej vrstve sú úlomky najhustejšie.

Medzinárodná vesmírna stanica (ISS) letí vo výške približne $h_1 = 450$ km. Plocha jej solárnych panelov $S = 2500,0$ m^2 .

- Odhadni, aká by bola pravdepodobnosť, vyjadrená v %, že v priebehu jednej sekundy jeden úlomok zasiahne solárne panely ISS. Odhadni, za aký čas by zasiahol úlomok solárne panely s pravdepodobnosťou 50 %. [Presný výpočet je veľmi zložitý, pre približný odhad predpokladaj, že ISS letí medzi úlomkami rýchlosťou $v_1 = 7,39$ km/s (čo je jej obežná rýchlosť okolo Zeme), a úlomky touto rýchlosťou narážajú do solárnych panelov, ktorých plocha je kolmá na smer letu.]

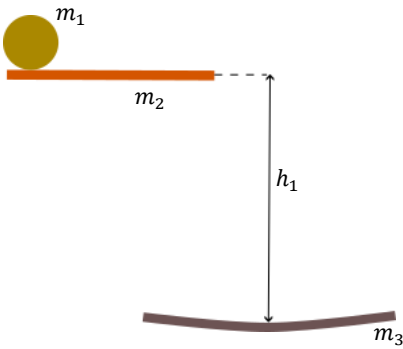
Poraďové číslo vrstvy	Výška nad povrchom Zeme h/km	Počet N_a aktívnych satelitov vo vrstve	Hmotnosť aktívnych satelitov vo vrstve M_a/kg
1	150-200	5	2 700
2	200-300	189	110 872
3	300-400	191	71 418
4	400-500	579	113 153
5	500-600	2 156	492 095
6	600-700	281	160 105
7	700-800	94	83 411
8	800-900	50	61 162
9	900-1000	15	34 695
10	1 000-10 000	592	254 415
11	10 000-20 000	38	55 272
12	20 000-30 000	91	119 692
13	30 000-40 000	569	2 177 907
14	40000 a viac	2	1 442
	spolu	4 852	3 738 339

Tab. E-1

Predpokladaj, že pomer N_n/N_a počtu neaktívnych satelitov k počtu aktívnych satelitov je vo všetkých vrstvách rovnaký, a že priemerná hmotnosť aktívnych a neaktívnych satelitov je po vrstvách rovnaká.

Pomôcka: Objem V gule s polomerom R je $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, kde $\pi \approx 3,1415$ je tzv. Ludolfovo číslo. Objem hranola, ktorého základňa má plochu S , a ktorý má výšku h , je $V = Sh$.

6. Kotúľajúca sa guľa



Obr. E-4

Horúca zlatá guľa s hmotnosťou $m_1 = 100$ g s teplotou $t_1 = 230$ °C je položená na vodorovnú medenú dosku hmotnosti $m_2 = 200$ g a s teplotou $t_2 = 20,0$ °C. Guľa sa kotúľa bez trenia veľmi pomaly doprava, až padne z výšky $h_1 = 1,00$ m dole na olovenú dosku s hmotnosťou $m_3 = 200$ g a s teplotou $t_3 = 20,0$ °C, pozri obr. E-4.

Kým sa zlatá guľa kotúľa po medenej doske, poklesne rozdiel teplôt gule a dosky na hodnotu $\Delta t = 10$ °C.

- Urči teploty gule a medenej dosky v okamihu, keď guľa dosiahne koniec medenej dosky.
- Po páde zlatej gule na olovenú dosku, po určitom čase, sa ich teplota ustáli na rovnakej hodnote. Urči konečnú teplotu olovenej dosky.
- Urči výšku h_2 medenej dosky nad olovenou, aby ustálená teplota olovenej dosky po dopade zlatej gule bola $t_c = 34,0$ °C.

Merná tepelná kapacita zlata $c_{\text{Au}} = 130$ J/(kg · °C), medi $c_{\text{Cu}} = 390$ J/(kg · °C) a olova $c_{\text{Pb}} = 130$ J/(kg · °C), gravitačná konštanta $g = 10,0$ N/kg. Straty tepla do okolitého prostredia neuvažuj. Pri náraze gule do olovenej dosky sa celá jej kinetická energia premení na teplo (deformačnú energiu neuvažuj).

7. Ľad a soľ

K zmene skupenstva nejakej látky, napr. ľadu, je potrebné teplo. K roztopeniu 1,00 g ľadu s teplotou $t_0 = 0,0$ °C (pričom vznikne voda s teplotou 0,0 °C) je potrebné neuveriteľne veľa tepla (334 J). Na zvýšenie teploty 1,00 g vody o $\Delta t = 1,0$ °C musíme dodať 4,18 J tepla. Rovnaké množstvo tepla musíme odčerpať, pokiaľ teplotu vody chceme znížiť o 1,0 °C.

V zime sa často solia chodníky a cesty. Soľ ľad roztopí (pokiaľ teploty nie sú príliš nízke). Ľad pomocou kuchynskej soli možno roztopiť aj vtedy, keď má teplotu $t_T = -18\text{ }^\circ\text{C}$. Akú teplotu bude mať roztopená zmes?

Cieľ

Sledovať teplotné zmeny zmesi ľadu a vody. Zistiť množstvo roztopeného ľadu a zmenu teploty zmesi.

Pomôcky:

Termoska (kalorimeter), iná (pomocná) nádoba, váhy, voda, ľad, kuchynská soľ, miešadlo, vodotesný alobalový tanier (podložka), teplomer, váhy.

Postup

- 1) Pripravte v mrazničke dostatočné množstvo ľadových kociek vopred.
- 2) Pripravte vodu s teplotou $t_0 = 0,0\text{ }^\circ\text{C}$. Do termosky nalej 100 g (100 ml) studenej vody a pridaj dostatočné množstvo ľadu. Vyčkaj, než sa teploty vyrovnajú. Ak sa neroztopil všetok ľad, voda v zmesi má presne teplotu $t_0 = 0,0\text{ }^\circ\text{C}$. Popíš, čo sa deje s množstvom ľadu.
- 3) Priprav ľad s teplotou $t_0 = 0,0\text{ }^\circ\text{C}$ – popíš, ako si pripravil tento ľad.
- 4) V termoske ponechaj 100 g vody s teplotou $t_0 = 0,0\text{ }^\circ\text{C}$ (ľad vyber) a vlož 100 g ľadu tiež s teplotou $t_0 = 0,0\text{ }^\circ\text{C}$.
- 5) Nasyp do termosky cca. 25 g kuchynskej soli a teplomerom premiešaj, než sa množstvo ľadu v termoske ustáli. Aká je teplota zmesi?
- 6) Navrhni spôsob, ako zmeriaš hmotnosť ľadu v termoske (po nasypaní soli a po ustálení teploty) a realizuj meranie.
- 7) Odhadni koľko tepla sa vymenilo medzi vodou a ľadom po pridaní soli a navrhni fyzikálne prijateľné vysvetlenie.
- 8) Zopakuj experiment s 50 g kuchynskej soli (alebo s iným množstvom) a výsledky zapíš do prehľadnej tabuľky. Urob záver z tvojich pozorovaní javu.

Kategória F

1. Kolóna aut

Kolóna zásobovania pozostáva z $N = 81$ nákladných áut. Každé nákladné auto má dĺžku $L = 10,0$ m. Podľa predpisu sú rozostupy medzi autami (vzdialenosť medzi koncom vozidla a začiatkom nasledujúceho vozidla) $d = 40$ m, a kolóna sa má pohybovať konštantnou rýchlosťou $v_0 = 40,0\text{ km/h}$. Ak prvé vozidlo začne brzdiť, brzdné svetlá sa mu rozsvietia, a okamžite začnú brzdiť aj ostatné vozidlá v kolóne. Každé vozidlo zastaví za $t_b = 3,00$ s na vzdialenosti $s_1 = 30,0$ m. Pri rozbiehaní je situácia iná, lebo žiadne svetlá sa nerozsvietia a uplynie reakčná doba šoféra $t_r = 1,50$ s. Reakčná doba šoféra je doba, kým si všimne, že vozidlo bezprostredne

pred nimi sa začalo pohybovať, a sám sa začne rozbiehať. Pri rozbiehaní z pokoja sa vozidlá chovajú podobne ako pri brzdení, čo znamená, že za čas $t_b = 3,00$ s na vzdialenosti $s_1 = 30$ m dosiahnu rýchlosť v_0 .

- Urči dĺžku D_0 kolóny, ak sa pohybuje podľa predpisu. (Dĺžkou D_0 kolóny rozumieme vzdialenosť medzi začiatkom prvého a koncom posledného vozidla.)
- Prvé vozidlo zastaví. Urči dĺžku D_b kolóny, ak sa zastaví aj posledné vozidlo.
- Prvé vozidlo sa znova dá do pohybu. Urči dĺžku D_c kolóny po tom, čo už všetky vozidlá dosiahnu rýchlosť pohybu v_0 .

Jednu minútu po rozbehnutí celej kolóny sú šoféri vozidiel vyzvaní, aby sa vozidlá zomkli na predpisové rozostupy za dobu $t_d = 2,00$ min.

- Všetky vozidlá (okrem prvého) takmer okamžite zrýchlia na takú rýchlosť rovnomerného pohybu, aby sa za dobu t_d priblížili k predchádzajúcemu vozidlu na predpisovú vzdialenosť d . (Čas prechodu na vyššiu rýchlosť neuvažuj.). Akou rovnomernou rýchlosťou v_N sa musí pohybovať posledné vozidlo, aby splnilo výzvu presne za čas t_d ?
- Zostroj spoločný graf prejdenej dráhy s prvého a posledného vozidla kolóny ako funkciu času t od začiatku rozbiehania stojacej kolóny podľa časti c), až do dosiahnutia predpisových rozostupov podľa časti d). Graf zostroj tak, aby sa z neho dala priamo odčítať aj dĺžka konvoja pre každý okamih. Znázorni a označ v grafe rozhodujúce udalosti.

Poznámka: odporúčame graf zostrojiť v jednotkách: dráha v km, čas v min..

2. ISS a Slnko

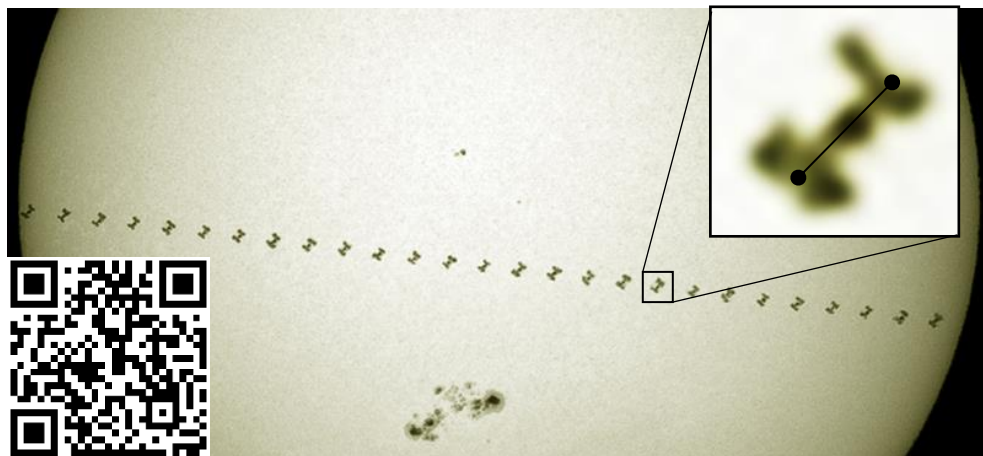
Od roku 1998 lieta okolo Zeme Medzinárodná vesmírna stanica (ISS), obr. F-1, a od roku 2000 s ľudskou posádkou, ktorá sa mení každého pol roka. ISS obieha okolo



Obr. F-1 Medzinárodná vesmírna stanica ISS.

Zeme približne vo výške $h = 420$ km a okolo Zeme obehne približne za $T = 92,7$ minúty. Stanicu možno pozorovať v noci ako svetlý bod, pohybujúci sa po nočnej oblohe, žiariaci odrazeným slnečným svetlom. Výnimočne ju možno pozorovať aj cez deň, keď prechádza priamo medzi pozorovateľom na Zemi a Slnkom. Jeden taký prechod je zachytený kamerou a znázornený na obr. F-2. Záber vznikol zlúčením expozícií nasledujúcich za sebou s časovým odstupom $\Delta t = 40$ ms. Na svetlom

pozadí Slnka vidíme jednotlivé polohy ISS. V obrázku je aj $10 \times$ zväčšený výrez obsahujúci stanicu. Skutočná dĺžka stanice $H = 109$ m (vyznačená dvojicou bodov a úsečkou na zväčšenine), ale stanica môže byť natočená šikmo vzhľadom na spojnicu Zem-Slnko, jej pozorovaná zdanlivá dĺžka je potom menšia. Ak porovnáme fotografiu na obr. F-1, a zväčšeninu na obr. F-2 vidíme, že tento sklon v tomto prípade nemôže byť dramatický a rozdiel preto zanedbáme.



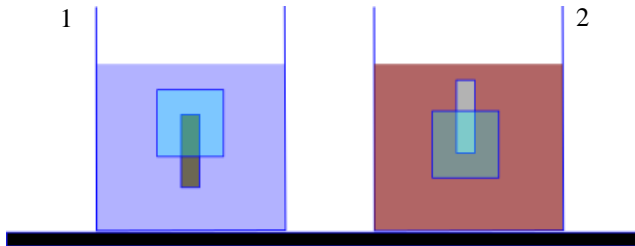
Obr. F-2: Prechod ISS medzi Zemou a Slnkom. Q-kód je prepojenie na obrázok ISS:
<https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/iss056e201248.jpg>

- Urči výpočtom vzdialenosť l , z ktorej by si sa musel pozerat' na obrázok F-2, aby Slnko na obrázku bolo rovnako veľké, akoby si sa pozeral na skutočné Slnko priamo (v žiadnom prípade ale neskúšaj pozerat' do Slnka nechráneným voľným okom).
- Odhadni vzdialenosť d ISS od fotoaparátu v okamihu fotografovania. Porovnaj zistenú vzdialenosť d s výškou h , v ktorej ISS letí nad povrchom Zeme, a rozdiel vysvetli pomocou obrázka s vyznačenou polohou Slnka, Zeme, ISS a kamery.
- Odhadni zo získaných výsledkov rýchlosť v pohybu ISS po jej orbitálnej trajektórii.
- Uveď, aký objekt (jav) na Slnku ešte zachytáva fotografia F-2 a stručne ho opíš.

Vzdialenosť Zeme od Slnka $L = 150$ miliónov km, priemer Slnka $D = 1,39$ miliónov km.

3. Neznáma kvapalina

Na stole sú dva rovnaké poháre 1 a 2. V pohári 1 je voda, v pohári 2 je neznáma kvapalina.



Obr. F-3

V kvapalinách sa vznášajú telieska s rovnakým objemom a tvarom, tvorené rovnakými kocami ľadu, do ktorých sú dvoma tretinami dĺžky zamrznuté valčeky rovnakého tvaru, ale z rôznych materiálov.

V oboch prípadoch sa telieska vznášajú v kvapalinách v stabilnej polohe, ako ukazuje obr. F-3. Stabilnou orientáciou rozumieme to,

že ak kocku mierne nakloníme z danej polohy, vráti sa do pôvodnej orientácie, akú ukazuje príslušný obrázok.

- a) V ktorom pohári je kvapalina s väčšou hustotou, aká je hustota valčekov v porovnaní s hustotou vody? Svoju odpoveď zdôvodni.

Kocky ľadu sa začnú roztápať, ale valčeky zatiaľ zostávajú zamrznuté vo zvyšnom ľade. Voda z roztopeného ľadu sa v nádobe 2 od kocky oddelí, ale v kvapaline sa nerozpúšťa. V neznámej kvapaline sa vytvárajú izolované kvapky vody.

- b) Čo sa udeje s telieskami v pohároch 1 a 2? Budú sa naďalej vznášať, vyplávajú na voľnú hladinu, alebo klesnú na dno pohára? Svoju odpoveď zdôvodni.
- c) Čo sa udeje s kvapkami vody, ktoré vzniknú roztápaním sa ľadu v pohári 2? Budú sa v kvapaline vznášať, vyplávajú na voľnú hladinu, alebo klesnú na dno pohára? Svoju odpoveď zdôvodni.
- d) Urob jednoduchý pokus. Do pohára nalej vodu, kvapkaj do nej stolný olej. Potom pokus opakuj s tým, že na začiatku pohár naplníš olejom, a budeš do nej kvapkať vodu. Potom naplň pohár iba do polovice olejom, objem pohára doplň vodou a nechaj ho chvíľu stáť. Napíš, čo pozoruješ v jednotlivých prípadoch a uveď, ktorá z kvapalín má menšiu hustotu.

4. Napúšťanie vody

Zmrzlinár napúšťa do veľkej tepelne izolovanej nádoby z jedného kohútika teplú, z druhého studenú vodu. Z prvého kohútika tečie voda s teplotou $t_1 = 60,0\text{ }^\circ\text{C}$ a prietokom $O_1 = 2,0$ litre za minútu. Z druhého kohútika tečie voda s teplotou $t_2 = 11,0\text{ }^\circ\text{C}$ a prietokom $O_2 = 3,0$ litre za minútu. Teplú vodu napúšťa po dobu $T_1 = 4,0$ min, zatiaľ čo studenú vodu napúšťa po dobu $T_2 = 2,0$ min.

- Urči výslednú ustálenú teplotu vody v nádobe.
- Akú hmotnosť, ako dlho musí zmrzlinár dopúšťať do nádoby teplú vodu, aby sa výsledná teplota vody v nádobe zvýšila o $\Delta t = 11,0$ °C?
- Na akej teplote by sa ustálila premiešaná teplá a studená voda, pokiaľ by sa napúšťala do nádoby bez prerušenia z oboch kohútikov s uvedenými prietokmi (nadbytočná voda s vyrovnanou ustálenou teplotou by odtekala do odtoku)?

Hustota vody $\rho = 1,0$ kg/L, merná tepelná kapacita vody $c = 4,2$ kJ/(kg.°C). Zmrzlinár napúšťa vodu z kohútikov vždy vyššie popísaným objemovým prietokom (O_1, O_2).

5. Obloha plná satelitov

Po západe slnka môžeme na jasnej oblohe často zahliadnúť satelity. UNOOSA (United Nations Office for Outer Space Affairs – Úrad OSN pre vesmírne záležitosti) eviduje celkom 7389 umeľých satelitov nad povrchom Zeme, z ktorých 4852 je aktívnych. Satelity lietajú v rôznych výškach. Uvažujme, že každý satelit lieta po kružnicovej trajektórii, ktorej stred je stredom Zeme. V tabuľke F–1 sme uviedli počty aktívnych satelitov v danej výške nad povrchom Zeme.

Poraďové číslo vrstvy	Výška nad povrchom h /km	Počet aktívnych satelitov
1	150-200	5
2	200-300	189
3	300-400	191
4	400-500	579
5	500-600	2 156
6	600-700	281
7	700-800	94
8	800-900	50
9	900-1000	15
10	1 000-10 000	592
11	10 000-20 000	38
12	20 000-30 000	91
13	30 000-40 000	569
14	40000 a viac	2
	spolu	4 852

Tab. F–1

- Aký veľký objem (v jednotkách km^3) pripadá na jeden aktívny satelit vo vrstve, v ktorej sú aktívne satelity „najhustejšie“?
- Navrhni nejakú fyzikálne prijateľnú metódu k odhadu priemernej vzdialenosti ℓ medzi susednými aktívnymi satelitmi vo vyššie určenej vrstve.
- V ktorej vrstve budú všetky satelity najhustejšie (spolu aktívne a neaktívne), a aká bude priemerná vzdialenosť ℓ_{na} medzi susednými satelitmi v tejto vrstve (pomer neaktívnych k aktívnym satelitom je číslo rovnaké pre každú vrstvu)?

Objem V gule s polomerom R je $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, kde $\pi \approx 3,1415$ je tzv. Ludolfovo číslo. Kocka, ktorej strana má dĺžku a , má objem $V = a^3$ a $a = \sqrt[3]{V}$. Zoznám sa s funkciou $\sqrt[3]{x}$ kalkulátoru.

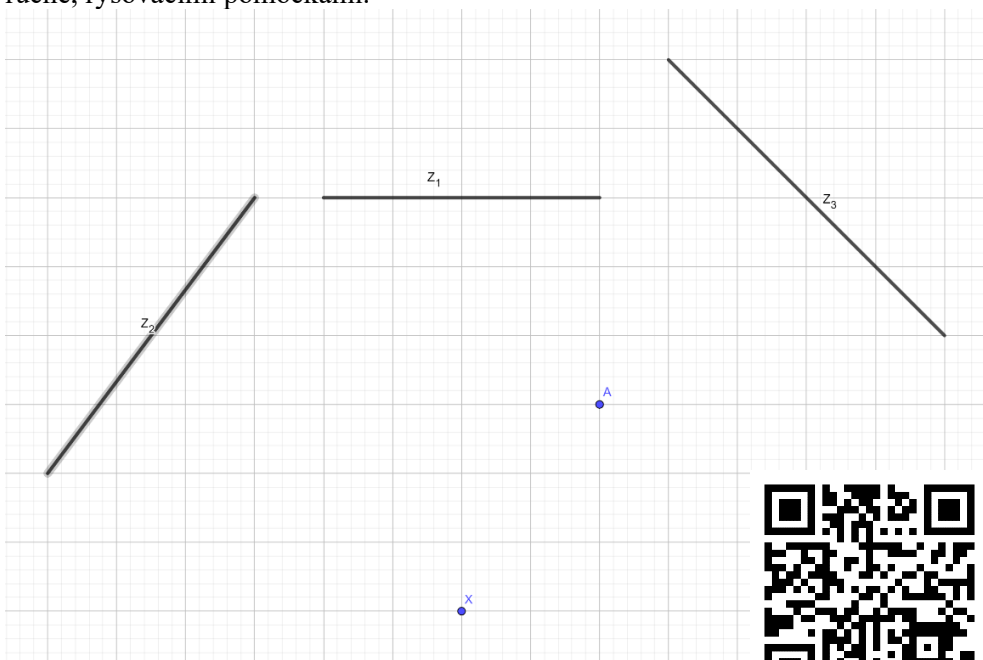
Časti a), b) a c) vypočítaj do vzdialenosti 40 000 km nad povrchom. Výsledky a) a c) doplň do ďalších dvoch stĺpcov v tabuľke.

6. Zrkadlá

Na obr. F-4 stojí Adam v bode A. Má pred sebou tri rovinné zrkadlá (Z_1, Z_2, Z_3) a vidí v nich neznámu osobu, ktorá stojí v bode X.

- Prekresli obrázok vo vhodnej mierke na papier a zostroj obrazy X_1, X_2, X_3 neznámej osoby X v zrkadlách Z_1, Z_2, Z_3 . Popíš konštrukciu, a zostroj vo všetkých prípadoch lúče vychádzajúci z bodu X a odrážajúci sa od jednotlivých zrkadiel do bodu A.
- V ktorom zrkadle vidí Adam obraz neznámej osoby v bode X ako najmenší, a v ktorom ako najväčší? Fyzikálne zdôvodni.

Poznámka: ku konštrukcii odporúčame použiť, napr. program Geogebra (<https://www.geogebra.org/geometry>), samozrejme, lúče je možné zostrojiť aj ručne, rysovacími pomôckami.



Obr. F-4

7. Zostroj kalibrovaný teplomer – Experimentálna úloha

Ak sa zmení teplota kvapaliny, zmení sa aj jej objem. Najčastejšie sa pri zvýšení teploty objem kvapaliny zvýši. Relatívna zmena objemu kvapalín je výrazne vyššia, ako relatívna zmena objemu pevných telies. Táto vlastnosť sa využíva pri konštrukcii teplomerov.

Kvapalina (napr. olivový olej) má objem $V_0 = 10,00$ ml, a pri zvýšení teploty o $\Delta t = 5,0$ °C sa jej objem zvýši o $\Delta V = 0,035$ ml. Táto zmena sa vyjadruje vzťahom

$$\Delta V = V_0 \beta \Delta t,$$

kde veličinu β nazývame *koeficient objemovej rozťažnosti*. Každá kvapalina má iný koeficient objemovej rozťažnosti, a ich hodnotu môžeme nájsť vo fyzikálnych tabuľkách.

Sklenená nádoba, v ktorej olej máme, sa tiež rozťahuje, ale jej vnútorný objem, sa mení výrazne menej než objem kvapaliny v nej. Aby sa veľmi malá zmena objemu kvapaliny dobre pozorovala, použijeme tenkú trubičku, do ktorej sa kvapalina z nádoby vytláča. Pri malom vnútornom priemere trubičky spôsobí i malá zmena celkového objemu kvapaliny veľké posunutie jej hladiny v trubičke.

Úloha

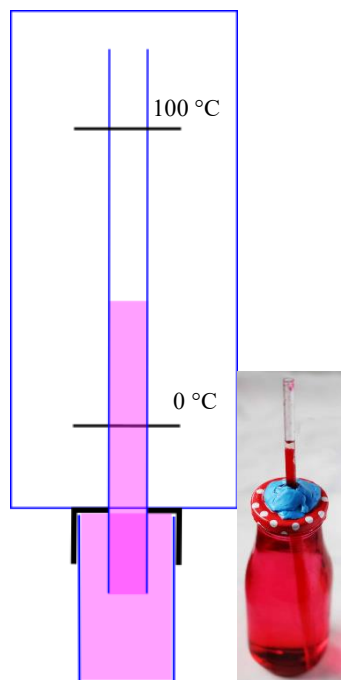
Zostrojť tzv. kalibrovaný teplomer.

Pomôcky

Malá sklenená nádoba (napr. po liekoch) s objemom okolo 10 ml a uzáverom, olivový olej, tenká priehľadná trubička (vnútorný priemer 2-3 mm, dĺžka 20-25 cm – napr. tenká priehľadná slamka), tesnenie. Pevný umelohmotný štít, na ktorý sa dá písať. Dôležité je, aby nádoba mala pevné steny a pevný uzáver.

Postup

Uzáver fľaštičky prevrtaj a trubičku zasuň do otvoru v uzávere. Medzeru medzi trubičkou a uzáverom dokonale utesni, napr. plastelínou, lepidlom z horúceho vzdušnej pištole, alebo iným vhodným spôsobom, tak aby okolo trubičky olej nemohol z fľaštičky unikať, ani aby sa do fľaštičky nedostal vzduch. Do dolnej časti trubičky natiahni olej do polovice celej dĺžky, a takto pripravený uzáver nasad' na fľaštičku



Obr. F-5

naplnenú po vrch olejom. Dbaj o to, aby vo fľaštičke nezostal vzduch. (Zmontovanie môžeš urobiť po ponorení do oleja vo väčšej nádobe.) Ak sa bude meniť objem oleja vo fľaštičke, olej sa začne vytláčať do trubičky. Očisti fľaštičku, aby ti neklzala v ruke.

K vrchnáku a k trubičke pripevni pevný štítok (umelohmotný alebo papierový), na ktorý budeš kresliť stupnicu.

Kalibrácia: Takto pripravený teplomer ponor do zmesi vody a ľadu, ktorá má pri normálnom tlaku teplotu $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Po ustálení výšky stĺpca v trubičke označíme na trubičke aj na štítku teplotu $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ (obr. F–5). Potom do väčšej nádoby s vodou ponor svoj teplomer až po uzáver a nádobu daj na varič. Vodu zohrievaj, až kým sa nezačne variť. Pozoruj, ako hladina oleja v trubičke stúpa, až sa zastaví, keď sa voda v nádobe začne variť. Na trubičke aj štítku označ čiarkou teplotu $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Potom nechaj nádobu s vodou vychladnúť, vyber štítok a vzdialenosť medzi ryskami $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ rozdeľ pomocou pravítka najprv na 10 dielikov (po $10\text{ }^{\circ}\text{C}$), a potom ešte čo najjemnejšie, ako sa bude dať. Štítok potom nasad' do pôvodnej polohy a máš pripravený vlastný kalibrovaný teplomer.

Úlohy k používaniu teplomeru

- 1) Zmeraj použitím vlastného teplomera teplotu studenej a teplej vody vo vodovode. Výsledky merania zaznamenaj!
- 2) Do pohára, do ktorého vojde aj tvoj teplomer, napusti studenú vodu z vodovodu. Zmeraj jej teplotu s teplomerom, s ktorým si tesne pred tým meral teplotu teplej vody z vodovodu. Zapiš výsledok. Vysvetlí, prečo sa výsledok líši od výsledku merania z bodu 1.
- 3) Zmeraj vonkajšiu teplotu vzduchu okolo obeda v tieni a na slnku.
- 4) Sleduj a zapisuj vonkajšiu teplotu vzduchu na danom tienistom mieste behom celého týždňa vždy v rovnakom čase ráno, okolo obeda a večer. Hodnoty zapiš do prehľadnej tabuľky aj s hodnotami teploty udávanými na internete v tvojom meste a porovnaj ich.
- 5) Opiš výhody a nevýhody svojho teplomeru.

Kategória G – Archimediáda

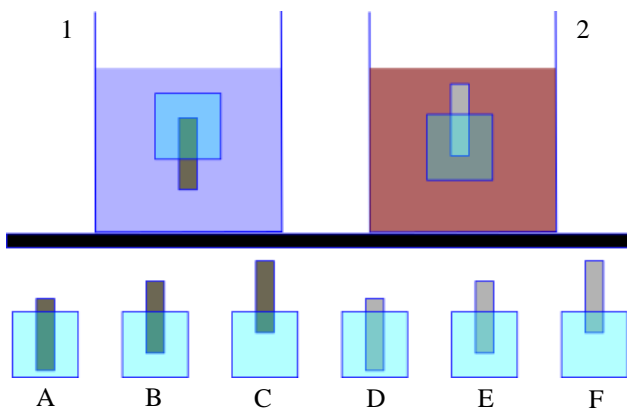
1. Valčeky v ľade

V pohári 1 je voda, v pohári 2 je neznáma kvapalina. Máme 6 rovnakých kociek ľadu s dĺžkou strany 1 cm. V každej kocke je zamrznutý valček ako ukazuje obrázok G–1. V kockách ľadu A, B a C sú rovnaké valčeky z toho istého materiálu. V kockách ľadu D, E a F sú tiež rovnaké valčeky z rovnakého materiálu, ale z iného, než z akého sú valčeky v kockách A, B a C.

Kocka B sa vo vode vznáša (Obr. G–1). Kocka E sa vznáša v neznámej kvapaline.

Orientácia kociek je v kvapalinách stabilná, tzn. ak kocku mierne pootočime a uvoľníme, vráti sa nazad do pôvodnej orientácie, akú ukazuje príslušný obrázok.

Budeme uvažovať, že ľad, voda, aj neznáma kvapalina majú teplotu 0°C , a ľad sa neroztápa.



Obr. G–1

- Kocky A a C vložíme do vody v pohári 1. Uveď, ktorá z nich bude plávať na voľnej hladine vody, a ktorá poklesne na dno pohára? Svoju odpoveď zdôvodni.
- Do pohára 2 s neznámou kvapalinou vložíme kocky D a F. Uveď, ktorá z nich bude plávať na voľnej hladine kvapaliny, a ktorá poklesne na dno pohára? Svoju odpoveď zdôvodni.
- Ako sa budú chovať kocky A, B, C, ak ich vložíme do neznámej kvapaliny v nádobe 2, a ako kocky D, E, F, ak ich vložíme do vody v nádobe 2? Poklesnú na dno, budú sa vznášať, alebo vyplávajú na voľný povrch príslušnej kvapaliny?

Poznámka: Hustota vody pri teplote $0,0^{\circ}\text{C}$: $\rho_v = 1,000 \text{ g/cm}^3$, hustota ľadu $\rho_l = 0,917 \text{ g/cm}^3$.

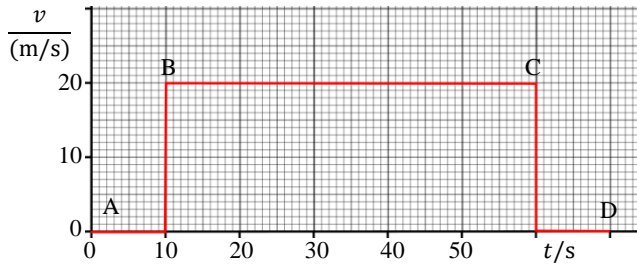
2. Autobus

Na obrázku G–2(a) vidíme graf rýchlosti v autobusu v závislosti od času t . Graf ukazuje idealizovaný pohyb autobusu medzi dvomi zastávkami. Bod A grafu zodpovedá okamihu, keď šofér zatvorí dvere a bod D okamihu, v ktorom dvere opäť otvorí. V grafe vidíš, že sa neuvažuje postupné rozbíhanie a brzdenie.

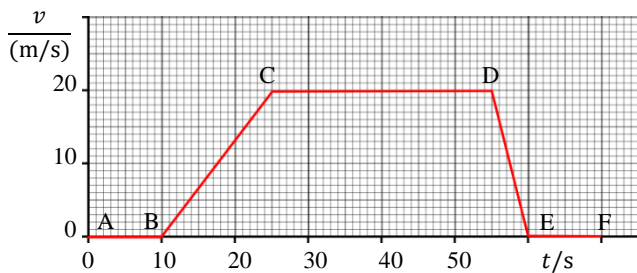
- Opíš pohyb autobusu v úsekoch AB, BC, CD.
- Vypočítaj dráhu s_1 , ktorú autobus podľa grafu prejde, a ukáž, že prejdená vzdialenosť s_{BC} je rovná ploche S_{BC} pod grafom rýchlosti na obr. G–2(a), ak dĺžku strán obdĺžnika uvažujeme v jednotkách uvedených na osiach grafu.

Prejdená dráha je rovná ploche pod grafom rýchlosti aj v zložitejších prípadoch, napr. pod grafom na obr. G–2(b), ktorý uvažuje aj postupné rozbiehanie a brzdenie autobusu.

- c) Opíš pohyb autobusu znázorneného na grafe obr. G–2(b) v úsekoch AB, BC, CD, DE a EF.



(a)



(b)

Obr. G–2

- d) Urči dráhu s_2 , na ktorej sa autobus rozbieha, a dráhu s_3 , na ktorej zabrzdí.
 e) Akú celkovú dráhu s_4 prejde autobus medzi zastávkami podľa obr. G–2(b)?
 f) Urči priemernú rýchlosť v_p autobusu medzi B a E podľa obr. G–2(b) od okamihu B, keď sa začne pohybovať do okamihu E, keď sa zastaví. Rýchlosť vyjadri v jednotke km/h.

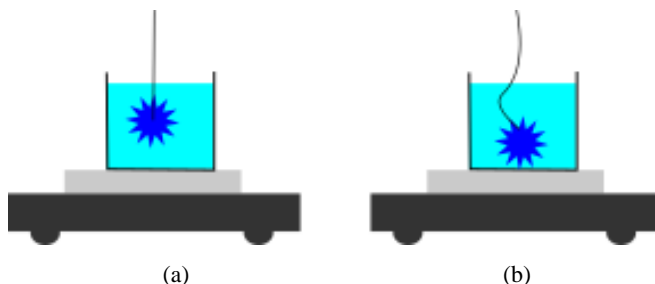
3 Mokrý ježko

Adam čítal román o Archimedovi, a chcel vyskúšať či správne pochopil čo sa tam písalo o Archimedovom zákone. Zobral digitálne váhy, ktoré jeho mamička používala na korenie. Položil na váhy tenkostenný sklenený pohár, nalial do pohára vodu a ukazovateľ váh vynuloval. Zobral kovovú napodobeninu ježka, a zavesil ju na veľmi tenkú niť. Ježka úplne ponoril do vody v pohári na váhach, ale tak, aby sa nedotýkal dna, obr. G–2(a). Váhy ukázali hodnotu $m_1 = 12,00$ g. Následne ponoril

ježka až tak, že klesol na dno pohára, pričom sa tenká niť povolila, obr. G–2(b). Váhy ukázali $m_2 = 21,00$ g.

- Urči objem V a hmotnosť m ježka.
- Urči priemernú hustotu materiálu, z ktorej bol ježko vyrobený.

Adam, čítal knihu aj večer, pred zaspáním. Snívalo sa mu, že je v laboratóriu na Mesiaci a pokračuje v experimentovaní. Zopakoval experiment s ježkom a s maminými váhami aj v laboratóriu na Mesiaci. Keď sa zobudil, okamžite začal hľadať údaje a prekvapene zistil, že výsledok merania, o ktorom sa mu snívalo, by bol správny.



Obr. G–3

- Vo sne tiež ponoril ježka visiaceho na niti do pohára vody na maminých váhach, aby sa nedotkol dna. Aký údaj ukazovali váhy v jeho sne? Zdôvodni. Aký údaj musel vyhľadať na internete pre potrebný výpočet, a akú hodnotu zistil?

Hustota vody $\rho = 1,000$ g/cm³, gravitačná konštanta $g = 9,810$ N/kg. Objem nite je zanedbateľne malý. Ostatné potrebné údaje vyhľadaj z dôveryhodných zdrojov.

4. Satelity nad hlavami

UNOOSA (United Nations Office for Outer Space Affairs – Úrad OSN pre vesmírne záležitosti) eviduje celkom 7389 umelých satelitov nad povrchom Zeme, z ktorých 4852 je aktívnych. Súhrnná hmotnosť aktívnych satelitov je 3 762 640 kg. Satelity lietajú v rôznych výškach. Uvažujme, že každý letí po kružnicovej trajektórii, ktorej stred je stredom Zeme. V tabuľke G–1 uvádzame počty aktívnych satelitov v daných vrstvách výšky nad povrchom Zeme.

poradové číslo vrstvy	výška nad povrchom Zeme h /(km)	počet aktívnych satelitov vo vrstve N_a	súhrnná hmotnosť aktívnych satelitov vo vrstve M /kg
1	150-200	5	2 700
2	200-300	189	110 872
3	300-400	191	71 418
4	400-500	579	113 153
5	500-600	2 156	492 095
6	600-700	281	160 105
7	700-800	94	83 411
8	800-900	50	61 162
9	900-1000	15	34 695
10	1 000-10 000	592	254 415
11	10 000-20 000	38	55 272
12	20 000-30 000	91	119 692
13	30 000-40 000	569	2 177 907
14	40000 a viac	2	1 442
	spolu	4 852	3 738 339

Tab. G–1

- Urči priemernú hmotnosť m_p jedného aktívneho satelitu v každej vrstve a doplň ju do tabuľky. V ktorej vrstve sú v priemere najťažšie aktívne satelity?
- Odhadni priemernú vzdialenosť l_p medzi susednými aktívnymi satelitmi v každej vrstve, a doplň ju do tabuľky. Uveď, v ktorej vrstve je priemerná vzdialenosť medzi aktívnymi satelitmi najmenšia? Opíš spôsob určenia tejto vzdialenosti.
- V ktorej vrstve bude priemerná vzdialenosť l_p medzi susednými satelitmi najmenšia, ak zoberieme do úvahy aj neaktívne satelity. Predpokladaj, že pomer počtu aktívnych a neaktívnych satelitov je rovnaký vo všetkých vrstvách.

Objem V gule s polomerom R je $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, kde $\pi \approx 3,1415$ je tzv. Ludolfovo číslo. Kocka, ktorej strana má dĺžku a , má objem $V = a^3$ a $a = \sqrt[3]{V}$. Zoznám sa s funkciami x^3 a $\sqrt[3]{x}$ na kalkulačke.

Časti a), b) a c) vypočítaj do vzdialenosti 40 000 km nad povrchom Zeme.

5. Solenie chodníkov

V zime sa často solia chodníky a cesty. Pôsobením soli sa ľad roztopí aj pri teplotách pod bodom mrazu (0 °C) – pokiaľ teploty nie sú príliš nízke.

Úloha

Sleduj ako ovplyvní prídanie soli do zmesi ľadu a vody teplotu tejto zmesi.

Pomôcky:

Nádoba, ktorá dobre vedie teplo (malá nádoba na varenie, očistená plechovka po konzerve, malá kovová nádoba na kŕmenie zvierat – cca. 250 ml), voda, ľad, kuchynská soľ, kuchynské váhy, teplomer, malé kuchynské cedidlo, miešadlo, alobal (rolka), tepelne izolačná podložka (napr. drevená).

Postup

- Z alobalu vytvor plytký tanierik a polož na drevenú (tepelne izolačnú) podložku, potom na neho nalej malé množstvo studenej vody (približne 5-10 ml). Vlož do vody na alobale plechovku, do ktorej dáš cca. 30 ml studenej vody z vodovodu a cca. 100 g ľadu (ľadovej triesťi). Opíš, čo sa udeje s ľadom v plechovke v priebehu niekoľkých pár minút, kým miešadlom (teplomerom) premiešavaš zmes vody a ľadu. Vždy po ½ minúte meraj (a zapisuj) teplotu vody. Vyber ľad cedidlom a zmeraj hmotnosť neroztopeného ľadu po 2 a 4 minútach, ľad po zväžení vráť do plechovky – výsledok merania zapíš. Zdokumentuj stav vody na alobale – pozorovanie opíš aj slovné.
- Zopakuj postup: alobal s vodou, do ktorej vložíme plechovku. Do plechovky vložíme 30 ml studenej vody a 100 g ľadu, **pridaj 2 polievkové lyžice kuchynskej soli** a zmes premiešaj. Vždy po ½ minúte meraj (a zapisuj) teplotu

vody. Vyber ľad cedidlom a zmeraj hmotnosť neroztopeného ľadu po 2 a 4 minútach, ľad vráť po zvážení do plechovky – výsledok merania zapíš. Zdokumentuj stav vody na alobale – pozorovanie opíš aj slovne.

- 3) Pomocou náprstku (vlastného malíčku) sformuj z alobalu tri malé nádobky s vyšším okrajom, aby sa neprevrátili, a do každého nalej rovnaké množstvo vody, 1 ml (1 g). Vlož opatrne do plechovky so zmesou vody, ľadu a soli (do náprstkov sa nesmie dostať slaná voda!). Po 4 minútach vyber prvý náprstok a popíš, čo sa stalo s vodou v náprstku. Druhý náprstok vyber po 6-ich, tretí po 8-ich minútach. Popíš pozorovanie, a dolož meraním pomocou váh.
- 4) Popíš rozdiel vo výsledku pozorovaní, keď si použil soľ. Urob záver ohľadom teploty chodníkov, ktoré sa v zime solia.

Ak máš možnosť, dokumentuj stav ľadu a vody na alobale, v plechovke, v náprstkoch fotografiami pomocou mobilného telefónu. Pokiaľ nemáš k dispozícii vhodný teplomer na meranie teplôt okolo bodu mrazu vody, sústreď svoju činnosť na meranie množstva ľadu pozorovaného v experimente.

Autori návrhov úloh: Boris Lacsný F1,2,4,6,7, G1-3,5 Aba Teleki E1-7, F3,5,G4

Recenzia a úprava úloh a riešení: Ivo Čáp

Redakcia: Ivo Čáp

Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Niels Henrik David Bohr

Laureát Nobelovej ceny za fyziku za rok 1922



Niels Bohr (07.10.1885-18.11.1962)

Niels Henrik David Bohr, dánsky fyzik, nositeľ Nobelovej ceny za fyziku za rok 1922, za jeho zásluhy vo výskume štruktúry atómu a žiarenia atómu. Niels Bohr výrazným spôsobom formoval dnešné chápanie kvantovej fyziky, ktorá sa nazýva kodaňskou interpretáciou kvantovej fyziky. Spolu s Albertom Einsteinom preslávili Piatu Solvayskú konferenciu v roku 1927 venovanú kvantovej teórii (oficiálne elektrónom a fotónom). Konferencii, na ktorej z 29-ich účastníkov bolo 17 nositeľov Nobelovej ceny, dominoval intelektuálny súboj medzi Einsteinom a Bohrom. Einstein odmietal prijať predstavu, že v prírode môžu prebiehať náhodné, nie deterministické procesy (tu odznela Einsteinova slávna veta „Boh nehra kocky“ a menej známa Bohrova replika „Einsteine, nehovorte Bohu, že čo smie a čo nesmie robiť“). Bohr veľmi úspešne hájil

základné princípy kvantovej teórie. V priebehu dňa Einstein prichádzal argumentmi proti kvantovej teórii, do ďalšieho dňa Bohr kvantovú teóriu úspešne obhájil proti týmto argumentom. Obidvaja veľikáni si chovali voči sebe hlboký rešpekt. Einstein, napriek svojim výhradám, kvantovú teóriu obdivoval.

Podľa historika vedy Friedmana (Robert Marc Friedman), po Eddingtonovom potvrdení Einsteinovej teórie gravitácie každý očakával, že Nobelova cena za fyziku za rok 1920 Einsteina neminie. Podľa Friedmana Einsteinov pacifizmus a židovský pôvod však vyvolával takú nevôľu v členoch Nobelovej komisie, že radšej sa rozhodli pre švajčiarskeho fyzika, ktorý objavil inertnú zliatinu niklu a oceli (Charles-Edouard Guillaume). Guillaume bol rozhodnutím prekvapený rovnako tak, ako celý svet. Nobelova komisia v roku 1921 sa radšej rozhodla cenu za fyziku neudelieť. Nakoniec v roku 1922 sa rozhodli tak, ako sa rozhodli, a Einstein dostal Nobelovu cenu za fyziku za rok 1921, za jeho príspevanie do kvantovej teórie prostredníctvom vysvetlenia fotoelektrického javu, kým Nielsovi Bohrovi udelili v tom istom roku Nobelovu cenu za fyziku za rok 1922 za jeho zásluhy v skúmaní štruktúry atómu a jeho žiarenia (teda tiež za príspevanie do kvantovej teórie).² AT

² Na základe Discover (28.09.2006), Virginia Hughes: Einstein versus the Nobel Prize].

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť

Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť

Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje

JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2022 ročník 51

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Klukanec

Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki

Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková, Ivo Klukanec

Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík

Zástupca vydavateľa: Martin Kalina

Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Náklad: 550 kusov

Periodicita vydávania: štvrťročník

IČO vydavateľa: 00 178 705

Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava

Dátum vydania periodickej tlače: júl 2022

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené

Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava

č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

OBSAH

Timea Gábová, Dušan Šveda: Rovesnícke hodnotenie ako nástroj učenia sa	1
Antonín Čejchán, Michal Křížek, Lawrence Somer: O rozložení prvočísel v okolí faktoriálů	14
Zdeněk Půlpán, Ondřej Slavíček: Gaussovo (normální) rozdělení	23
Zadania úloh 72. ročníka Matematickej olympiády (Stanislav Krajčí).....	37
Simona Gorčáková: Kompetencie žiakov a ich rozvoj v kontexte témy	
Základy fyziky mikrosвета	41
Texty úloh 1. kola 64. ročníka Fyzikálnej olympiády (šk. r. 2022-2023)	
kategórie E, F, G	54
Niels Henrik David Bohr Laureát Nobelovej ceny za fyziku za rok 1922....	72

CONTENTS

Timea Gábová, Dušan Šveda: Peers' Assessment as a Learning Tool.....	1
Antonín Čejchán, Michal Křížek, Lawrence Somer: On Distribution of Primes around Factorials.....	14
Zdeněk Půlpán, Ondřej Slavíček: Gaussian Distribution.....	23
Tasks of the 72 nd Mathematical Olympiad (Stanislav Krajčí)	37
Simona Gorčáková: Pupils' Competencies and their Development in the Context of the Topic: Fundamentals of Microworld Physics	41
Tasks of the First Round of the 64 th Physics Olympiad in School Year 2022-2023	
Category E, F, G	54
Niels Henrik David Bohr The Nobel Prize in Physics 1922	72