OBZORY

1/2020 (49)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2020 ročník 49

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 1/2020 Volume 49

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2020 (49)

VZDELÁVANIE V MATEMATIKE A INFORMATIKE

O exponenciálnych rovniciach

Jozef Doboš

Abstract [On Exponential Equations]: In this paper, we would like to show how it is possible to solve exponential equations in school Mathematics.

Key words: solving exponential equations

Súhrn: V tomto článku chceme ukázať, ako možno riešiť exponenciálne rovnice v školskej matematike.

Kľúčové slová: riešenie exponenciálnych rovníc

MESC: H30

Úvod

Začneme ukážkou niektorých bežných exponenciálnych rovníc:

$$2^{3x-2}=5,\quad 4^{2x}=8^{x+1},\quad 6^{x-3}=2^x,\quad 2^x+2^{-x}=2,\quad 3^{2x+1}-10\cdot 3^x+3=0.$$

Ako však definovať exponenciálnu rovnicu? V učebniciach sa namiesto toho stretávame najčastejšie s rôznymi vágnymi formuláciami, ktoré v podstate hovoria toto:

Exponenciálne rovnice spoznáme podľa toho, že majú neznámu v exponente.

Pozri napr. [2], [5], [7], [11], [15], [16], [18], [28], [31], [33], [35], [39].

Výrazne menej učebníc kladie obmedzenia na základ. Napr. v učebnici [34] sa píše: „Equations that involve terms of the form a^x, $a>0$, $a\neq 1$, are often referred to as *exponential equations*.“[1] Podobne, v učebnici [4] sa píše: „Equations involving exponential functions are called *exponential equations*.“[2] V tomto prípade sú obmedzenia na základ skryté v definícii pojmu exponenciálna funkcia.

Josef Polák ide vo svojej knihe [30] ešte ďalej: „*Exponenciální rovnicí* nazýváme rovnici, ve které je neznámá $x\in\mathsf{R}$ v exponentu nějaké mocniny tvaru a^x, popř. $a^{f(x)}$, kde $a>0$, $a\neq 1$ je daná konstanta, f je daná polynomická funkce.“

[1] Rovnice, ktoré obsahujú členy tvaru a^x, $a>0$, $a\neq 1$, sa volajú *exponenciálne rovnice*.

[2] Rovnice obsahujúce exponenciálne funkcie sa volajú exponenciálne rovnice.

Otázkou je, kam potom zaradiť (podľa Polákovej definície) nasledujúce rovnice:

$$9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}, \quad 4^{\frac{2}{x}} + 4 = 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}},$$

$$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162, \quad |x-1|^{\log^2 x - \log x^2} = |x-1|^3.$$

Sú z knihy [29], čo je príručka pre prípravu na prijímacie skúšky z matematiky na Ekonomickú univerzitu, pričom všetky sú tam zaradené v kapitole s názvom *Exponenciálne rovnice*. A je ich tam takých viac.

Poznamenajme, že [30] je už deviate prepracované vydanie Polákovho *Přehledu středoškolské matematiky*. Pritom v prvom vydaní z roku 1972 autor uvádza iba tieto tri typy exponenciálnych rovníc:

1. Základná exponenciálna rovnica typu $a^x = b$, kde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.
2. Exponenciálna rovnica typu $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, kde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $f(x)$, $g(x)$ sú dané funkcie.
3. Exponenciálna rovnica typu $F[a^{f(x)}] = 0$, kde $a > 0$, $a \neq 1$, F je daná funkcia argumentu $a^{f(x)}$, $f(x)$ je daná funkcia argumentu x.

Žiadne polynomické funkcie sa pri exponenciálnych rovniciach v tomto prvom vydaní nespomínajú.

Exponenciálne rovnice so záporným základom

V knihe [6], str. 129, sa rieši rovnica

$$(-4)^{2x^2} = (-4)^{5x-2}. \tag{1}$$

Všimnime si, že táto rovnica nie je ekvivalentná s rovnicou

$$(-4)^{2x^2-5x+2} = 1. \tag{2}$$

Naozaj, číslo $x = \frac{1}{2}$ je koreňom rovnice (2), ale nie koreňom rovnice (1).

Pri riešení rovnice (1) využijeme nasledujúcu vlastnosť exponenciálnych výrazov:

$$\text{Ak } a^x = a^y, \text{ potom } x = y \ \ (\text{v prípade, že } a \neq -1, 0, 1). \tag{3}$$

V tomto tvare je vlastnosť (3) uvedená napríklad v učebnici [1]. Niektorí autori (pozri napr. [39]) uvádzajú túto vlastnosť v odlišnom tvare, kde namiesto implikácie majú ekvivalenciu. To však nie je správne. Ako môžeme vidieť na príklade rovnice (1), nejde o ekvivalentnú úpravu, ale iba o dôsledkovú úpravu. Naozaj, ak x je koreňom rovnice (1), potom podľa vlastnosti (3) je aj koreňom rovnice $2x^2 = 5x - 2$. Avšak číslo $x = \frac{1}{2}$ je koreňom rovnice $2x^2 = 5x - 2$, ale nie je koreňom rovnice (1). Jednoducho preto, že výraz $(-4)^{\frac{1}{2}}$ nie je v stredoškolskej matematike definovaný. Naozaj, ak $a < 0$, potom výraz a^b je definovaný iba vtedy, keď exponent b je celé číslo, pričom $a^b \neq 0$. Ak b je párne, potom $a^b > 0$. Ak b je nepárne, potom $a^b < 0$. Na to si treba dávať pozor hlavne vtedy, keď exponent obsahuje premennú. Napríklad výraz $(-4)^{5x-2}$ má význam len vtedy, keď $5x - 2 = k$, t.j. keď $x = \frac{k+2}{5}$, kde k je ľubovoľné celé číslo. (Pozri [22].)

Rovnicu (1) skúsime tiež riešiť pomocou programu Wolfram Alpha, ktorý nájdeme na adrese `www.wolframalpha.com`. Do príkazového riadku napíšeme:

solve (-4)^(2x^2)=(-4)^(5x-2) over the rationals.

To znamená, že hľadáme korene rovnice (1) v množine racionálnych čísel (the rationals). Wolfram Alpha nám potom zobrazí nasledujúcu odpoveď:

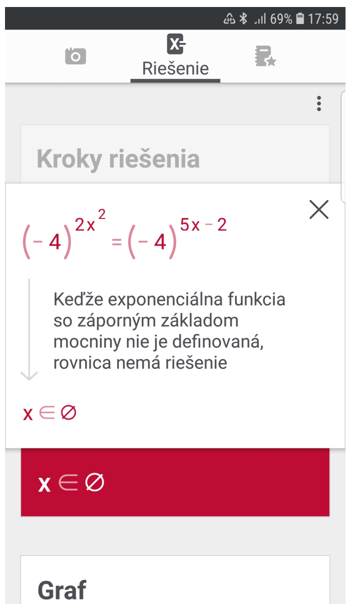
Input Interpretation:

solve	$(-4)^{2x^2} = (-4)^{5x-2}$	over the rationals

Result:

$x = 2$

Keď použijeme Photomath (čo je aplikácia pre smartfón), dozvieme sa, že rovnica (1) nemá riešenie. Zdôvodňuje to tým, že exponenciálna funkcia so záporným základom nie je definovaná. Môžeme to vidieť na obrázku vpravo. Rovnicu (1) tiež skúsime riešiť v programe GeoGebra, v okne počítačovej algebry (CAS). Bez úspechu. Avšak dosadením do rovnice (1) sa môžeme presvedčiť, že číslo $x = 2$ je jej koreňom. Vidíme to na obrázku dole.



1	$(-4)^{2x^2} = (-4)^{5x-2}$ ✓ $(-4)^{2x^2} = (-4)^{5x-2}$
2	Solve($1) → {?}
3	Substitute($1,x = 2) → 65536 = 65536

Je pravda, že v našich učebniciach sa nedefinuje exponenciálna funkcia so záporným základom, ale to nemá žiadny vplyv na to, že číslo $x = 2$ je koreňom rovnice (1), ako sa žiaci môžu presvedčiť skúškou správnosti. Môžeme iba diskutovať o tom, či máme rovnicu (1) pokladať za exponenciálnu rovnicu, alebo nie.

Rovnicu (2) riešime tým istým spôsobom. Pretože $1 = (-4)^0$, podľa vlastnosti (3) dostávame rovnicu $2x^2 - 5x + 2 = 0$, ktorej obidva korene sú aj koreňmi rovnice (2).

Exponenciálne funkcie so záporným základom

V našej učebnici [23] je exponenciálna funkcia definovaná predpisom $y = a^x$, kde základ a je kladné reálne číslo rôzne od 1. Ale napríklad v staršej učebnici [21] sa definuje exponenciálna funkcia pre $a > 0$, teda sa nepožaduje $a \neq 1$. Objavuje sa to až pri pojme exponenciálna krivka, čo je graf funkcie $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

V učebnici [8] autor dokonca uvádza nasledujúce príklady funkcií, ktoré nie sú exponenciálne:

$F(x) = x^2$	$G(x) = 1^x$	$H(x) = (-1)^x$	$J(x) = x^x$
Premenná je v základe, nie v exponente.	**Základ exponenciálnej funkcie musí byť kladná koštanta rôzna od 1.**	**Základ exponenciálnej funkcie musí byť kladná konštanta.**	**Premenná je aj v základe, aj v exponente.**

Z toho vzniká u žiakov miskoncepcia, že exponenciálne výrazy v rovniciach nemôžu mať záporný základ. Podľa autora knihy [6] si tu žiaci zamieňajú význam slovných spojení „nie je definované“ a „nemá zmysel“. Z tohto dôvodu odporúča pri definovaní exponenciálnej funkcie nedávať na číslo a žiadne obmedzenia.

Tento problém si uvedomujú aj niektorí autori učebníc. Napríklad učebnica [38] obsahuje úlohu, v ktorej majú žiaci doplniť nasledujúce tabuľky:

x	4^x	x	3^x	x	$(-9)^x$	x	$(-5)^x$
2		2		2		2	
1		1		1		1	
0		0		0		0	
-1		-1		-1		-1	
-2		-2		-2		-2	

V učebnici [14] je opísaná aktivita, v rámci ktorej žiaci pracujú vo dvojiciach s funkciami $y = (-2)^x$ a $y = (-7)^x$, resp. s funkciami $y = (-6)^x$ a $y = (-5)^x$. Každému žiakovi priradíme jednu z týchto funkcií. V prvom kroku každý žiak vytvára tabuľku hodnôt svojej funkcie so štartovacou hodnotou $x = 2$ a s prírastkom 2. V druhom kroku si medzi sebou porovnávajú vytvorené tabuľky. Snažia sa zistiť čo majú spoločné. V treťom kroku žiaci vytvárajú nové tabuľky, avšak teraz so štartovacou hodnotou $x = 1$ a s prírastkom 2. Znova si medzi sebou porovnávajú vytvorené tabuľky a snažia sa zistiť čo majú spoločné. Vo štvrtom kroku žiaci dopĺňajú správne slová v tejto vete: *Mocnina so záporným základom a* ___?___ *(párnym/nepárnym) exponentom je* ___?___ *(kladná/záporná), zatiaľ čo mocnina so záporným základom a* ___?___ *(párnym/nepárnym) exponentom je* ___?___ *(kladná/záporná).* Táto aktivita ukazuje, že mocniny so záporným základom a prirodzeným exponentom nadobúdajú striedavo kladné a záporné hodnoty. Pre párne exponenty sú to kladné hodnoty, pre nepárne exponenty sú to záporné hodnoty.

Ako definujeme mocniny

A tu je problém. Pretože nemáme k dispozícii jednu definíciu, ale pojem mocniny budujeme postupne v niekoľkých krokoch. Pritom je porušená zásada, že každé rozšírenie definície nejakého pojmu by malo v sebe zahŕňať pôvodnú definíciu. V prípade definície mocniny je totiž možné túto zásadu dodržať iba čiastočne. S postupným rozširovaním definičného oboru pre číslo v exponente dochádza k zužovaniu definičného oboru pre číslo v základe mocniny.

Mocniny s prirodzeným exponentom

Ak a je reálne číslo a $n > 1$ je celé číslo, potom a^n je skrátený zápis súčinu

$$\underbrace{aa\dots a}_{n},$$

kde n je počet činiteľov. Toto označenie zaviedol René Descartes vo svojej knihe [12] už v roku 1637 (vďaka internetu si dnes môžeme pozrieť aj naskenovaný originál). Thomas Harriot vo svojej knihe [17] z roku 1631 ešte žiadny skrátený zápis nepoužíva, ako môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku:

Æquatio communis aaa — 3.bba ═══ + 2.ccc. in qua c > b.

Konkrétne ide o všeobecnú rovnicu $a^3 - 3b^2a = 2c^3$ (s neznámou a), v ktorej $c > b$.

Predchádzajúca definícia v skutočnosti nezahŕňa prípad $n = 1$. Museli by sme totiž vysvetliť, čo je to súčin s jedným činiteľom. Korektné je uviesť pre tento prípad samostatnú definíciu: $a^1 = a$. Všimnime si, že už nám neprejde zdôvodnenie, že ide o skrátený zápis. Dokonca ešte aj v 19. storočí matematici bežne používali zápis aa, pretože zápis a^2 im nepripadal ako jeho skrátenie.

V niektorých učebniciach (pozri napr. [3]) autori uvádzajú rekurentnú definíciu:

$$a^1 = a \quad \text{a} \quad a^{n+1} = a^n a \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ako to funguje, môžeme vidieť v tabuľke 1. Ďalšiu hodnotu dostaneme z predchádzajúcej jej vynásobením číslom $a = 2$ (postupujeme pritom zhora dole, ako naznačujú šípky).

	n	2^n	
	1	2	
$+1$			$\times 2$
	2	4	
$+1$			$\times 2$
	3	8	
$+1$			$\times 2$
	4	16	
$+1$			$\times 2$
	5	32	
$+1$			$\times 2$
	6	64	
$+1$			$\times 2$
	7	128	
$+1$			$\times 2$
	8	256	

Tabuľka 1

	n	2^n	
	-3	$\frac{1}{8}$	
-1			$: 2$
	-2	$\frac{1}{4}$	
-1			$: 2$
	-1	$\frac{1}{2}$	
-1			$: 2$
	0	1	
-1			$: 2$
	1	2	
-1			$: 2$
	2	4	
-1			$: 2$
	3	8	
-1			$: 2$
	4	16	

Tabuľka 2

Mocniny s celočíselným exponentom

Cieľom je rozšíriť definíciu mocniny pre nulu a záporné celé čísla. K tomu je potrebné otočiť smer šípok v tabuľke. Predchádzajúcu hodnotu dostaneme z danej hodnoty jej vydelením číslom $a = 2$. Ako to funguje, môžeme vidieť v tabuľke 2. Takýmto spôsobom sa postupuje v učebnici [24]. Podobne je to aj učebniciach [26] a [27], len tam je na ilustráciu použitý základ $a = 3$.

Môžeme to vyjadriť rekurentne takto:

$$a^1 = a \quad \text{a} \quad a^{n-1} = \frac{a^n}{a} \quad \text{pre } n = 1, 0, -1, -2, \dots$$

Teraz názorne vidíme, že tento postup zlyhá pre základ mocniny $a = 0$. Nulou sa totiž deliť nedá. V učebniciach sa štandardne uvádza definícia mocniny s nulovým a záporným celočíselným exponentom v tvare

$$a^0 = 1 \quad \text{a} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{pre } a \neq 0 \quad \text{a} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Z takto formulovanej definície by sa na prvý pohľad mohlo zdať, že nie je dôvod dávať podmienku $a \neq 0$ pri definovaní mocniny s nulovým exponentom. Napriek tomu sa v drvivej väčšine stredoškolských učebníc matematiky explicitne uvádza, že výraz 0^0 nedefinujeme. Vysvetlenie toho ide čiastočne nad rámec stredoškolskej matematiky. Pekne spracovaný materiál na túto tému možno nájsť na internete na adrese `www.askamathematician.com/2010/12`, v odpovedi na otázku: *What does* 0^0 *(zero raised to the zeroth power) equal? Why do mathematicians and high school teachers disagree?*

Mocniny s racionálnym exponentom

Ak exponent x je racionálne číslo, ktoré nie je celým číslom, potom mocninu a^x definujeme predpisom

$$a^x = \sqrt[n]{a^k}, \tag{4}$$

kde $x = \frac{k}{n}$ je vyjadrenie čísla x v tvare zlomku, pričom k, n sú celé čísla, $n > 1$ (ak $n = 1$, potom x je celé číslo). Treba si však uvedomiť, že reprezentácia racionálneho čísla v tvare zlomku nie je jednoznačná. Aby táto definícia bola korektná, musíme ukázať, že výraz $\sqrt[n]{a^k}$ nezávisí od reprezentácie čísla x v tvare zlomku[3]. Otázkou však je, aké obmedzenia z toho vyplývajú pre číslo a.

V našich stredoškolských učebniciach odmocniny zo záporných čísel spravidla nedefinujeme[4]. Párne odmocniny zo záporných čísel sa nedajú definovať bez imaginárnych čísel. Pri nepárnych odmocninách zase narazíme na problém s tým, že nepárna odmocnina v obore reálnych čísel by bola niečo iné ako nepárna odmocnina v obore komplexných čísel. Preto je rozumné požadovať, aby číslo a bolo nezáporné.

Ak celé číslo k je záporné, výraz a^k je definovaný len pre $a \neq 0$. Preto predpisom (4) môžeme definovať mocninu 0^x len pre tie racionálne čísla x (v prípade, keď nie sú celými číslami), pre ktoré $x > 0$. Ak $a > 0$, žiadne obmedzenia pre racionálne čísla x (ktoré nie sú celými číslami) nevznikajú.

---

[3] V niektorých zahraničných učebniciach to riešia požiadavkou, aby zlomok $\frac{k}{n}$ bol v základnom tvare.

[4] Výnimkou je učebnica [23], kde na strane 101 sa definuje nepárna odmocnina z ľubovoľného reálneho čísla. V celej učebnici sa však pracuje iba s odmocninami z kladných čísel. Asi jediným dôvodom pre takéto definovanie odmocniny tak zostáva graf funkcie $y = \sqrt[3]{x}$, ktorý je uvedený na strane 120.

Mocniny s iracionálnym exponentom

Začneme nasledujúcou úlohou z učebnice [10]: Máme zistiť, či existuje také racionálne číslo x, pre ktoré platí $12^x = 7$. Nie je ťažké nahliadnuť, že také racionálne číslo neexistuje. Naozaj, ak by bolo $x = \frac{k}{n}$, kde k a n sú prirodzené čísla, potom rovnicu $12^x = 7$ môžeme prepísať do tvaru $12^k = 7^n$. Na ľavej strane by sme mali párne číslo, kým na pravej strane by sme mali nepárne číslo. To však nie je možné. Je zrejmé, že ani prípad $x = -\frac{k}{n}$ nie je možný.

Vidíme, že potrebujeme rozšíriť pojem mocniny aj pre iracionálne exponenty. V tomto prípade však korektné definovanie mocniny presahuje rámec stredoškolskej matematiky. Teória iracionálnych čísel patrí už do vysokoškolskej matematiky. Žiakom stredných škôl sa to zvykne zdôvodňovať pomocou aproximácie iracionálnych čísel racionálnymi číslami. Ukážeme si to na príklade:
Pretože $\sqrt{2} \doteq 1.414\,213\,562\,373$, platí $1.414\,213\,562 < \sqrt{2} < 1.414\,213\,563$. Potom

$$\left.\begin{aligned} 3^{1.414\,213\,562} &\doteq 4.728\,804\,386 \\ 3^{1.414\,213\,563} &\doteq 4.728\,804\,391 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 3^{\sqrt{2}} \doteq 4.728\,804.$$

Ak $a > 0$, žiadne obmedzenia pre iracionálne čísla x nevznikajú. Ak $a = 0$, výraz a^x je definovaný len ak $x > 0$, pričom $0^x = 0$.

Rovnice s neznámou v základe aj v exponente

V tomto odseku nás budú zaujímať rovnice tvaru $f(x)^{\varphi(x)} = g(x)$ (pozri napr. [40]). Pretože budeme používať dôsledkové úpravy, z nájdených koreňov upravenej rovnice musíme vylúčiť tie, ktoré nie sú koreňmi pôvodnej rovnice. K tomu potrebujeme vedieť, že (vzhľadom na to, ako je definovaná mocnina v stredoškolskej matematike) platí

1. $a^b > 0$ v dvoch prípadoch:
   1.1. ak $a > 0$,
   alebo
   1.2. ak $a < 0$ a b je párne celé číslo;
2. $a^b = 0$ len ak $a = 0$ a súčasne $b > 0$;
3. $a^b < 0$ len ak $a < 0$ a b je nepárne celé číslo.

Pri riešení takýchto rovníc budeme používať nasledujúcu dôsledkovú úpravu:

$$f(x)^{\varphi(x)} = g(x) \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)|^{\varphi(x)} = |g(x)|\,, \tag{5}$$

založenú na použití vzorca $\left|a^b\right| = |a|^b$ (pozri napr. [9], str. 250).

V dizertačnej práci [37], ktorá je venovaná riešeniu rovníc v školskej matematike s využitím systémov počítačovej algebry (CAS), je medzi exponenciálne rovnice zaradená aj rovnica:

$$(x-6)^x = 2^x. \tag{6}$$

GeoGebra[5] nájde z troch koreňov rovnice (6) iba dva, konkrétne $x = 0$ a $x = 8$. Pritom aj číslo $x = 4$ je jej koreňom, čo si možno ľahko overiť dosadením. Keď však použijeme dôsledkovú úpravu (5), dostaneme rovnicu

$$|x-6|^x = 2^x. \tag{7}$$

Teraz už GeoGebra nájde všetky tri korene. Odkiaľ však berieme istotu, že rovnica (7) iné korene nemá? Zrejme nemôže byť $|x-6| = 0$, pretože po dosadení $x = 6$ do rovnice (7) dostaneme na ľavej strane $0^6 = 0$ a na pravej strane $2^6 > 0$. Pretože pre každé reálne číslo x platí $2^x > 0$, rovnicu (7) môžeme prepísať do tvaru

$$\left(\frac{|x-6|}{2}\right)^x = 1. \tag{8}$$

Pripomeňme si, že platí

$$a^b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1, \\ b = 0 \text{ a zároveň } a \neq 0, \\ a = -1 \text{ a } b \text{ je párne celé číslo.} \end{cases}$$

Pre rovnicu (8) to znamená, že môžu nastať dve možnosti: buď $\frac{|x-6|}{2} = 1$, alebo $x = 0$ a zároveň $\frac{|x-6|}{2} \neq 0$. Rovnica $\frac{|x-6|}{2} = 1$ má dva korene: $x = 8$ a $x = 4$. Dosadením čísel $x = 0$, $x = 4$ a $x = 8$ do rovnice (7) overíme, že všetky tri sú jej koreňmi.

V článku [13] sa môžeme stretnúť s rovnicou

$$(x-3)^x = 3-x. \tag{9}$$

Zrejme nemôže byť $x > 3$, pretože na ľavej strane by sme mali kladné číslo a na pravej strane by sme mali záporné číslo. Na druhej strane, číslo $x = 3$ je koreňom rovnice (9), pritom GeoGebra ho nenájde. Ani ako koreň rovnice

$$|x-3|^x = |3-x|. \tag{10}$$

Za predpokladu $x \neq 3$ môžeme rovnicu (10) prepísať do tvaru

$$|x-3|^{x-1} = 1. \tag{11}$$

[5] Version: 6.0.553.0-w (31 July 2019)

Máme dve možnosti: buď $|x-3|=1$, alebo $x-1=0$ a zároveň $|x-3|\neq 0$. Rovnica $|x-3|=1$ má dva korene: $x=4$ a $x=2$. Rovnica $x-1=0$ má koreň $x=1$. Dosadením čísel $x=1$ a $x=2$ do rovnice (9) overíme, že z nich iba $x=2$ je jej koreňom. Rovnica (9) má teda dva korene: $x=2$ a $x=3$.

Rovnice tvaru $(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{h(x)}$ sa v knihe [25] volajú *exponenciálno-mocninové rovnice* (Exponential-power Equations, Показательно-степенные уравнения). Na str. 124 – 125 možno nájsť podrobné riešenie rovnice

$$(x^2+x-57)^{3x^2+3}=(x^2+x-57)^{10x}. \tag{12}$$

GeoGebra nevie túto rovnicu riešiť. Wolfram Alpha nenájde koreň $x=7$, ale prehlási za koreň číslo $x=\frac{1}{3}$. Avšak aj keď číslo $x=\frac{1}{3}$ je koreňom rovnice $3x^2+3=10x$, nie je koreňom rovnice (12).

Ukážky podrobných riešení exponenciálno-mocninových rovníc môžeme tiež nájsť na YouTube. Napríklad

$$(x-2)^{x^2+2x}=(x-2)^{11x-20} \qquad \text{(pozri [32])},$$

alebo

$$(x^2-7x+11)^{x^2-13x+42}=1 \qquad \text{(pozri [36])}.$$

Niektoré rovnice tvaru $f(x)^{\varphi(x)}=g(x)$ si vyžadujú použitie vyššej matematiky. Napríklad rovnica

$$2^x=\frac{8x}{6-x}, \tag{13}$$

s ktorou sa môžeme stretnúť v článku [19], príp. [20]. Nie je problém zistiť, že rovnica (13) má korene $x=2$, $x=3$ a $x=4$. Ukážeme, že iné korene nemá. Najskôr upravíme rovnicu (13) do tvaru

$$x\ln 2-\ln x+\ln(6-x)-\ln 8=0. \tag{14}$$

Potom vypočítame deriváciu funkcie $h(x)=x\ln 2-\ln x+\ln(6-x)-\ln 8$. Aby sme zistili jej intervaly monotónnosti. Pretože

$$h'(x)=\frac{x^2\ln 2-6x\ln 2+6}{x(x-6)},$$

rovnica $h'(x)=0$ má dva korene. Ich približné hodnoty sú $x_1 \doteq 2.413\,630\,018\,959$ a $x_2 \doteq 3.586\,369\,981\,041$. Tieto čísla rozdeľujú definičný obor funkcie h na tri intervaly, pričom na každom z nich je funkcia h buď rastúca alebo klesajúca. To znamená, že na každom z nich môže mať rovnica (14) najviac jeden koreň. Tým sme ukázali, že rovnica (14) nemôže mať viac ako tri korene.

Dr. Hrubý vo svojich prácach [19] a [20] odporúča riešiť úlohy na zostavovanie takýchto rovníc s predpísanými koreňmi. Napríklad: Nájdite čísla a, b, c, d tak, aby rovnica $2^x=\frac{ax+b}{cx+d}$ mala korene $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

Literatúra – References

[1] Balzarini, E. et al.: Pre-Calculus 12, McGraw-Hill Ryerson, 2012.
[2] Baratto, S., Bergman, B., Hutchison, D.: Elementary and Intermediate Algebra, McGraw-Hill Primis, 2011.
[3] Barnett, R. A. et al.: Precalculus. Graphs and Models, McGraw-Hill, 2009.
[4] Barnett, R. A. et al.: College Algebra, McGraw-Hill, 2011.
[5] Beecher, J. A., Penna, J. A., Bittinger, M. L.: Algebra and Trigonometry, Addison Wesley, 2012.
[6] Бекаревич, А. Н.: Уравнения в школьном курсе математики, Издательство «Народная асвета», Минск, 1968.
[7] Blitzer, R.: College Algebra, Pearson Education, 2004.
[8] Blitzer, R.: Algebra & Trigonometry, Pearson Education, 2007.
[9] Болтянский, В. Г., Сидоров, Ю. В., Шабунин, М. И.: Лекции и задачи по элементарной математике, Наука, Москва, 1974.
[10] Burger, E. B., Starbird, M.: The Heart of Mathematics. An invitation to effective thinking, John Wiley & Sons, Inc., 2010.
[11] Coene, Ch. et al.: Foundations for College Mathematics 12, Pearson Education Canada, 2009.
[12] Descartes, R.: Discours de la methode Pour bien Conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences. Plus la Dioptrique. Les Meteores. Et la Geometrie. Qui sont des essais de cete sic Methode. Leiden, Netherlands, Ian Maire, 1637. `https://archive.org/details/bub_gb_s6lSHDngPFoC/page/n4`
[13] Егоров, А.: Показательные уравнения, Квант 1981, № 1, стр. 40 – 42.
[14] Flanders, J. et al.: UCSMP Advanced Algebra, Chicago, UChicagoSolutions, 2016.
[15] Gantert, A. X.: Algebra 2 and Trigonometry, Amsco School Publications, Inc., 2009.
[16] Gustafson, R. D., Hughes, J.: College Algebra, Cengage Learning, 2012.
[17] Harriot, T.: Artis analyticae praxis, Ad æquationes Algebraïcas nouâ, expeditâ, & generali methodo, resolvendas. Robertum Barker, London, 1631. `https://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2667286`
[18] Holliday, B. et al.: Algebra 2, Glencoe/McGraw-Hill, 2006.
[19] Hrubý, D.: Zajímavé rovnice, Učitel matematiky, Vol. 11 No. 4 (2003), 251-253.
[20] Hrubý, D.: Zajímavé rovnice a nerovnice, In A. Slavík (ed.). Cesty k matematice, Sborník konference, 25 a 26. září 2014. Matfyzpress, Praha, 2014, 90 – 93.
[21] Kabele, J. a kol.: Matematika pre 2. ročník stredných všeobecnovzdelávacích škôl, SPN, Bratislava, 1966.
[22] Krňan, F., Bartoš, P., Rovan, K.: Algebra pre 1. ročník stredných všeobecnovzdelávacích škôl, SPN, Bratislava, 1963.
[23] Kubáček, Z.: Matematika pre 2. ročník gymnázií a 6. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, druhá časť, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2010.
[24] Lehmann, J.: Elementary Algebra. Graphs & Authentic Applications, Pearson Education, Inc., 2015.

[25] Litvinenko, V., Mordkovich, A.: Solving Problems in Algebra and Trigonometry, Mir Publishers, Moscow, 1987.

[26] Miller, J., O'Neill, M., Hyde, N.: Beginning Algebra, McGraw-Hill, 2008.

[27] Murdock, J., Kamischke, E., Kamischke, E.: Discovering Algebra. An Investigative Approach, Key Curriculum Press, 2007.

[28] Narasimhan, R.: Precalculus. Building Concepts and Connections, Houghton Mifflin Company, 2009.

[29] Peller, F. a kol.: Matematika (krok za krokom na EU), Vydavateľstvo Ekonóm, Bratislava, 2002.

[30] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, Praha, 2008.

[31] Rockswold, G.: Essentials of College Algebra with Modeling & Visualization, Addison Wesley, 2012.

[32] Рожкова, З. И.: Показательно-степенные уравнения. Часть 7. `https://www.youtube.com/watch?v=sd8KjwDnOrg`

[33] Stewart, J., Redlin, L., Watson, S.: Precalculus. Mathematics for Calculus, Brooks/Cole Cengage Learning, 2009.

[34] Sullivan, M.: Algebra & Trigonometry, Pearson Education, Inc., 2008.

[35] Swokowski, E. W., and Cole, J. A.: Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry, Thomson Brooks/Cole, 2008.

[36] Talwalkar, P.: A Math Problem Most Computers Can't Solve, But You Can. `https://www.youtube.com/watch?v=C7A3uFC76G0`

[37] Tõnisson, E.: Differences between Expected Answers and the Answers Offered by Computer Algebra Systems to School Mathematics Equations, Dissertationes Mathematicae Universitatis Tartuensis 122, University of Tartu Press, 2017.

[38] Tussy, A. S., Gustafson, R. D., Koenig, D. R.: Developmental Mathematics for College Students, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.

[39] Tussy, A. S., Gustafson, R. D.: Intermediate Algebra, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2013.

[40] Вуколова, Т. М., Потапов, М. К., Шевкин, А. В.: *Об уравнениях вида* $f(x)^{\varphi(x)} = g(x)$, Архимед: научно-методический сборник — 2009. — Вып. 5, стр. 94 – 102.

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/0265/17 Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2020 (49)

Sebahodnotenie – nástroj formatívneho hodnotenia ako súčasť učenia sa

Timea Gábová

Abstract [Student Self-Assessment – Formative Assessment Tool]: The self-assessment is an important part of the formative assessment. The paper discusses the research results with grammar school students and the case study results with two students. The results show that students are able to evaluate their abilities realistically and they consider self-assessment as an important part of the evaluation process. The paper also includes examples of the self-assessment questionnaire and self-assessment rubrics linked to the content of the mathematical education. During the case study, a collaboration with two students who used the self-assessment rubrics during one thematic unit of mathematics was connected and recorded.

Key words: Self-Assessment, Self-assessment questionnaire, Self-assessment rubrics, Formative assessment.

Súhrn: Sebahodnotenie je dôležitá súčasť formatívneho hodnotenia. Článok pojednáva o výsledkoch výskumu so žiakmi druhého ročníka gymnázia a o výsledkoch prípadovej štúdie s dvoma žiakmi. Výsledky ukazujú, že žiaci sú schopní reálne ohodnotiť svoje schopnosti a považujú sebahodnotenie za podstatnú zložku hodnotiaceho procesu. Článok obsahuje aj ukážky sebahodnotiaceho dotazníka a sebahodnotiacich rubrík viazaných na obsah matematického vzdelávania. Počas prípadovej štúdie bola nadviazaná a zaznamenávaná spolupráca s dvoma žiakmi, ktorí používali sebahodnotiace rubriky počas jedného tematického celku matematiky.

Kľúčové slová: Sebahodnotenie, sebahodnotiaci dotazník, rubriky, formatívne hodnotenie.
MESC: C20, C30, D70

Úvod

Formatívnemu hodnoteniu je dnes venovaných množstvo výskumov a materiálov. Môžeme ho označiť ako proces hodnotenia počas učenia sa, pričom v rámci formatívneho hodnotenia má žiak dostať spätnú väzbu na svoj výkon, poučiť sa zo svojich chýb, zlepšiť sa a posunúť sa vedomostne vpred (Wiliam, 2011). Formatívne hodnotenie je síce pre učiteľa náročnejšie a vyžaduje si isté zručnosti a skúsenosti, ale pre žiakov je o to prínosnejšie. Ukazuje sa, že práve táto cesta je vhodnou pre posun učenia sa na inú úroveň, a teda na posun od učenia sa poznatkov k ich porozumeniu (Wiliam, 2015). Na našom pracovisku sa problematike formatívneho hodnotenia venujeme z rôznych hľadísk. Z hľadiska úrovne formatívneho hodnotenia zo strany učiteľa sa ukazuje, že cielene proximálne a inštrumentálne hodnotenie pomocou rubrík má pozitívny vplyv na úroveň osvojovania vedomostí žiakov (Hubeňáková 2016). V tomto príspevku sa zaoberáme sebahodnotením žiakov, ktoré je súčasť formatívneho hodnotenia vo vyučovaní matematiky. Ukazuje sa, že žiaci tento druh hodnotenia vnímajú ako dôležitú súčasť vyučovacieho procesu a procesu učenia sa, a preto potrebujú dostať na hodinách naň priestor. Pritom je samozrejme dôležité správne používanie tohto nástroja. Sebahodnotenie môže zlepšiť klímu v triede, prispieť k rozvoju kritického myslenia, ako aj preniesť zodpovednosť za učenie na žiakov, a tým zvýšiť úroveň osvojovania vedomostí a zručností.

Sebahodnotenie ako nástroj formatívneho hodnotenia

Existuje množstvo definícií pojmu sebahodnotenia. Napríklad Andrade a Du (2007) zavádzajú pomocnú definíciu sebahodonotenia ako prostriedku formatívneho hodnotenia. Žiacke sebahodnotenie je súčasť procesu formatívneho hodnotenia, počas ktorého žiak zisťuje a hodnotí kvalitu svojej práce a učenia sa, ako aj stupeň svojej práce, ktorý jasne odzrkadľuje ciele alebo kritériá na identifikáciu silných a slabých stránok a umožňuje nápravu. Sebahodnotenie je potrebné rozvíjať, pretože videnie progresu v procese učenia má vplyv na žiacke učenie sa. Výhody tohto sebahodnotenia zhrnula Spiller (2012) v nasledujúcich bodoch:

- Sebahodnotenie buduje prirodzené nazeranie na pokrok vo vlastnom učení.
- Učenie je možné len po poznaní, toho čo má byť naučené.
- Žiacka identifikácia progresu v procese učenia sa, môže pôsobiť ako motivácia.
- Sebahodnotenie podnecuje k zamysleniu sa žiaka nad vlastným procesom učenia sa.
- Sebahodnotenie môže viesť žiaka k zodpovednosti a samostatnosti.
- Sebahodnotiace úlohy podnecujú v žiakovi zodpovednosť za svoje učenie.
- Sebahodnotiace úlohy podnecujú prepájanie vedomostí.
- Sebahodnotenie zdôrazňuje aspekt formatívneho hodnotenia.
- Sebahodnotenie podnecuje k zameraniu sa na proces učenia sa.
- Sebahodnotenie môže urovnať rozdiely medzi žiackou pripravenosťou, skúsenosťou a vzdelanostnými predpokladmi.

- Sebahodnotiaci tréning môže byť dobrým doladením výkonu učiteľa s dôrazom na žiacke učenie sa.
- Sebahodnotenie začína posúvať kultúru od prevládajúceho autoritatívneho hodnotenia učiteľom a zameriava sa na cestu a kvalitu učenia sa.
- Sebahodnotenie zdôrazňujúce žiacku zodpovednosť je potrebná schopnosť pre celoživotné učenie sa.
- Proces sebahodnotenia môže pomôcť pripraviť študentov, nielen na riešenie problémov, na ktoré vedia odpovedať, ale aj na tie ktoré nie sú v danom momente schopní vypočítať.
- Angažovanosť študentov pri formulácií kritérií pre sebahodnotiace úlohy im pomáha k hlbšiemu porozumeniu, čo môže znamenať kvalitnejšie výsledky v danej oblasti.

Formatívne hodnotenie môže prispieť k zlepšeniu výučby, ale toto zlepšenie výučby tiež môže súvisieť s ochotou, túžbou a schopnosťou učiť sa. (Harlen, Deakin Crik, 2002). Hoci nepoznáme najefektívnejšie prostredie výučby, existuje rad výskumov v poznávaní a motivácii, ktoré jasne ukazujú na nevyhnutnosť vlastnej aktivity študenta a jeho vlastného učenia sa.

Metodika výskumu

Tento kvalitatívny výskum pozostával z troch fáz, pričom v každej bola použitá iná metodika a každá išla viac do hĺbky problematiky. Prvá fáza pozostávala zo zberu dát pomocou sebahodnotiaceho dotazníka a didaktického testu s následnou analýzou a porovnávaním takto zozbieraných dát žiakov druhého ročníka gymnázia. Táto fáza výskumu bola zameraná na výskumnú otázku: Dokáže žiak správne ohodnotiť svoje vedomosti vo vybranom matematickom učive? Táto fáza slúžila ako prvotné nahliadnutie na triedu a na reálne ohodnotenie vlastných schopností žiakmi.

V druhej fáze výskumu sme skúmali výskumné otázky:

- Ako žiak vníma svoje sebahodnotenie?
- Ako žiak hodnotí svoje slabé a silné stránky?
- Považuje žiak sebahodnotenie za podstatnú časť formatívneho hodnotenia?
- V čom bol rozdiel medzi sebahodnotiacim dotazníkom a hodnotením písomky?
- Čo bolo podľa žiaka príčinou nezrovnalosti sebahodnotenia a hodnotenia učiteľom v situácii, keď žiak precenil svoje poznatky resp. zručnosti?
- Čo bolo podľa žiaka príčinou nezrovnalosti sebahodnotenia a hodnotenia učiteľom v situácii, keď žiak podcenil svoje poznatky resp. zručnosti?

Táto časť výskumu prebiehala pomocou riadeného rozhovoru s piatimi žiakmi z pôvodnej vzorky a bola zameraná na pohľad žiaka na vlastné sebahodnotenie. Žiaci boli vybraní tak, aby boli zastúpené rôzne skupiny žiakov. To znamená, že z pôvodnej vzorky sme náhodne vybrali zo skupín študentov, ktorí podhodnotili svoj výkon v didaktickom teste v prvej fáze výskumu, študentov, ktorí nadhodnotili svoj výkon a taktiež študenta, ktorý správne ohodnotil svoj výkon a súčasne mali študenti rôzne známky z matematiky na vysvedčení. Tretia fáza výskumu bola zameraná na hlbšie preskúmanie žiackeho sebahodnotenia pomocou prípadovej štúdie s použitím sebahodnotiacich rubrík. Z predchádzajúcej vzorky sme vybrali dvoch žiakov, ktorí mali rôznu úroveň matematických schopností a považovali sebahodnotenie za dôležitú súčasť vyučovania. So žiakmi sme sa stretávali po vyučovaní, pričom sme sa zameriavali na prácu so sebahodnotiacimi rubrikami. Počas stretnutí sme so žiakmi pracovali so sebahodnotiacimi rubrikami v konštruktivisticky zameranom vyučovaní. Žiaci sa na stretnutiach zoznámili s rubrikami aj s používanou metodikou, pričom dostali materiály aj v elektronickej podobe po stretnutí. Dopredu materiály k dispozícii nemali, z dôvodu autenticity. Žiacke riešenia boli nahrávané pomocou technológie smartpen a následne niekoľkokrát prehrávané a dôkladne analyzované.

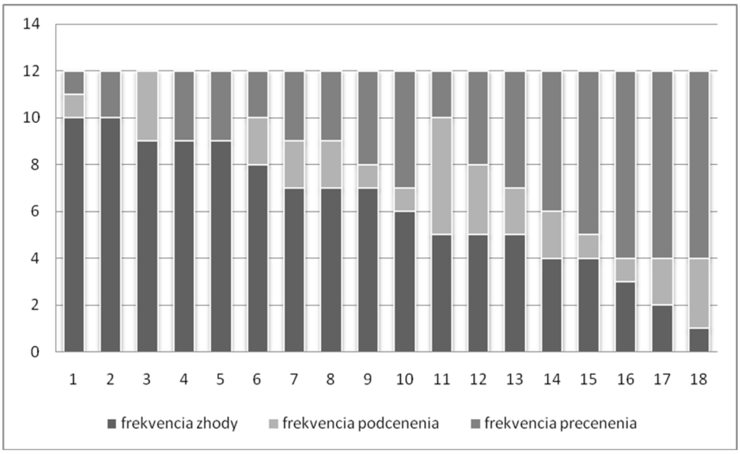
Výsledky výskumu

V prvej fáze výskumu, ktorá slúžila ako pilotná, bol vytvorený dotazník k didaktickému testu, ktorý obsiahol učivo lineárne lomenej a mocninovej funkcie, iracionálnej rovnice a kvadratickej rovnice s parametrom a bol vypĺňaný pred didaktickým testom. Didaktický test každého zo žiakov bol kvalitatívne analyzovaný a porovnaný so sebahodnotiacim dotazníkom žiaka.

		Viem	Mám s tým problém	Neviem
4B	Viem ako vyzerá predpis lineárne lomenej funkcie.			
5B	Viem zjednodušiť všeobecnú lineárne lomenú funkciu napríklad na nepriamu úmernosť.			
6B	Viem zakresliť graf lineárne lomenej funkcie.			
7B	Viem určiť vlastnosti lineárne lomenej funkcie.			

Obrázok 1. Ukážka sebahodnotiaceho dotazníka vytvoreného k testu

V tejto fáze výskumu sme analýzou a porovnávaním zistili, že len polovica žiakov sa správne ohodnotila aspoň v polovici komponentov učiva. Tento výsledok sme spracovali vo forme stĺpcového grafu. Pričom stĺpec v grafe zodpovedá odpovediam jedného žiaka. Spodná, najtmavšia časť stĺpca označuje frekvenciu zhody znalostí so sebahodnotením žiaka. Najsvetlejšia označuje frekvenciu nezrovnalostí, kedy sa žiak podhodnotil a posledná časť grafu označuje frekvenciu nadhodnotenia žiakových vedomostí. Analýza ukázala, že u žiakov ktorí sa nevedeli reálne ohodnotiť, oveľa častejšie ako podhodnotenie sa prejavovalo nadhodnotenie ich vedomostí a schopností.



Obrázok 2. Frekvencia zhody, podhodnotenia a nadhodnotenia vedomostí uvedených v sebahodnotiacom dotazníku

V druhej fáze sme sa teda rozhodli analyzovať dôvody týchto rozdielov medzi sebahodnotením a didaktickým testom, pričom otázky boli zamerané na dôvody žiackeho podhodnotenia poznatkov a dôvody žiackeho nadhodnotenia poznatkov.

Žiacke podhodnotenie považujeme za lepší prípad, to znamená, že žiak mal pocit, že v danej oblasti má medzery a počas didaktického testu sa ukázalo, že danú úlohu vedel vyriešiť. V tejto časti nás hlavne zaujímalo, čo viedlo žiaka k tomu, že pri danej úlohe uviedol, že má problém, respektíve, že dané učivo „nevie“. Na túto otázku žiaci odpovedali, že tento pocit nadobudli s prihliadaním na úlohy, ktoré mali k dispozícii a prepočítali ich. Na otázku čo napokon spôsobilo, že danú úlohu vyriešili, žiaci odpovedali, že sa im to zdalo ľahké, resp. postupným skúšaním na to dotyčný žiak napokon prišiel.

Vznik nezrovnalostí, kedy žiak podhodnotil svoje schopnosti, vidíme hlavne problém v žiackom kritérií sebahodnotenia, v učení algoritmov a faktov bez hlbšieho porozumenia žiakom. Teda ukazuje sa nám, že ak sa žiak učí fakty a algoritmy bez porozumenia poznatkov, jeho sebahodnotenie môže viesť k podhodnoteniu. Ak si žiak nie je istý daným učivom, zamyslením a konštruktivistickým prístupom danú úlohu môže vyriešiť, zatiaľ čo skúšaním možností, sa k riešeniu môže dostať žiak len ojedinele s veľkou dávkou šťastia. Ak žiak nadhodnotil svoje vedomosti a zručnosti, teda v dotazníku ohodnotil, že danú úlohu vie riešiť, bol si vedomý svojej znalosti, ktorá však v didaktickom teste chýba. Pri otázke čo žiakov viedlo k tomu, že pri danej úlohe uviedli, že ju vedia vyriešiť a čo podľa nich spôsobilo to, že urobili danú chybu, sa objavili dva druhy odpovedí. Prvou žiaci ospravedlňovali svoje chyby v didaktickom teste napríklad nepozornosťou, nesprávnym prečítaním úlohy. Tento typ chýb je podľa nás bežný práve u šikovných žiakov, ktorí prepočítali množstvo úloh, a teda chyba z nepozornosti alebo zle prečítanie úlohy je síce veľkým problémom žiakov, ale keďže nesúvisí so sebahodnotením, nezaoberali sme sa ňou. Druhým spôsobom odpovedali žiaci, ktorí ospravedlňovali svoje sebahodnotenie neporozumením, alebo nebrali do úvahy úroveň osvojenia danej vedomosti resp. zručnosti. Tu naopak vidíme problém v nedostatočnej úrovni osvojenia daného učiva a nedostatočnou prípravou na hodiny matematiky. Práve u takýchto žiakov, ktorí nadhodnocujú svoje vedomosti z dôvodu nedostatočnej pripravenosti považujeme za dôležité rozvíjať sebahodnotenie a klásť väčší dôraz na hlbšie porozumenie učiva.

Zaujímala nás tiež žiacka predstava o tom, či by učiteľ matematiky mal poznať ich sebahodnotenie. Ukazuje sa, že žiaci cítia potrebu záujmu zo strany učiteľa. Žiaci uvádzajú, že pre učiteľa by malo byť dôležité poznať ich pohľad na to, koľko sa naučili. Tu sa ukazuje potreba záujmu zo strany učiteľa a teda ich pohľad na to, že učiteľ by mal naozaj viac využívať túto časť hodnotenia. Traja žiaci potvrdili, že vidia prínos v zavedení sebahodnotenia do výučby. Zvyšní dvaja boli názoru, že to zaberá množstvo zbytočného času a otravuje ich to. Čo sa týka samotného návrhu, ako by učiteľ informáciu o tomto sebahodnotení jednotlivých žiakov mohol zužitkovať, žiaci sa zhodli na tom, že sebahodnotenie môže mať využitie najmä pri spätnej väzbe. Je zaujímavé, že každý z nich spomenul spätnú väzbu, ale len dvaja v súvislosti s formatívnym hodnotením. Podľa nás zakomponovanie sebahodnotenia pomocou sebahodnotiacich dotazníkov do procesu fixácie učiva a sebahodnotiacich rubrík do procesu osvojovania učiva by mohlo zlepšiť spätnú väzbu pre učiteľa.

	1.úroveň	2.úroveň	3.úroveň	4.úroveň
Rezy telies	Zostrojenie rezu štvorstena.	Zostrojenie rezu ihlana pomocou pomocného bodu v podstave.	Zostrojenie rezu mnohostena cez niekoľko rozličných krokov.	Zostrojenie rezu netypického telesa.

Obrázok 3. Príklad sebahodnotiacej rubriky k učivu Rezy telies

Tretia fáza výskumu bola zameraná na prácu so sebahodnotiacimi rubrikami a sériou úloh, ktoré by žiakom mohli pomôcť hlbšie rozvíjať porozumenie učivu. Počas tohto obdobia si žiaci po hodinách matematiky okrem iného mali viesť sebahodnotiace hárky, ktoré obsahovali preberané učivo a záznam, čo sa žiaci na danej hodine naučili.

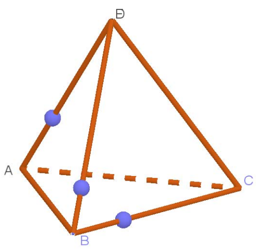
Na obr. 3 uvádzame príklad sebahodnotiecej rubriky k učivu rezy telies. Séria úloh vytvorená k tejto rubrike bola takáto:

1. úroveň: Zostrojte rez pravidelného štvorstena na obr. 4 rovinou a zapíšte postup konštrukcie tohto rezu.

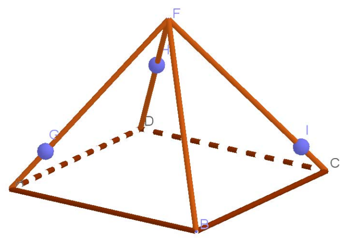
2. úroveň: Zostrojte rezy pravidelného 4-bokého ihlana na obr. 5 a zapíšte postup konštrukcie tohto rezu.

3. úroveň: Zostrojte rez pravidelného 6-bokého ihlana na obr. 6 rovinou a zapíšte postup konštrukcie tohto rezu.

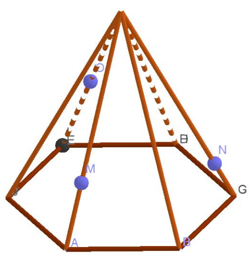
4. úroveň: Zostrojte rez pravidelného oktaédra na obr. 7 a zapíšte postup konštrukcie tohto rezu.



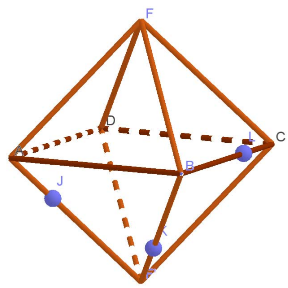
Obrázok 4



Obrázok 5



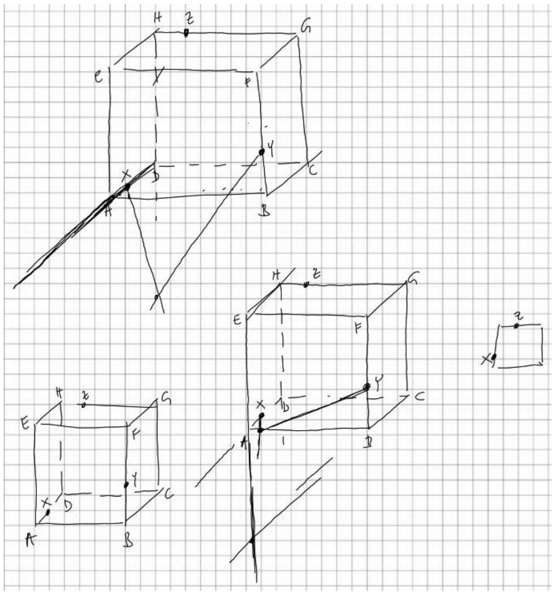
Obrázok 6



Obrázok 7

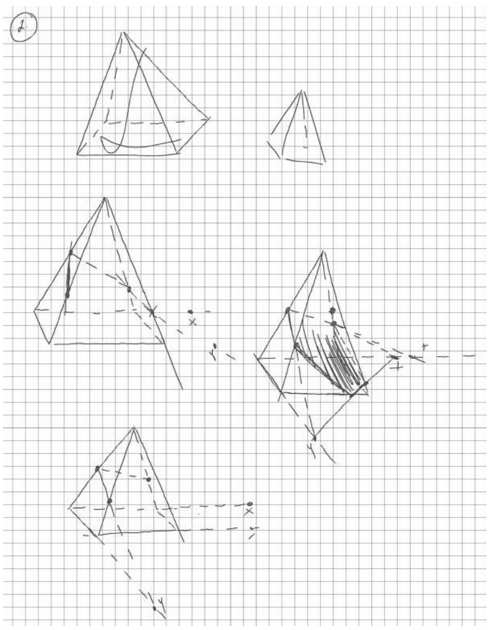
Stretnutia boli veľmi prospešné, v žiackom sebahodnotení sa zo začiatku objavoval vplyv vyučovacích hodín, kedy často žiaci považovali za to isté „bolo nám vysvetlené" a „rozumieme". Progres v chápaní úrovní učenia sa bolo vidieť počas našich stretnutí stále viac, či už v žiackych riešeniach alebo žiakmi položených otázkach, respektíve odpovediach. Porozumenie poznatkom sa stretnutiami naozaj prehlbovalo. Napríklad u Evky sa počas prvých stretnutí často objavovalo náhodné hľadanie priesečníkov, dokonca priesečník dvoch mimobežných priamok ako EA a CB. Zatiaľ čo Dominik, ako dobrý žiak, sa skôr pokúšal spomenúť si na riešenie počas vyučovania, ale po čase od toho upustil a viac sa zaoberal samotným riešením ako spomínaním na postup riešenia.

Na ďalších stretnutiach ich riešenia obsahovali aj komentár čo robia a vysvetlenia prečo takýto krok môžu urobiť. Riešenie na obr. 9 bolo napríklad vyargumentované takmer dokonale.



Obrázok 8. Žiacke riešenie

Samozrejme, že progres nemôžeme prehlásiť len za následok používania sebahodnotiacich rubrík, keďže žiaci sa venovali matematike viac, ako len počas vyučovania a svoj vplyv mali iste aj konštruktivisticky ladené série úloh. Ale aj napriek tomu sme považovali poznanie krátkej spätnej väzby od žiakov, ktorí s nami spolupracovali, za podstatnú časť tohto výskumu. Žiaci mali z našej spolupráce príjemný pocit. Žiaci uvádzajú, že ich to nútilo „niečo robiť“. Evka: „bez tohto, by to pravdepodobne bola úplná ignorácia tohto učiva.“ Sebahodnotiace hárky slúžili žiakom skôr na triedenie a plán učiva, ale mohli by slúžiť aj ako spätná väzba. Žiaci tiež uvádzajú, že pokiaľ si triedia informácie o učive na hodine, doma sa k tomu už nevrátia. Žiaci hodnotia naše stretnutia veľmi pozitívne a tvrdia, že naozaj porozumeli tomuto učivu. Sebahodnotiace rubriky sa žiakom páčili najviac a ich využitie ocenili. To, že žiaci museli ohodnotiť svoje schopnosti a videli, čo všetko ešte musia spraviť na to, aby boli na úrovni, akú by si predstavovali. „Mám veci rada organizované. A toto bolo tak pekne vidieť, čo je najťažšie a čo je najjednoduchšie." Z týchto vyjadrení vidieť, že žiaci oceňujú práve prehľadnosť systému tejto práce. Dokonca priznávajú, že hoci vzťah ku geometrii bol negatívny, vzťah k učivu stereometrie, vďaka porozumeniu je oveľa lepší. Žiaci dokonca pociťujú sklamanie, že sa toto učivo nebude nachádzať vo výstupnom teste z matematiky.



Obrázok 9. Žiacke riešenie

Záver

Výskum ukázal, že žiaci často dokážu reálne zhodnotiť svoje znalosti pri jednoduchých typových úlohách. Zistili sme, že žiaci hodnotia svoje vedomosti prevažne pomocou prepočítania si typových úloh. Taktiež sme zistili, že žiaci považujú sebahodnotenie za prínosné a uvítali by priestor na jeho rozvíjanie. Výskum priniesol zistenie, že u žiakov učiacich sa typovo jednoduchšie úlohy bez hlbšieho porozumenia sa, v sebahodnotení častejšie vyskytovalo práve nadhodnotenie. Mohlo by to byť spôsobené práve nevedomosťou o úrovniach učenia sa. Vedomosť o úrovniach učenia môže prispieť k žiackemu porozumeniu a teda progresu v procesu učenia sa. Práve preto považujeme za potrebné rozvíjať u žiakov sebahodnotenie, ktoré by bolo vhodné zahrnúť do vyučovacieho procesu, pričom sebahodnotenie by nemalo byť len formálnym zhrnutím faktov a algoritmov. Odporúčame učiteľom rozvíjať u žiakov sebahodnotenie v rôznych úrovniach (napríklad pomocou hodnotiacich rubrík), teda zahrnúť do sebahodnotenia aj širšie porozumenie poznatkov, resp. zručností, ktoré sú vo výučbe matematiky a v ďalšom živote žiaka podstatné.

Literatúra – References

[1] ANDRADE, H., DU, Y., Student responses to criteria-referenced self-assessment. Assessment and Evaluation in Higher Education, Vol 32, No 2, 2007, 159 – 181. http://dx.doi.org/10.1080/02602930600801928

[2] HARLEN, W., DEAKIN CRICK, R., A systematic review of the impact of summative assessment and tests on students´ motivation for learning. London EPPI – Centre, Social Science Research Unit, Inst

[3] HUBEŇÁKOVÁ, V., Meranie kvality matematického vzdelávania – Rubriky na meranie kvality formatívneho hodnotenia, dizertačná práca. Košice, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, 2016.

[4] SPILLER, D., ASSESSMENT MATTERS: Self-Assessment and Peer Assessment, Teaching Development Unit, Wähanga Whakapari Ako, 2012.

[5] WILIAM, D., Embedded Formative Assessment. Bloomington: Solution Tree Press, 2011.

[6] WILIAM, D., LEAHY, S., Embedding Formative Assessment. West Palm Beach: Learning Sciences International, 2015.

Adresa autora:

Timea Gábová, Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Jesenná 5, 040 01 Košice.
e-mail: timea.gabova@student.upjs.sk

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2020 (49)

Erupcie pre matematikov

Erika Fecková Škrabuľáková

Abstract [Eruptions for mathematicians]: In this paper we present a tradition of Conference of Košice Mathematicians that took place in the village Herľany in the east of Slovakia, known for its unique cold-water geyser. Over twenty years ago, in this enchanting environment, a joint discussion forum for scientists, applied mathematicians and mathematics teachers was created in order to share, seek and find solutions to scientific, didactic and educational problems. The paper is also an informal invitation to the 21st Conference of Košice Mathematicians.

Key words: geyser, Herľany, Conference of Košice Mathematicians

Súhrn: Tento príspevok pojednáva o tradícii Konferencie košických matematikov v dedinke Herľany na východe Slovenska, ktorá je známa svojim unikátnym studenovodným gejzírom. V tomto čarokrásnom prostredí bolo pred vyše dvadsiatimi rokmi vytvorené spoločné diskusné fórum pre vedcov, aplikovaných matematikov i učiteľov matematiky, kde môžu zdieľať, hľadať a nachádzať riešenia vedeckých, didaktických i pedagogických problémov. Príspevok je zároveň i neformálnou pozvánkou na 21. ročník Konferencie košických matematikov.

Kľúčové slová: gejzír, Herľany, Konferencia košických matematikov

MESC: 01-06, 01A74

Úvod

Rôzne kúty Slovenska sú známe svojimi liečivými prameňmi, minerálnymi vodami i krásnou prírodou, no len v Herľanoch sa nachádza unikátny prírodný úkaz aktivovaný ľudskou činnosťou – nízkotermálny gejzír (pozri obrázok na nasledujúcej strane). Herliansky gejzír je od roku 1987 národná prírodná pamiatka s plochou chráneného územia 19 125 m^2 a v rokoch 1957 – 2006 bol jediným studeným gejzírom v Európe ([2]).

Za svoj vznik vďačí vrtu z 19. storočia, ktorý mal zabezpečiť dostatok minerálnej vody do miestnych kúpeľov. S vŕtaním bolo započaté v roku 1870. Pri hĺbke 172 m 16. 8. 1872 nastala prvá cca päťminútová erupcia do výšky 4 m. Ďalšia erupcia 4. 7. 1873 z hĺbky 275 m bola taká silná, že prerazila strechu vrtnej veže vysokej 20 m. K častejším erupciám dochádzalo na prelome rokov 1873 – 1874 a v dňoch 15. – 25. 10. 1874 bola dokonca zaznamenaná súvislá erupcia po dobu 10 dní, keď vrt dosiahol hĺbku 330 m. Voda striekala do výšky až 112 m. Vŕtanie bolo ukončené po dosiahnutí hlavného artézskeho horizontu 6. 5. 1875 v hĺbke 404,5 m. Zapaženie vrtu siaha do hĺbky 351 m ([4]).

Herliansky gejzír počas svojej existencie eruptoval už vyše 40 000-krát. Erupčné intervaly sa postupne z 8 – 9 hodín koncom 19. storočia predĺžili na súčasných 34 – 36 hodín. V roku 2016 bol zrekonštruovaný z finančných prostriedkov envirofondu SR a Technickej univerzity Košice, čím sa výška erupcie gejzíru zvýšila z asi 15 m na 22 m a trvá približne 25 minút ([4], [5]).

Erupcie gejzíru lákajú do malej dedinky na východe Slovenska mnohých návštevníkov už vyše storočie. Niektorí sem prichádzajú len za krásami prírody, motivácia iných je posilnená vedeckými pohnútkami. Nie nadarmo sa práve tu nachádza *Učebno-výcvikové zariadenie Herľany* Technickej univerzity v Košiciach.

V jarných mesiacoch toto miesto ožíva i matematikou v jej najrôznejších podobách. Len 28 km od Košíc sa už vyše dvadsať rokov stretávajú matematici aby diskutovali na im blízke vedecké i pedagogické témy a v priateľskej atmosfére rozhovorov hľadali a nachádzali riešenia vedeckých, odborných i odborových problémov.

Gejzír v Herľanoch

1 Dve dekády stretnutí

Predstava spoločného fóra pre ľudí profesionálne sa zaoberajúcich matematikou žijúcich na východe Slovenska – pre učiteľov, vedcov i aplikovaných matematikov, vznikla na pôde košickej pobočky Jednoty slovenských matematikov a fyzikov koncom deväťdesiatych rokov. V tom čase ju viedol Dr.h.c. prof. RNDr. Stanislav Jendroľ, DrSc. Myšlienka založenia tradície pravidelných serióznych konferencií s kvalitným obsahom garantovaným hlavne pozvanými prednáškami sa čoskoro pretvorila do reality, a tak sa už 17. – 18. apríla 1998 mohol konať prvý ročník *Konferencie ko-*

šických matematikov. Od toho času sa táto koná v Herľanoch každoročne (s výnimkou rokov 2000 a 2004).

Z blízka i z ďaleka

V roku 2019 sa v Herľanoch konal jubilejný 20. ročník Konferencie košických matematikov (pozri fotografiu na nasledovnej strane). Jej názov by mohol zavádzať, že táto platforma bola a je vytvorená len pre matematikov z Košíc a blízkeho okolia. No nie je to tak. Počas uplynulých rokov hostila mnoho osobností z rôznych kútov sveta [1]:

- Bulharsko: doc. J. Chaparova;
- Česko: prof. RNDr. dr. Hab. J. Andres, DSc.; doc. RNDr. J. Demel, CSc.; prof. RNDr. M. Demlová, CSc.; prof. RNDr. M. Fiedler, DrSc.; prof. RNDr. M. Gavalec, CSc.; prof. RNDr. M. Koman, CSc.; prof. RNDr. J. Kopka, CSc., prof. emeritus; doc. Mgr. P. Kovář, Ph.D.; prof. RNDr. F. Kuřina, CSc., prof. emeritus; doc. Mgr. R. Mařík, Ph.D.; prof. RNDr. J. Molnár, CSc.; RNDr. P. Olšák; prof. Ing. E. Pelantová, CSc.; RNDr. R. Plch, Ph.D.; doc. RNDr. F. Staněk, Ph.D.; doc. RNDr. J. Šustek, PhD.; prof. RNDr. K. Zimmermann, DrSc.;
- Indonézia: Dr. S. W. Saputro, M.Si.;
- Maďarsko: prof. V. Olah; Dr. rer. nat. A. Recski, Dr. Math. Sci.;
- Nemecko: Prof. Dr. A. Kemnitz; Prof. Dr. M. Lukáčová-Medpozriová; Prof. Dr. rer. nat. habil. I. Schiermeyer; O. Univ. – Prof. Dr. Peter Zinterhof, prof. emeritus.;
- Poľsko: Prof. M. Ciosek; Dr. J. Chudziak; Dr. hab. inż. P. Faliszewski, PhD.; Dr. hab. W. Foryś, prof. UJ; Dr. hab. R. Kalinowski; Prof. Dr. hab. A. Plocki; Dr. hab. J. Przybyło, Ph.D.;
- Rusko: prof. I. V. Puzynin;
- Slovinsko: Dr. B. Lužar, PhD.;
- Ukrajina: prof. Dr. A. Chechkin;
- USA: Prof. Dr. R. Ball.

Tento zoznam, i keď je dlhý, je len zoznamom mien pozvaných prednášajúcich zo zahraničia na minulých ročníkoch konferencie, neobsahuje mená prihlásených účastníkov konferencie z cudziny.

Prirodzene, zoznam pozvaných prednášajúcich predchádzajúcich ročníkov konferencie neobsahuje len významné zahraničné mená. Nachádzajú sa v ňom i známe mená matematikov pôsobiacich na Slovensku, napríklad: prof. RNDr. M. Bača, CSc., prof. RNDr. L. Bukovský, DrSc., prof. emeritus, prof. RNDr. K. Cechlárová, DrSc., Dr.h.c. prof. RNDr. S. Jendroľ, DrSc., prof. RNDr. I. Podlubný, DrSc., prof. RNDr. B. Riečan, DrSc., prof. RNDr. J. Širáň, DrSc., ako aj mnohé ďalšie. Menoslov prednášajúcich zo Slovenska je naozaj dlhý, no už i táto jeho krátka ukážka svedčí o vedeckej

Účastníci 20. Konferencie košických matematikov

významnosti tohto podujatia. Predniesť pozvanú prednášku sú však pravidelne pozývaní i učitelia stredných škôl (Gymnázium Alejová 1 v Košiciach, Gymnázium Pavla Horova v Michalovciach, Gymnázium Poštová 9 v Košiciach, Gymnázium Šrobárova 1 v Košiciach…, [1]). Vítané sú i postrehy ľudí z komerčnej sféry.

Prvé kroky

Využite potenciálu vedomostí a skúseností získaných od starších kolegov počas dvoch dekád pravidelných stretnutí matematikov v Herľanoch sformovalo niekoľko dnes už známych slovenských osobností matematiky. I teraz je toto plénum prínosom najmä pre mladých kolegov a PhD. študentov na začiatku ich profesionálnej kariéry, odrazovým mostíkom k vyšším métam. Neraz títo práve tu zažili svoje prvé verejné vystúpenie, konferenčnú prednášku, či akademickú diskusiu.

I dnes zvlášť prítomní študenti oceňujú, že konferenčným jazykom nie je len angličtina, ale i slovenčina a čeština. Priateľská atmosféra im dodáva odvahu k prvej prezentácii, pomáha nájsť správne slová na formuláciu otázok či odpovedí.

O slovo sa hlási gejzír

Počas 20 ročníkov Konferencie košických matematikov bolo možné zistiť optimálny rámec jej trvania. Písomný záznam o erupcii gejzíru počas prvej Konferencie košických matematikov sa v záznamoch košickej pobočky Jednoty slovenských matematikov a fyzikov nenachádza. Isté je, že dokumenty týkajúce sa druhého stretnutia, ktoré, rovnako ako to prvé, trvalo dva dni (9. – 10. 4. 1999), s ľútosťou konštatujú, že sa gejzír do programu nezapojil. Eruptoval až v sobotu podvečer, kedy ho už asi nesledoval nik, kto sa profesionálne živí matematikou ([3]). Tretie stretnutie už bolo naplánované na tri dni: 29. – 31. 3. 2001. Vzhľadom na interval erupcií možno i bez písomných záznamov konštatovať, že k erupcii gejzíru počas tretej Konferencie košických matematikov došlo.

S rastúcim počtom účastníkov bola počas niekoľkých rokov doba trvania konferencie zmenená z troch na štyri dni, počas ktorých sa gejzír predstavil opakovane. Akademické povinnosti uprostred letného semestra spolu s inými aktivitami však boli v kolíznom vzťahu so štvordňovou konferenciou. Aj preto sa napokon od štyroch konferenčných dní upustilo a ostatné ročníky mali optimálny trojdňový rámec s aspoň jednou garantovanou erupciou gejzíra pre matematikov.

Unikátnosť gejzíru, prirodzene, organizátori oceňujú, a tak, keď sa o slovo hlási gejzír, dôjde k operačnému posunu časového harmonogramu konferencie. Čas najbližšej erupcie je zverejnený na stránke obce Herľany a je možné ho odhadnúť len podľa času poslednej známej erupcie, pričom je vypočítavaný v nie vždy fixnom intervale 34 – 36 hodín ([5]). Preto pri príprave programu podujatia nie je možné v ňom vytvoriť presné časové okno pre gejzír.

V zmysle tradície je prvý deň konferencie zameraný na mladých matematikov, najmä doktorandov, kým pozvané prednášky sú sústredené hlavne do piatkového a sobotňajšieho programu. Počas piatkového spoločenského večera sú nadväzované a upevňované neformálne vzťahy, nechýba pieseň, či hudba.

2 Záver

Herľany boli, sú a budú navštevované vďaka svojim prírodným klenotom. Veríme, že i Konferencia košických matematikov, ktorá sa tu organizuje, je a bude lákavým odborným fórom pre učiteľov matematiky i vedcov zaoberajúcich sa rôznymi jej oblasťami. Tohto roku sa v poradí už jej 21. ročník uskutoční výnimočne v septembrovom termíne a to 24. – 26. 9. 2020. Dúfame, že tento príspevok ako neformálna pozvánka osloví i tých, ktorých kroky doposiaľ na ňu nezaviedli, a že erupcie staručkého gejzíru budú tešiť matematikov i v ďalších rokoch počas mnohých nasledujúcich ročníkov konferencie.

Literatúra – References

[1] JSMF – pobočka Košice: *Interné záznamy o Konferencii košických matematikov za roky 1998 – 2019*
[2] Estefan: *Herliansky gejzír* www.estefan.sk/slovensko/slanske-vrchy/herliansky-gejzir.
[3] Gavalcová T.: *Druhá konferencia košických matematikov*, rukopis 1999, 1–2.
[4] Obec Herľany: *Herliansky gejzír* www.obecherlany.sk/-narodna-prirodna-pamiatka-herliansky-gejzir.
[5] Obec Herľany: *Národná prírodná pamiatka Herliansky gejzír* www.obecherlany.sk/-narodna-prirodna-pamiatka-herliansky-gejzir.

Adresa autora:

Fakulta baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií
Technická univerzita v Košiciach, Boženy Němcovej 3, 040 01 Košice
e-mail: erika.feckova.skrabulakova@tuke.sk

Pobočka JSMF Košice
Ústav matematických vied PF UPJŠ
Ústav riadenia a informatizácie výrobných procesov FBERG TUKE
pobočka Slovenskej spoločnosti aplikovanej kybernetiky a informatiky
pri ÚRIVP FBERG TUKE
Slovenská akadémia vied

Vás srdečne pozývajú na

21. KONFERENCIU KOŠICKÝCH MATEMATIKOV
v Herľanoch,
ktorá sa uskutoční v dňoch **24. – 26. septembra 2020**.

Cieľom konferencie je zintenzívniť stavovský život všetkých, ktorí sa v Košiciach a okolí profesionálne zaoberajú matematikou (t. j. učiteľov všetkých typov škôl, pracovníkov na poli matematických a informatických vied a aplikácií matematiky v priemysle, technike, bankovníctve a inde) a formulovať základné oblasti ich stavovských záujmov. Konferencia sa uskutoční v Učebno-výcvikovom zariadení TUKE v Herľanoch. Stravovanie sa začína obedom 24. septembra 2020 o 12:30 hod. a končí obedom 26. septembra 2020 o 11:00 hod. Odborný program bude pozostávať z pozvaných prednášok, prihlásených referátov a diskusií o stavovských problémoch. Program začne vo štvrtok podľa počtu prihlásených (ráno alebo poobede). Organizátori očakávajú aktívnu účasť mladých matematikov, najmä doktorandov, ktorí na konferencii môžu prezentovať vlastné výsledky a dozvedieť sa o práci svojich košických kolegov. Štvrtkový program bude venovaný najmä prezentácii výsledkov mladých (nielen košických) matematikov a doktorandov. Piatkový a sobotňajší program bude pozostávať z prednášok pozvaných prednášateľov, prezentácie prihlásených referátov a diskusií, ako aj bloku prednášok zameraných na didaktiku a vyučovanie matematiky.

Pozvanie prednášať dosiaľ prijali:
RNDr. Zuzana Chladná, Dr. rer. soc. oec. (FMFI UK, Bratislava),
doc. Mgr. Ján Karabáš, PhD. (FPV UMB, Banská Bystrica),
RNDr. Daniel Klein, PhD. (PF UPJŠ, Košice),
RNDr. Jana Krajčiová, PhD. (Gymnázium Alejová 1, Košice),
doc. RNDr. Edita Mačajová, PhD. (FMFI UK, Bratislava),
Mgr. Jan Širůček, Ph.D. (FSS MU, Brno),
Mgr. Martina Tischlerová (Gymnázium Poštová 9, Košice).

Vložné: 14 € pre členov SSAKI+JSMF, 19 € pre členov SSAKI, 24 € pre členov JSMF a 30 € pre nečlenov.

Vo vložnom sú o. i. zahrnuté obvyklé konferenčné materiály, zborník abstraktov konferenčných prednášok, občerstvenie počas prestávok na kávu, pitný režim počas prednášok a spoločenský večer. Pobočka JSMF v Košiciach Vám môže redukovať vložné, a to na základe Vašej žiadosti adresovanej predsedovi pobočky JSMF v Košiciach (jozef.dobos@upjs.sk).

Ubytovanie je pre účastníkov pripravené v dvojposteľových a trojposteľových izbách. Cena za jeden nocľah v ubytovacích domoch GEJZÍR a BRANISKO je 10,33 € pre zamestnancov TUKE a 12,33 € pre ostatných účastníkov konferencie. V prípade požiadavky na samostatnú izbu, ak to kapacita dovolí, je cena 20,33 € pre zamestnancov TUKE a 24,33 € pre ostatných účastníkov konferencie. Stravné: raňajky 3 €, obed 5 €, večera 4,50 €.

Tieto poplatky možno uhradiť priamo na mieste konania konferencie alebo poslať na účet pobočky JSMF v Košiciach: č. účtu SK88 0900 0000 0000 8212 5797 v Slovenskej sporiteľni (bankovým prevodom, nie poštovým poukazom), pričom do správy pre prijímateľa je potrebné uviesť meno a priezvisko účastníka konferencie, za ktorého sa platba realizuje. Ak máte záujem o účasť na konferencii, prihláste sa, prosíme, do 9. 9. 2020 prostredníctvom prihlasovacieho systému, ktorý nájdete na stránke konferencie https://jsmf.fberg.tuke.sk. Pod špeciálnym prianím v záväznej prihláške sa rozumie, napríklad, vegetariánska strava, účasť rodinných príslušníkov (špeciálne detí – tu sa poplatky dohodnú na mieste podľa veku), spoločné ubytovanie a pod. V prípade, že máte záujem o aktívnu účasť na konferencii, na adresu kkm.herlany@gmail.com zašlite do 9. 9. 2020 aj abstrakt Vašej prednášky v angličtine. Vzor abstraktu v požadovanom .tex formáte nájdete na stránke https://jsmf.fberg.tuke.sk. Konferenčnými jazykmi sú slovenčina, čeština a angličtina. Prípadné nejasnosti prekonzultujte, prosíme, elektronickou poštou na adresu kkm.herlany@gmail.com.

Tešíme sa na stretnutie v Herľanoch.

Za organizačný výbor
RNDr. Erika Fecková Škrabuľáková, PhD.
tajomníčka pobočky JSMF, pobočka Košice

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2020 (49)

O paradoxech ve speciální teorii relativity

Michal Křížek

Abstract [On Paradoxes in the Special Theory of Relativity]: The Special Theory of Relativity predicts several phenomena which, however, can manifest themselves in a different way to an observer due to the finite speed of light, the Doppler effect and aberration of light. In this article we concentrate on the length contraction. For example, we show that under certain conditions a bar on a photograph may seem to have the same length at rest as for a relativistic speed.

Key words: Lorentz transformation, theory of groups, inertial systems, time dilatation, length contraction

Souhrn: Speciální teorie relativity předpovídá několik jevů, které se ale pozorovateli mohou jevit jinak v důsledku konečné rychlosti světla, Dopplerova jevu a aberace světla. V článku se soustředíme na kontrakci délek. Ukážeme například, že za určitých podmínek může mít tyč na fotografii stejnou délku jak v klidu, tak i pro relativistickou rychlost.

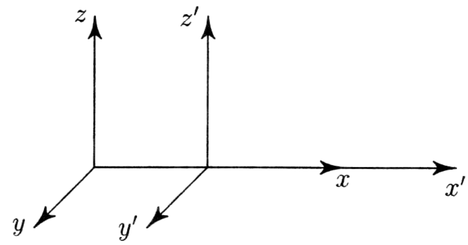
Klíčová slova: Lorentzova transformace, teorie grup, inerciální systémy, dilatace času, kontrakce délek

MESC: M50

Úvod

Podle Newtonova prvního zákona setrvačnosti je těleso v klidu nebo vykonává rovnoměrný přímočarý pohyb, není-li vnějšími silami nuceno tento stav změnit. Tento fundamentální fyzikální princip slouží k zavedení tzv. inerciálních soustav ve speciální teorii relativity, viz [1]. Uvažujme pevnou souřadnicovou soustavu S s pravoúhlými osami x, y, z, v níž je nehybný systém hypotetických synchronizovaných hodin které definují časovou souřadnici t. Nechť S' je soustava s pravoúhlými osami x', y', z', které jsou pro jednoduchost rovnoběžné s x, y, z. Čas t' v S' se zavádí podobně pomocí nehybného systému synchronizovaných hodin v S'.

Nechť se počátek S' posunuje po ose x konstantní rychlostí $v \in (-c, c)$, kde c je rychlost světla ve vakuu.[1] Soustavy S a S' se tedy navzájem pohybují rovnoměrně a přímočaře a budeme je nazývat *inerciální* (viz obr. 1).



Obrázek 1. Inerciální soustava S' se pohybuje rychlostí $v \in (-c, c)$ vzhledem k soustavě S

Základem speciální teorie relativity (STR) je Lorentzova transformace [3]. Parametr definovaný vztahem

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq 1 \tag{1}$$

nazveme *Lorentzův faktor*. Body z prostoročasu $\mathbb{R}^4$ se nazývají *události*. Pokud nebude řečeno jinak, omezíme se v dalším jen na takovou dvojici výše popsaných inerciálních soustav, kde událost určená střetem počátků soustav S a S' určuje začátek odpočtu času v první i druhé inerciální soustavě, tj. čas $t = 0$ v S a čas $t' = 0$ v S'. V tomto speciálním případě má *Lorentzova transformace* $\mathcal{L}_v$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tvar[2]

$$\begin{aligned} x' &= \gamma_v(x - vt), && (2)\\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma_v\Big(t - \frac{v}{c^2}x\Big), && (3) \end{aligned}$$

kde poslední rovnice vyjadřuje, jak se transformuje rovnoměrně plynoucí vlastní čas při přechodu od soustavy S k S'. Tj. čas t' závisí nejen na t ale i na poloze x. Všimněme si, že pravé strany vztahů (2) a (3) jsou pro pevné v lineární funkce v proměnných x a t. Pro $\boldsymbol{x} = (ct, x, y, z)$ a $\boldsymbol{x'} = (ct', x', y', z')$ lze proto Lorentzovu

[1] Skutečnost, že rychlost světla c má stejnou velikost v inerciálních soustavách v okolí Země, byla experimentálně prověřena známými Michelsonovými pokusy [2].

[2] A. Einstein používá transformaci (2)–(3) ve svém stěžejním článku [4, s. 902], ale Lorentzovu práci [3] z roku 1892 necituje a ani Hendrika Lorentze nezmiňuje.

transformaci přepsat do maticového tvaru $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{L}_v\boldsymbol{x}$, kde

$$\boldsymbol{L}_v = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\frac{v}{c}\gamma_v & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma_v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

je blokově diagonální, symetrická a pozitivně definitní matice. Fyzikální rozměr všech složek vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{x}'$ je tedy metr.

1 Dilatace času

Vztah (3) je třeba chápat tak, že jde pouze o čas, který bychom zaznamenali v okamžiku, kdy se hodiny v soustavách S a S' těsně míjejí jen v jednom jediném bodě (např. v počátku souřadnic). Můžeme tak srovnávat jen časové údaje soumístných hodin, protože pojem současnosti je relativní. Podle definice veškeré hodiny v každé pevné inerciální soustavě ukazují v daném okamžiku stejný čas v celém nekonečném trojrozměrném prostoru (např. na začátku a konci nehybné tyče). Když tedy budeme přesně uprostřed mezi dvěma libovolnými nehybnými hodinami, uvidíme na nich stejný čas.

Pro pevné x' a časový interval $\Delta t = t_2 - t_1$ dostáváme vztah (viz [5, s. 430]), jenž popisuje tzv. *dilataci času*,

$$\Delta t' := t_2' - t_1' = \gamma_v(t_2 - t_1) = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{5}$$

kde t_i' je svázáno s t_i vztahem (3) pro $i = 1, 2$. Z (1) tak dostáváme dilataci $\Delta t' > \Delta t$ pro $v \neq 0$ nezávisle na znaménku v. Vztah (5) vlastně vyjadřuje, že běh času měřený hodinami o pevné souřadnici x' v pohybující se soustavě S', je pomalejší než běh času měřený hodinami, jež jsou vůči S v klidu.

Teoreticky se dilatace času obvykle odůvodňuje takto: Foton vypuštěný z počátku soustavy S ve směru osy y letí v soustavě S' šikmo rychlostí c. Proto z hlediska pozorovatele v S' potřebuje delší dobu k dosažení roviny $y' = y = 1$ než z hlediska pozorovatele v soustavě S.

Experimentální ověření dilatace času se opírá o částice miony, jejichž střední klidová doba života je $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s. Z pozorovaní kosmického záření víme, že pokud se pohybují přímočaře téměř rychlostí světla, urazí v průměru mnohem delší dráhu než $c\tau = 660$ m. Je třeba ale zdůraznit, že v inerciální soustavě spojené s miony se jejich rozpad nezpomalí. V jiném experimentu [6] se prověřuje dilatace času pomocí příčného Dopplerova jevu.[3] Jako hodiny se používají ionty lithia urychlené na rychlost $v = 0.338c$.

Nerelativistický podélný Dopplerův jev je popsán vztahem $f_v = f_0 c/(c-v)$, kde f_0 je frekvence zdroje v klidu, v je rychlost zdroje blížícího se po ose x k pozorovateli, f_v je pozorovatelem naměřená frekvence a c je rychlost signálu. Tento vztah je třeba opravit pro relativistické rychlosti o dilataci času [1]. Veškeré fyzikální procesy včetně rychlosti chodu hodin v S' totiž budou probíhat v S pomaleji. Nový vztah bude mít tudíž tvar $f_v = f_1 c/(c-v)$, kde $f_1 = \gamma_v^{-1} f_0$ odpovídá nižší frekvenci rekonstruované pomocí vztahu (5). Podle (1) tak dostaneme relativistický Dopplerův vztah pro frekvenci detekovanou v soustavě S,

$$f_v = \frac{1}{1-v/c} f_1 = \frac{\gamma_v^{-1}}{1-v/c} f_0 = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1-v/c} f_0 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} f_0. \tag{6}$$

Příklad 1.1
Předpokládejme, že se k pevně umístěnému pozorovateli v soustavě S budou blížit hodiny podél osy x relativistickou rychlostí $v = 0.8c$. Jejich čas půjde pomaleji než na hodinách pevně umístěných v soustavě S, protože podle (5) je $\Delta t' = (1-0.64)^{-1/2}\Delta t = \frac{5}{3}\Delta t$. Dosazením $v = 0.8c$ do (6) ale zjistíme, že se letící hodiny budou pozorovateli jevit, že jdou dokonce $3\times$ rychleji než stejné hodiny v soustavě S a $5\times$ rychleji než předpovídá (5). Podle (6) se Dopplerův jev vždy projeví více než samotná dilatace času, kdykoliv se budou hodiny blížit k pozorovateli, protože $\sqrt{(c+v)/(c-v)} > 1$ pro libovolné $v \in (0, c)$. Proto je velice důležité důsledně rozlišovat mezi pojmy rekonstruovat (pomocí Lorentzovy transformace) a pozorovat (naměřit).

Pozorovatel většinou nemá možnost přímo změřit rychlost v nějakého vzdáleného objektu, aby mohl okamžitě použít Lorentzovu transformaci. Může ale změřit frekvenci f_v nějaké charakteristické spektrální čáry určité chemické látky a zjistit odpovídající klidovou frekvenci f_0. Odtud pomocí (6) pak může určit rychlost v (v obecném případě jen radiální složku rychlosti). Při relativistických rychlostech lze tak faktor γ_v^{-1} dobře určit a zjistit, jak významný je hledaný relativistický efekt.

[3] Příčný (transverzální) Dopplerův jev byl poprvé změřen v [7] již v roce 1938. V klasické mechanice tento příčný jev nenastává, neboť je dán pouze dilatací času (5).

2 Lorentzova transformace nepřipouští nadsvětelné rychlosti

Nejprve dokážeme jednoduchou variantu Einsteinova vzorce z práce [4] pro relativistické skládání rychlostí, viz též [8, Chapt. I.6].

Věta 2.1 (Einsteinova)
Nechť $u \in (-c, c)$, resp. $w \in (-c, c)$ je konstantní rychlost bodového objektu v soustavě S, resp. S' ve směru vodorovné osy. Pak

$$u = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}}. \tag{7}$$

Důkaz. Rychlosti u, resp. w jsou v S, resp. S' podle předpokladu konstantní. Tedy

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \text{a} \quad w = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}. \tag{8}$$

Podle (3) je proto

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \gamma_v \Big(1 - \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big) = \gamma_v \Big(1 - \frac{uv}{c^2}\Big),$$

kde rozdíl v závorkách je zřejmě kladný. Z této rovnosti, (8) a (2) máme

$$w = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \gamma_v \Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v\Big)\gamma_v^{-1}\Big(1 - \frac{uv}{c^2}\Big)^{-1} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

Odtud plyne, že

$$u - v = w - \frac{uvw}{c^2}.$$

Nyní již stačí vyjádřit u a dostaneme (7). □

Vidíme například, že pro $v = w = \frac{2}{3}c$ podle věty 1 je $u = \frac{12}{13}c$ podsvětelná rychlost. V následující větě 2 dokážeme, že ze vztahu (7) nikdy nemůžeme dostat nadsvětelnou ani světelnou rychlost u, i když budou rychlosti v a w libovolně blízko c.

Nejprve připomeňme, že *grupa* G je množina, na které je definována binární asociativní operace $\circ : G \times G \to G$ s neutrálním prvkem e a v níž ke každému prvku $g \in G$ existuje právě jeden prvek inverzní $g^{-1} \in G$ tak, že $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$.

Operaci skládání $\circ$ dvou Lorentzových transformací $\mathcal{L}_v$ a $\mathcal{L}_w$ určených vztahy (2)–(3) pro podsvětelné rychlosti $v, w \in (-c, c)$ definujeme takto

$$\mathcal{L}_u = \mathcal{L}_v \circ \mathcal{L}_w, \tag{9}$$

kde u je dáno Einsteinovým vzorcem pro skládání rychlostí (7).

Věta 2.2
Lorentzovy transformace $\mathcal{L}_v$ pro $v \in (-c, c)$ definované vztahy (2)–(3) *tvoří komutativní grupu.*

Důkaz. Je-li $v, w \in (-c, c)$, pak zřejmě platí $\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{w}{c}\right) > 0$ a $\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{w}{c}\right) > 0$. Odtud roznásobením dostaneme, že

$$-\left(1 + \frac{vw}{c^2}\right) < \frac{v + w}{c} < 1 + \frac{vw}{c^2},$$

a tudíž

$$-c < \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}} < c.$$

Porovnáním s Einsteinovým vzorcem (7) vidíme, že $u \in (-c, c)$, tj. u je vždy podsvětelná rychlost.

Podle (1) pro $v = 0$ je $\gamma_0 = 1$ a odpovídající transformace $\mathcal{L}_0$ je identita, tj. neutrální prvek grupy.

Z (7) a (9) okamžitě plyne, že

$$\mathcal{L}_v \circ \mathcal{L}_{-v} = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{-v} \circ \mathcal{L}_v,$$

tj. transformace $\mathcal{L}_{-v}$ je inverzní[4] k $\mathcal{L}_v$.

Uvažovaná grupa je komutativní, protože speciální blokově diagonální matice $\boldsymbol{L}_v$ a $\boldsymbol{L}_w$ definované vztahem (4) spolu komutují, tj. $\boldsymbol{L}_v \boldsymbol{L}_w = \boldsymbol{L}_w \boldsymbol{L}_v$ pro všechna $v, w \in (-c, c)$. Asociativita grupové operace skládání $\circ$ plyne okamžitě z toho, že násobení matic je asociativní. □

3 Kontrakce délek

Lorentzova kontrakce (neboli zkracování) délek je bezprostředním důsledkem Lorentzovy transformace. Na vodorovné ose x' uvažujme pevnou tyč, která je v soustavě S' v klidu. Označme délku tyče symbolem

$$\ell_0 = x_2' - x_1', \tag{10}$$

kde x_i' jsou pevné časově nezávislé souřadnice konců tyče v soustavě S'. V soustavě S položíme

$$\ell = x_2(t) - x_1(t),$$

---

[4]Vzhledem k rovnocennosti soustav S a S' vypadá inverzní Lorentzova transformace podobně jako ve vztazích (2) a (3). Je ale třeba změnit znaménko $-$ na $+$, tj. $x = \gamma_v(x' + vt')$ a $t = \gamma_v(t' + vx'/c^2)$.

kde souřadnice konců tyče závisí na čase t. Ze vztahu (2) máme

$$x_2' = \gamma_v(x_2(t) - vt), \qquad x_1' = \gamma_v(x_1(t) - vt).$$

Odtud po dosazení do (10) dostáváme, že

$$\ell_0 = \gamma_v(x_2(t) - vt - x_1(t) + vt) = \gamma_v \ell$$

a podle (1) platí

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{11}$$

Již v roce 1959 Roger Penrose publikoval článek [9], v němž popisuje, proč bychom měli vidět rychle letící nerotující kouli na fotografii opět jako kouli. Jeho myšlenky ve stejném roce podrobněji rozpracoval James Terrell [10] pomocí aberace světla. Nyní si uvedeme konkrétní příklad inspirovaný Terrellem.

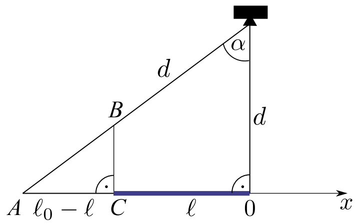
Příklad 3.1
Uvažujme tyč o délce $\ell_0 = 1$ m. Předpokládejme, že se pohybuje zleva doprava podél osy x soustavy S konstantní rychlostí $v = 0.8c$ a její přední konec právě dosáhl počátku. Podle (11) je tyč zkrácena na $\ell = 0.6$ m, a tedy úsečka AC na obr. 2 má délku $|AC| = 0.4$ m. Tyč budeme fotografovat z osy y ze vzdálenosti

$$d = \ell_0 \sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1} = 0.75 \text{ m} \tag{12}$$

od počátku z pevně umístěného nerotujícího fotoaparátu. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků z obr. 2 tak platí $|BC| = |AC| d/\ell_0 = 0.3$ m. Odtud plyne, že $|AB| = \sqrt{0.4^2 + 0.3^2} = 0.5$ m. Úsek na přeponě od bodu B k fotoaparátu má v metrech stejnou délku jako d v (12),

$$\sqrt{1^2 + 0.75^2} - |AB| = 1.25 - 0.5 = d.$$

Aby nebyly snímky rozmazané, budeme předpokládat, že náš idealizovaný fotoaparát umí dělat snímky (s vysokou kadencí) během 1 pikosekundy. Za tu dobu uletí světlo pouhé 0.3 mm a rozmazání na fotografii tak nebude hrát významnou roli. Pro jednoduchost budeme analyzovat jen tu fotografii, na níž přední konec tyče právě dosáhl počátku souřadnic S. Zadní konec tyče ale bude na fotografii dále než ℓ, protože světlo z předního konce letí po kratší dráze d než světlo z jejího zadního konce (viz obr. 2). Proto budou na fotografii zaznamenány fotony ze zadního konce tyče, které byly vyslány dříve než ty z předního konce (viz obr. 2). Za dobu, kdy se zadní konec tyče přesune z bodu A do bodu C, urazí foton směřující z bodu A do fotoaparátu vzdálenost $|AB|$, protože $v/c = |AC|/|AB| = 0.8$.



Obrázek 2. Délka odvěsen většího (resp. menšího) pravoúhlého trojúhelníka je 1 a 0.75 (resp. 0.4 a 0.3) metru. Poměr délek stran u obou trojúhelníků je tak $5:4:3$. *V důsledku světelné aberace má tyč letící zleva doprava rychlostí* $0.8c$ *na fotografii stejnou délku, jako má stejná tyč v klidu. Rysky na tyči po deseti centimetrech ale budou mít na fotografii nestejné vzdálenosti.*

Dále ukážeme, že pohybující se tyč bude mít na fotografii opět délku 1 metr pro situaci z obr. 2. Uvažujme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami d a ℓ_0. Pak pro poměr vodorovné odvěsny ku přeponě podle (12) platí

$$\frac{\ell_0}{\sqrt{d^2+\ell_0^2}} = \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2(c^2/v^2-1)+\ell_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{c^2/v^2}} = \frac{v}{c} = 0.8. \qquad (13)$$

Letící tyč tedy vyfotografujeme pod úhlem $\alpha = \arcsin 0.8$, který je stejně velký (srov. (13)), jako kdybychom vyfotografovali nehybnou metrovou tyč dotýkající se předním koncem počátku soustavy S. Díky aberaci světla tak pohybující se tyč bude mít na fotografii stejnou délku jako nehybná metrová tyč.

Poznamenejme ještě, že foton uletí vzdálenost d z počátku souřadnic k fotoaparátu za čas $\Delta t = d/c$. Za tu dobu se tyč posune o $v\Delta t = 0.8d = 0.6$ m, tj. bude se celá nacházet vpravo od bodu 0.

Příklad 3.2

Nechť opět $\ell_0 = 1$ m a $v = 0.8c$. Tedy $\ell = 0.6$ m. Tentokrát ale umístíme fotoaparát blíže k ose x, tj. $d < 0.75$ m. Budeme opět analyzovat ten snímek, kde je pravý konec tyče v počátku. Levý konec tyče se z bodu $A = (-a, 0)$ posune do bodu $(-\ell, 0)$ za čas $\Delta t = (a-\ell)/v$. Za tu dobu urazí foton z bodu A směrem k fotoaparátu vzdálenost $c\Delta t$. Ze vztahu $a^2 + d^2 = ((a-\ell)c/v + d)^2$ lze odvodit, že

$$d = \frac{a^2(v/c - c/v) + 2a\ell c/v - \ell^2 c/v}{2(a-\ell)}.$$

Například pro $a = 2$ m vychází $d = \frac{15}{56} = 0.26\ldots$ m. Umístíme-li tedy fotoaparát ose y do vzdálenosti 26 cm od počátku, bude se metrová letící tyč jevit na fotografii dokonce jako dvoumetrová. Hlavním důvodem tohoto překvapivého jevu je, že fotony, které současně prošly objektivem, nebyly emitovány současně.

Pro $d > 0.75$ m uvidíme na fotografii tyč kratší než 1 metr. Stejná tyč bude rovněž kratší než ℓ, pokud ji zachytíme tak, že její levý konec bude v počátku. Jestliže bude umístěna přesně symetricky vzhledem k počátku, bude mít na fotografii délku právě ℓ. V článku [11] se popisuje, jak se bude jevit na fotografii rychle letící krychle.

4 Pár slov na závěr

STR vykazuje řadu nečekaných tvrzení, která se příčí naší intuici. Podle STR nelze žádným pokusem zjistit, zda je těleso v klidu či se pohybuje. Všechny inerciální soustavy pro popis fyzikálních jevů jsou ekvivalentní a neexistuje žádná preferovaná soustava. V současnosti však víme, že reliktní mikrovlnné záření (CMB) vlastně určuje jakousi nehybnou a pevnou referenční soustavu v našem okolí. Vznikají tak spekulace, jak je to vlastně principem relativity ve skutečném vesmíru.

V limitním případě $w = \pm c$ dává Einsteinův vzorec (7) pro $v \in (-c, c)$ rychlost $u = c$. Foton tak má v jakékoliv inerciální soustavě vždy rychlost světla.

Často se traduje, že Lorentzova transformace pro malé rychlosti $|v| \ll c$ přechází na Galileovu transformaci $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$. To ale není pravda (viz [12]), protože z (3) nedostaneme, že $t' = t$ pro žádné nenulové v. Naopak pro libovolně malé pevné $v > 0$ vždy můžeme najít x takové, že člen vx/c^2 bude výrazně dominovat nad t. Z (2)–(3) ale plyne, že Lorentzova transformace přechází na Galileovu pro pevné v, když budeme c chápat jako parametr a předpokládat, že $c \to \infty$.

Vztahy (2)–(3) představují transformaci objektivních lokálně určených prostoročasových souřadnic bodů z jedné inerciální soustavy do objektivních prostoročasových souřadnic druhé inerciální soustavy. Relativistické vizuální efekty kromě transformačních vztahů (2)–(3) ale vyžadují zohlednit aberaci světla a Dopplerův jev, které přinášejí několik dalších efektů kromě těch již zmíněných. Na stránkách `www.spacetimetravel.org` je k této problematice volně dostupná řada počítačových animací.

Literatura – References

[1] Foster, J., Nightingale, J. D.: *A short course in general relativity (3rd edition)*. Springer, New York, 2006.

[2] Michelson, A. A., Morley, E. W.: *On the relative motion of the Earth and the luminiferous ether*. Amer. J. Sci. 34 (1887), 333 – 345.

[3] Lorentz, H. A.: *La théorie électromagnetique de Maxwell et son application aux corps mouvants*. Arch. Néerl. 25 (1892), 1 – 190.

[4] Einstein, A.: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Ann. der Phys. 322 (10) (1905), 891 – 921.

[5] Horák, Z., Krupka, F.: *Fyzika*. sv. 2, SNTL, Praha, 1976.
[6] Botermann, B., et al.: *Test of time dilatation using stored Li+ ions as clocks at relativistic speed*. Phys. Rev. Lett. 113 (2014), 120405; errata 114 (2015), 239902.
[7] Ives, H. E., Stilwell, G. R.: *An experimental study of the rate of a moving atomic clock*. J. Optic. Soc. Amer. 28 (1938), 215 – 226.
[8] Pauli, W.: *Theory of relativity*. Dover Publ., Inc., New York, 1981.
[9] Penrose, R.: *The apparent shape of a relativistically moving sphere*. Proc. Cambridge Phil. Soc. 55 (1959), 137 – 139.
[10] Terrell, J.: *Invisibility of Lorentz contraction*. Phys. Rev. 116 (1959), 1041 – 1045.
[11] Weisskopf, V. F.: *The visual appearance of rapidly moving objects*. Physics Today 13(9) (1960), 24 – 27.
[12] Baierlein, R.: *Two myths about special relativity*. Amer. J. Phys. 74 (2006), 193 – 195.

Poděkování: Autor děkuje Filipu Křížkovi a neznámému recenzentovi za inspiraci a velmi cenné připomínky. Článek byl podpořen RVO 67985840.

Adresa autora:

Matematický ústav AV ČR, Žitná 25,
115 67 Praha 1
e-mail: `krizek@math.cas.cz`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2020 (49)

Čo nám o Venuši povedala misia Magellan?

Ladislav E. Roth

Abstract: The Magellan Mission (1989-1994) brought about the peak in the exploration of the surface of Venus. Three approaches have been utilized to carry out that exploration: directly from Earth, from spacecraft on the way to other destination, and from dedicated spacecraft in orbit around Venus. Historically, the doctrine of the plurality of worlds considered Venus as the abode of the higher forms of life. Telescopic observations presented Venus permanently shrouded in clouds. The implied dampness under the clouds supposedly meant hospitality to life. The conviction that Venus is habitable and indeed inhabited lasted through the beginning of the twentieth century. Spectroscopic and radiometric measurements from Earth suggested that the atmosphere of Venus is composed of carbon dioxide (CO_2) and that its temperature (around 300° C) is too high to support life. Radar aboard the orbiting Magellan spacecraft mapped the entire surface of Venus. The high-resolution Magellan radar data permitted to carry out a complete classification and interpretation of the geological landforms on Venus. The surface of Venus is a world almost exclusively fashioned by volcanism. The low number of the collision (meteoroid) craters bears witness to a cataclysmic event that took place about 500 million years ago. Lava then flooded most of the planet's surface. The Magellan radar did not find signs of the global tectonic activity. Likewise, it did not find signs of erosion. All in all, the Magellan Mission confirmed the unique place of Venus among the planets of the solar system.

Key words: Venus, plurality of worlds, life on Venus, the Magellan Mission, radar mapping, collision craters on Venus, volcanic activity on Venus, tectonism on Venus, erosion on Venus

Súhrn: Misiou Magellan (1989-1994) vrcholil prieskum povrchu Venuše vykonávaný tromi, dnes bežnými spôsobmi: priamo zo Zeme, z jednorazových obletov robotickými sondami po ceste k vzdialenejším cieľom a zo sond v dlhšie trvajúcich obežných dráhach. Historicky, v rámci doktríny plurality svetov, Venuša bola pokladaná za príbytok vyšších foriem života. Teleskopické pozorovania zobrazovali Venušu zahalenú mračnami. Dôsledkom implikovanej vlahy predstavovali ju ako pohostinnú pre život. Presvedčenie o obývateľnosti a obývanosti Venuše pretrvalo do začiatku dvadsiateho storočia. Spektroskopické a rádiometrické merania zo Zeme naznačili, že atmosféra Venuše je zložená hlavne z kysličníka uhličitého (CO_2), a že je pre život príliš horúca (okolo 300° C). Sonda Magellan zmapovala radarom celý povrch Venuše z obežnej trajektórie. Rozlišovacia schopnosť radaru Magellanu dovolila prvú úplnú klasifikáciu a interpretáciu geologických útvarov povrchu planéty. Svet na povrchu je takmer výlučne formovaný sopečnou činnosťou. Nízky počet kolíznych (meteoroidných) kráterov poskytlo svedectvo o kataklizmatickej udalosti pred približne 500 miliónmi rokov, kedy láva zaplavila väčšiu časť povrchu. Známky globálnej tektonickej

činnosti radar Magellanu nenašiel. Podobne nenašiel ani známky erózie. Radar sondy potvrdil unikátne postavenie Venuše medzi planétami slnečnej sústavy.

Kľúčové slová: Venuša, pluralita svetov, život na Venuši, misia Magellan, mapovanie radarom, kolízne krátery na Venuši, vulkanizmus na Venuši, tektonizmus na Venuši, erózia na Venuši.

MESC: M50

Ladislav Emanuel Roth, emeritus Jet Propulsion Laboratory (Laboratórium prúdových pohonov), California Institute of Technology (CALTEC), USA (nar. 30. nov. 1936 Košice)

Niekoľko viet o autorovi:
Vyštudoval odbor Výroba a využitie elektrickej energie na Elektrotechnickej fakulte Českého vysokého učenia technického (ČVUT) v Prahe (Ing., 1958). V rokoch 1959-1961 pracoval vo Výskumnom ústave pre elektrotechnickú fyziku (VÚPEF) v Prahe. V rokoch 1961-1965, po zlúčení VÚPEF s Výskumným ústavom pre spojovaciu techniku A. S. Popova (VÚST), pracoval v ústave na vývoji nelineárnych polovodičových súčiastok a ich použití v elektronických zariadeniach. Roku 1962 bol členom kolektívu vo VÚST, ktorému bolo udelené najvyššie štátne vyznamenanie Štátna cena Klementa Gottwalda. Československo opustil r. 1966. Bol prijatý ako inžinier-asistent na Kalifornskú univerzitu (UCLA) v Los Angeles, na pracovisko Inštitútu geofyziky a planetárnej fyziky (IGPP). Súčasne na Katedre výskumu Zeme a vesmíru UCLA vyštudoval odbor Planetárna a kozmická fyzika (1975, M.Sc.).Roku 1973 prešiel na pracovisko Jet Propulison Laboratory (Laboratórium prúdových pohonov) Kalifornského technického inštitútu (CALTEC), kde nesmierne akcelerovala i napĺňala sa jeho vedecká trajektória. CALTEC patril k najvýznamnejším pracoviskám kozmického výskumu nielen v USA (NASA), ale vo svete vôbec. JPL bolo srdcom, centrálnym orgánom kozmického programu a jeho úspechov. Všetko, čo odštartovalo z územia USA do vesmíru, bolo navrhnuté a riadené z JPL. L. E. Roth plnil vedecké úlohy od najnižších postov Engineer, Scientist, až po najvyššie Research Scientist, hlavný výskumný pracovník (Principal Investigator) v programoch Apollo, Mariner, Viking, Magellan, Cassini-Huygens. Patril medzi najvýznamnejšie osobnosti kozmického výskumu na svete. V slovenskom jazyku vyšla zaujímavá a polygraficky atraktívna kniha L.E. Rotha Cesta na Saturn a Titan (2004, Protonit, ISBN 80-8050-723-6, 81 strán), ale aj prehľadová publikácia Planetárne lety: prvých štyridsať rokov (2003, UKF Nitra, ISBN 80-8050-622-1, 60 strán). Roku 1998 Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre udelila L. E. Rothovi čestný titul doctor honoris causa, ktorý mu bol udelený na slávnosti 3. decembra 1998. Vysoké vyznamenanie Laureát Medzinárodnej ceny SAV (2003) mu bolo udelené za vedecké výsledky a rozvoj kozmických projektov a reprezentáciu Slovenska. Čitateľom aktuálne prinášame stručný prehľad o projekte Magellan, na ktorom sa významne podieľal aj fyzik pôvodom zo Slovenska, L. E. Roth. Autor poskytuje jedinečný a výnimočný text nielen obsahom, ale aj špecifickým štýlom.

Daniel Kluvanec

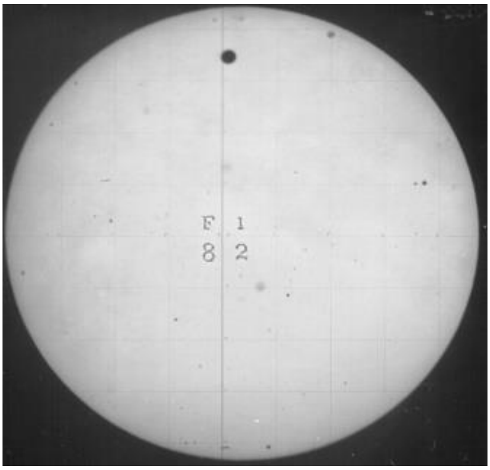
V lete 2019 uplynulo päťdesiat rokov od prvého pristátia človeka na Mesiaci (Apollo 11, 24. júla 1969). Významné výročie oživilo debaty na témy dobre známe a neustále pretriasané v kruhoch prívržencov ľudských letov do kozmu. Máme sa vrátiť na Mesiac? Máme na Mesiaci zriadiť permanentnú základňu? Máme na Mesiaci ťažiť nerastné suroviny? Máme letieť na Mars? Máme kolonizovať Mars? Máme letieť k najbližším asteroidom? Medzi debatovanými cieľmi letov okate chýba Venuša. Historicky Venuša bola pokladaná za planétu najviac podobnú Zemi a za pravdepodobný príbytok vyšších foriem života. Pozorovania vykonané v priebehu posledného storočia, vrátane pozorovaní americkými a sovietskymi robotickými sondami, zásadne zmenili tradičné názory na charakter Venuše. Nadlho, ak nie natrvalo, vyradili Venušu spomedzi cieľových staníc ľudských letov. Pokúsim sa načrtnúť príbeh Venuše, dôležitého v rámci vývoja našej vzdelanosti a chápania kozmu. Podrobnejšie sa zdržím u NASA/JPL Misie Magellan. Radar sondy Magellan s konečnou platnosťou strhol z Venuše jej odveký závoj tajomnosti. Zobrazil a zmapoval povrch Venuše s radikálne vysokým rozlíšením. Vďaka Misii Magellan, po prvý raz máme synoptický obraz o topografii našej najbližšej planetárnej susedky. Porovnateľný obraz nemáme ani o Zemi, lebo dve tretiny našej planéty sú pokryté vodou. Inými slovami, Venuša má plochu povrchu trikrát väčšiu ako je plocha povrchu suchej časti Zeme. Odhaduje sa, že misia Magellan vyprodukovala objem digitálnych dát prevyšujúci dvojnásobok produkcie všetkých robotických planetárnych projektov dovtedy. Misia bola natoľko úspešná, že o následnej radarovej výprave k Venuši sa nateraz neuvažuje. [1]

Po Slnku a Mesiaci, Venuša je tretí najjasnejší objekt na oblohe. Venuša, bližšia k Slnku ako Zem, sa po svojej takmer kružnicovej trajektórii pohybuje rýchlejšie ako Zem. Rok na Venuši (sidereálna perióda) trvá 224,70 našich dní. Raz za 584 dní (raz za synodickú periódu) dostihne a predbehne Zem. V priebehu každej synodickej periódy sa Venuša raz javí ako Zornička, raz ako Večernica. Zornička vychádza pred východom Slnka, Večernica zapadá po západe Slnka. Za zriedkavých okolností Venušu môžeme pozorovať počas dňa, keď poznáme jej presnú polohu. Astronóm François Arago zaznamenal zaujímavú epizódu z obdobia revolučného Francúzska. Dav, zhromaždený za účelom vzdania holdu generálovi Bonapartovi po úspešnom talianskom ťažení, s úžasom hľadel na poludňajšiu oblohu a na blyštiacu sa Venušu na nej. Sprievod víťazného generála si málokto všímal. Pohotové zdôvodnenie nezáujmu, ponúknuté bystrým štábom, prijal pobúrený Bonaparte (údajne) s uspokojením. (Super jasná hviezda nad hlavami bola predsa Hviezda dobyvateľa Talianska! Ešte aj nebesia oslavovali Bonapartov triumf! [2]) Nielen vzácna denná Venuša budí pozornosť. Stáva sa, že mimoriadne jasná nočná Venuša vrhá rozoznateľné tiene.

Obr. 1: *Fázy Venuše. Zmeny vzhľadu planéty v intervale od 27. februára 2004 do 8. júna 2004. [ESO/S. Kalyvas]*

Galileo vysvetlil premenlivú jasnosť Venuše. V júni 1609 Galileo sa dozvedel o „holandskom sklíčku" – optickej trubici schopnej vzdialené predmety priblížiť a zväčšiť. Udalosti dostali rýchly spád. Spoliehajúc sa na svoje znalosti optiky, Galileo trubicu bezodkladne zostrojil, a ihneď začal pozorovať nočnú oblohu. Najprv trubicu zacielil na Mesiac. Zistil, že povrch Mesiaca nebol ideálne hladký, ako hlásala aristotelovská doktrína, ale že sa podášal na povrch Zeme. Vo svetlých škvrnách Galileo nejasne rozoznal suchú pôdu, tmavé škvrny váhajúc spojil s vodnými plochami. Následne, Galileo zacielil trubicu na planétu Jupiter. Pozorovania viedli k objavu štyroch satelitov (názvoslovie Johanna Keplera). Na jeseň 1610 Galileo zahájil systematické pozorovania Venuše. Spozoroval, že podoba planéty vzhľadom k Slnku sa menila v súlade s predstavou jej pohybu okolo Slnka ako stredu obežnej trajektórie. Tomu zodpovedali aj zmeny vizuálnej jasnosti Venuše (obr. 1). Galileom objavené fázy Venuše, analogické fázam Mesiaca pozorované zo Zeme, poskytli definitívny dôkaz, *crux observationis*, správnosti Koperníkovej heliocentrickej hypotézy. Po prevratných objavoch nasledovala nevyhnutná cesta do Ríma. Koncom marca 1611 Galileo sa do Ríma naozaj vybral. Príslušní činitelia vítali toskánskeho hosťa s rešpektom miešaným s nedôverou. (Inkvizícia položila Koperníkove dielo *De Revolutionibus* na Index zakázaných kníh až v r. 1616.) Osloviac Collegio Romano, Galileo predviedol optickú trubicu a vysvetlil objavy, ktoré trubica umožnila. Princ Federico Cesi, zakladateľ prvej talianskej vedeckej spoločnosti, Accademia dei Lincei ("Akadémia bystrozrakých"), na počesť Galilea usporiadal banket. Jeden z hodujúcich nazval Galileov optický nástroj *telescopio.* Meno sa ujalo. Galileo, teleskop a Venuša *alias* Zornička *alias* Večernica – spolu – rozhodujúcou mierou prispeli k formovaniu modernej astronómie. [2]

Vysvetlenie aspektov Venuše a pozorovania novým nástrojom priniesli nedočkavým hvezdárom uspokojenie a sklamanie, oboje naraz. Christiaan Huygens bol asi prvý, kto bezvýrazný teleskopický vzhľad Venuše prisúdil atmosfére a mračnám (1698). Neskorších kandidátov objavu atmosféry na Venuši je viac. Stačí spomenúť troch: Michaila V. Lomonosova, Williama Herschela, Johanna H.



Obr. 2: *Tranzit Venuše (5. decembra 1882). [U.S. Naval Observatory Library]*

Obr. 3: *Portrét Venuše zhotovený sondou Mariner-10 po ceste zo Zeme k planéte Merkúr (5. februára 1974). [NASA/JPL/R. Nunes]*

Schrötera. Lomonosov pozoroval tranzit Venuše (1761) (tranzit je úkaz opakujúci sa každých 122 rokov, pri ktorom disk Venuše sa posúva cez disk Slnka (obr. 2)). Postrehol, že Venušu pri vstupe pred disk Slnka (a tiež pri výstupe) obklopovala jemná *aureóla*. Aureólu pripísal atmosfére. Pozoruhodný postreh sa mimo Ruska nedostal, a tak dianie okolo Venuše neovplyvnil. [3]

Objaviteľ planéty Urán, William Herschel, pripúšťal možnosť existencie atmosféry na Venuši na základe stabilne mdlého teleskopického vzhľadu planéty (1792). Johann H. Schröter, „Herschel Nemecka," usúdil, že príčinou neostrého obrysu vnútornej hrany teleskopického polmesiačika Venuše bola absorpcia svetla atmosférou (1792). Francúzsky astronóm Camille Flammarion pokladal vrúbkovanie vnútornej hrany polmesiačika za dôkaz Venušinej hornatosti. Písal (1888): "Povrch Venuše je nerovný, nerovnejší ako povrch Zeme. Planéta má svoje Andy, Kordilléry, Alpy a Pyreneje." [4] Venuša má svoje pohoria. Ale tie nie sú opticky viditeľné – ani zo Zeme, ani z obletov, ani z obežných trajektórií okolo planéty (obr. 3). Až súčasné radarové merania potvrdili ich jestvovanie.

Radar vyriešil tiež chronický omyl v stanovení sidereálnej rotačnej periódy Venuše. Nie tak dávno (1959), britský planetárny astronóm Patrick Moore si vzdychol, že kým rotačnú periódu Marsu sme už dávno poznali so sekundovou presnosťou, rotačnú periódu Venuše by sme radi poznali s presnosťou mesiacov a týždňov. Giovanni Domenico Cassini, profesor matematiky na univerzite v Bologni, pozoroval škvrnky na kosáčiku Venuše. Z ich domnele opakujúcej sa polohy odvodil rotačnú periódu: $23^{h}\ 21^{min}$ (1667). Tým istým spôsobom Cassini postupoval pri meraní rotačnej periódy Marsu. Rozdiel bol ovšem v tom, že v prípade Marsu pozoroval skutočné škvrny na skutočnom povrchu, nie imaginárne škvrnky na imaginárnom povrchu. Schröter potvrdil Cassiniho periódu takmer identickým výsledkom: $23^h\ 21^m\ 19^s$ (1789). Pripustil ale, že pod atmosférou Venuša mohla rotovať s ľubovoľnou periódou. Giovanni Schiaparelli, "objaviteľ" kanálov na Marse, prišiel s ďalším prekvapením (1877), odhadom rotačnej periódy Venuše: $224^d\ 16^h\ 48^{min}$. Ak by mal Schiaparelli pravdu, Venuša by obracala k Slnku jednu a tú istú tvár tak, ako Mesiac obracia k Zemi. Moore evidoval 85 teleskopických určení rotačnej periódy Venuše vykonaných v časovom interval od roku 1667 do roku 1958. Výsledky väčšiny sa pohybovali okolo Cassiniho výsledku. Menšina astronómov (15) súhlasila so Schiaparellim. Posledné meranie v Moorovom registri súhlasilo s Cassinim: $22^h\ 30^m$ (I. I. Gusev, 1958). [5] Historický hlavolam vyriešili radary, predovšetkým radar pracujúci na 8500 MHz vznikajúcej NASA/JPL kozmickej rádiovej siete (Deep Space Network) v Goldstone, v Kalifornii. Konjunkcia Venuše v r. 1961 poskytla príležitosť merať rotáciu planéty radarom priamo. Úvodné výsledky naznačili pomalú, retrográdnu rotáciu. Ďalšie merania potvrdili platnosť úvodných meraní a ustálili rotačnú periódu na hodnote $-243{,}0187^d$, alebo čo je to isté, $-5832{,}6^h$. [6] Retrográdna rotácia (rotácia od východu k západu) znamená, že pre obyvateľov Venuše by Slnko vychádzalo na našom západe a zapadalo na našom východe.

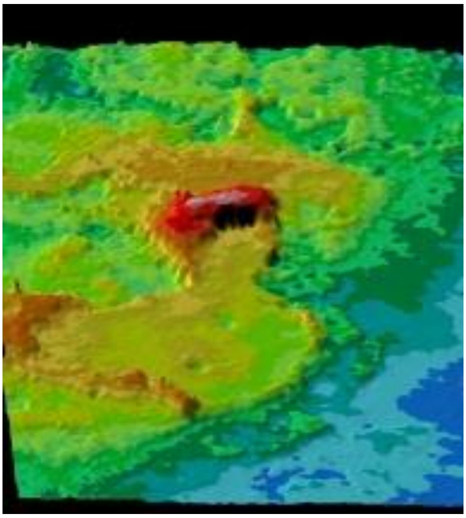
Obyvatelia Venuše? Provokatívna otázka má solídnu historickú podstatu. Debaty o pluralite svetov, o rozsahu obývaného kozmu, oddávna patria do Západnej intelektuálnej tradície. Základná téza klasickej doktríny plurality svetov hovorila, že všetko v prírode má svoj účel, a že účelom nebeských telies je slúžiť ich obyvateľom. Humanistický teológ Mikuláš Cusanus sa vyjadril jednoznačne (1440): "Na Zemi jestvujú ľudia, živočíchy, rastliny. Nemyslime si, že len Zem je obývaná. Na Slnku a na hviezdach je prítomný život, dovoľme si predpokladať, vo vyššej forme. Živé bytosti rôznej úrovne môžeme nájsť všade. Za svoju existenciu všetky bytosti vďačia Bohu, ktorý obýva naraz stred a okraj hviezdneho kráľovstva." Dominikánsky rehoľník a matematik (a údajný kacír) Giordano Bruno sa pokúsil rozšíriť dosah doktríny plurality svetov na vesmír bez hraníc a bez geometrického stredu (1584). Aj kvôli tejto snahe dobre nepochodil. Realista Galileo sa k pluralite svetov neprikláňal. Galileov súčasník Johann Kepler pluralitu sčasti prijímal. Priamu a nepriamu výmenu názorov medzi Galileom a Keplerom môžeme vziať ako ukážku pluralistických debát. Do náčrtov Mesiaca, ktoré zhotovil po každom pozorovaní, Galileo umiestnil kruhový útvar značnej veľkosti. (Azda kráter Albategnius, priemer 129 km, hĺbka 4,4 km.) Kepler považoval Galileov kruhový útvar za obývaný. O objave mesiacov Jupitera Galileo informoval Keplera súkromným listom. List obsahoval len holý fakt objavu. Kepler odpovedal otvoreným listom. „Tie štyri mesiace jestvujú pre planétu Jupiter, nie pre nás. Mesiace slúžia každej planéte a jej obyvateľom. Z jestvovania mesiacov môžeme usúdiť, že Jupiter je obývaný." V Huygensovej mienke (1698) Mesiac postrádal „moria, rieky, mračná, vzduch a akúkoľvek vodu". Preto nebol obývaný. Planéty, vrátane Venuše, Huygens za obývané považoval. Immanuel Kant klasifikoval popieranie obývanosti planét za číru pochabosť (1755). Inteligencia planetárnych bytostí rástla v priamo úmerne so vzdialenosťou od Slnka – tvrdil Kant. Obyvatelia Venuše boli zadubenci: „Hotentot by medzi nimi vynikal, ako Newton vynikal medzi nami." Obyvatelia Jupitera by nás, pozemšťanov, obdivovali podobne, ako my obdivujeme opice. Schröter si bol istý, že Venuša bola obývaná a mala priehľadnú atmosféru. Písal (1795): „Prozreteľnosť nemohla predsa obrať občanov Venuše o pôžitok pozorovania diela všemohúcej moci a objavovania ďalekých svetov, ako ich objavoval Herschel." [7] Zanietený pluralista Herschel neobjavoval len ďaleké svety. K svojej spokojnosti, objavil aj lesy a lúky na Mesiaci. Prirodzene, Mesiac považoval za obývaný. Od Galieleových čias kruhových útvarov na Mesiaci pribudlo veľa. Herschel ich roztriedil do troch kategórií: metropoly, mestá, dediny. Astronómom budúcnosti nakázal sledovať objavy nových útvarov – dôkazov, že obyvatelia Mesiaca budovali ďalšie usadliská (1778). Venušu takisto pokladal za obývanú. Prikrývka mračien zaručovala Venušanom príjemné životné prostredie, s dostatkom vlahy. V Herschelovom náhľade obývané bolo aj Slnko, „planéta prvá medzi planétami" (1795). Keď pozorujeme Slnko – podľa Herschelových predstáv – vidíme jeho žiarivú vonkajšiu škrupinu. Vrstva mrakov pod škrupinou tieni pevnú a obývanú vnútornú guľu. Slnečné škvrny sú okienka do sveta občanov Slnka. [8] Britský astronóm Richard A. Proctor označil Herschelove obývané Slnko za bizarný nápad (1870). K planétam sa ale vyjadril jasne: „Pokiaľ nebolo dokázané, že žiadna forma života nemôže na planéte jestvovať, dotyčnú planétu musíme pokladať za obývanú." V tomto duchu, „dôkazy, ktoré máme, veľmi silne potvrdzujú, že Venuša slúži za príbytok pre stvorenia nie nepodobné obyvateľom Zeme". Americký astronóm Garett Serwiss sa o Venuši vyjadril poetickejšie (1888): „Keď obdivujeme tú nádhernú planétu, uvedomme si, že za jej jas je zodpovedné svetlo, ktoré len pred chvíľkou osvetlilo vzduch miliónom dýchajúcich, inteligentných bytostí; vzduch chvejúci sa hudbou jazykov tak výrazných, ako naše jazyky tu na Zemi." Svante Arrhenius, švédsky chemik a nositeľ Nobelovej ceny, sa tiež vyjadril jasne (1918): „Zo všetkého na Venuši crčí voda." Venušu charakterizujú rozsiahle močariská a bujná vegetácia. Ako Zem v karbónskom veku, kedy sa ukladal rastlinný materiál do uhoľných a ropných ložísk. Arrhenius vyslovil domienku, že v budúcnosti sa najdokonalejšie bytosti slnečnej sústavy vyvinú na bohatej Venuši. Charles G. Abbott, riaditeľ Smithsoniánskeho astrofyzikálneho observatória, nehodlal čakať na budúcnosť. Bol si istý, že bytosti podobné nám obývajú Venušu už teraz. Nevedel sa rozhodnút, či diela ich civilizácie niekedy zazrieme. Nemal ale pochybnosti a „sotva dýchal vzrušením," že zanedlho nadviažeme rádiový kontakt s Venušanmi, a dozvieme sa o ich "politickom systéme, zvykoch, náboženstvách, rastlinstve, živočíšstve" (1926). [9] Autor sci-fi Ray Bradbury sa od vedcov Arrhenia a Abbotta príliš neodklonil, keď v novele *Smrť dažďom* (1950) predstavil Venušu ako miesto, kde bez prestania leje. Venušania prekvitajú. Kolonisti zo Zeme upadajú do letargie, chradnú a hynú. [10] Pluralistické snenia poskytujú primerané pozadie pre ocenenie pokroku dosiahnutého súčasným prieskumom naozajstnej Venuše.

Koniec sneniam o bujnej a šťavnatej Venuši prišiel v krátkom časovom rozpätí. Spektroskopická analýza svetelných emisií z Venuše (Mt. Wilson Observatory, 1932) naznačila v atmosfére planéty vysoký obsahu kysličníka uhličitého. Princetonský astronóm Rupert Wildt z vysokého obsahu CO_2 špekulatívne odvodil činnosť skleníkového javu (1940). Krátkovlnná rádiometria Venuše (U.S. Naval Research Laboratory, 1956) dala Wildtovej domnienke kvantitatívne potvrdenie: na Venuši bolo teplo, teplota sa pohybovala medzi 560 K (287 °C) a 620 K (347 °C). [11] Rok pred uverejnením výsledkov prvej rádiometrie, britský astrofyzik Fred Hoyle vyslovil domnienku, že povrch Venuše je pokrytý oceánmi ropy. Stojí to zato sa s Hoylovým argumentom zoznámiť aspoň v rýchlosti. Niekedy veľmi dávno Venušu pokrývali neprelínajúce sa oceány vody a uhľovodíkov. Fotodisociácia vodnej pary dala vznik voľnému vodíku a voľnému kyslíku. Vodík unikol do priestoru, kyslík okysličil uhľovodíky. Výsledkom bol vznik CO_2 atmosféry. Ak načrtnutý pochod začal so stochiometrickým prebytkom uhľovodíkov, povrch dnešnej Venuše pokrývajú oceány ropy. Skutočnosť sa však ukázala iná. Voda necrčí z ničoho, ropa nepokrýva nič. Vábivá Venuša je dezolátnou, vysušenou, rozpálenou planetárnou vyhňou, planetárnym predpeklím. Niektorí umelci pochytili pokračujúce zmeny v nazeraní na Venušu. Ich prostredníctvom laická verejnosť sa tiež dozvedela, čo sa dialo. Vo vykreslení pokroku americký autor sci-fi Larry Niven zašiel príliš ďaleko. V úspešnej, viac razy vydanej poviedke *Bezvetrie v pekle* (1965) chybne pripísal žeravému povrchu Venuše tú najhlbšiu a najčernejšiu tmu v celej slnečnej sústave. Na druhej strane, poviedka odrážala optimizmus doby svojho vzniku. Popisovala cestu ľudskej posádky na Venušu, cesta sa mala uskutočniť v r. 1975. [12] Duch šesťdesiatych rokov dvadsiateho storočia podobné cesty pokladal za možné, dokonca žiadúce. Ťažko zdôvodniteľné kozmické expedície stratili podporu verejnosti; dnes hádam uvažujeme triezvejšie.

Z uvedeného je zrejmé, že základná povaha Venuše bola viac-menej známa už od počiatku éry kozmických letov, ľudských či robotických. Prieskum Venuše robotickými sondami začal NASA/JPL sondou Mariner-2 (1962). Sonda predstavovala piaty pokus o oblet planéty. Predošlé štyri pokusy (tri sovietske, jeden americký) zlyhali. Mariner-2 zopakoval krátkovlnnú rádiometriu, tentokrát zo vzdialenosti 35 000 km. Výsledky, teplota od 422 K (149 °C) do 595 K (322 °C), sa približne zhodli s výsledkami rádiometrie zo Zeme. [13] Sovietska misia Venera-4 (1967) pozostávala z komunikačnej sondy na trajektórii okolo Venuše a z pristávacieho modulu. Modul, prvý objekt zo Zeme, určený pristáť na inej planéte (Mesiac nerátajúc), počas klesania k povrchu vykonával merania. Potvrdil vysoké teploty v atmosfére a detekoval nečakane strmý nárast atmosférického tlaku. Odmlčal sa približne 25 km nad povrchom. [14] Veneru-4 nasledoval rad úspešných mäkkých pristátí modulov náležiacich do sérií Venera a Vega (1970-1984). Pristávacie moduly dali obraz o zložení a štruktúre atmosféry a o charaktere hornín na miestach pristátia. Zloženie atmosféry: 96,5 % oxid uhličitý (CO_2), 3,5 % dusík (N_2), stopové množstvo oxidu siričitého (SO_2) a iných látok (HCl, HF, Ar, Ne, H_2O). Priemerná teplota pri povrchu: 740 K (467 °C). Priemerný tlak pri povrchu, 93 barov (9,3 MPa), zodpovedá tlaku v podmorskej hĺbke takmer 1 km na Zemi. Približne 30 km nad povrchom Venuše začína vrstva oparu. Opar prechádza do vrstvy mrakov, ktorá tiež pozostáva z viacerých vrstiev. Mraky končia približne vo výške 65 km. Všeobecné podmienky (tlak, teplota) v tejto výške sú porovnateľné s podmienkami pri zemskom povrchu. Opar nad mrakmi pokračuje do výšky 80 km. Hlavnou zložkou mrakov sú kvapky kyseliny sírovej (H_2SO_4). Tvorené sú procesom analogickým tvorbe kyslého dažďa na Zemi. Potrebné molekuly SO_2 však poskytuje sopečná činnosť, nie spaľovanie uhlia. Na Venuši naozaj prší bez konca, ale dážď kyseliny sírovej sa vyparí dlho predtým, ako dosiahne povrchu planéty. [15] Ambiciózny projekt NASA/Ames nazvaný Pioneer Venus (1978) doplnil a rozšíril sovietske iniciatívy v prieskume Venuše. Rozšírenie spočívalo predovšetkým v prvom radarovom (1,757 GHz) zmapovaní Venuše. Radarová mapa, s výškovým rozlíšením 200 m a plošným rozlíšením 23 km × 7 km (v periapsidách), zmenila niektoré tradičné predstavy o globálnej topografii planéty.

Radar sondy Pioneer Venus ukázal, že z hľadiska nie príliš výrazného rozlíšenia, ktoré bolo k dispozícii, 90 % povrchu Venuše tvoria planiny. [16] Radary zo Zeme (Arecibo, Goldstone) už skôr (1964) naznačili prítomnosť rozsiahlej náhornej plošiny v severných šírkach, dvíhajúcej sa 3000 m nad okolité planiny. Plošinu obkolesujú z každej strany horské reťaze, najmohutnejšia reťaz pretína planinu z východnej strany. Radaroví inžinieri pomenovali východnú reťaz Maxwell Montes, po Jamesovi C. Maxwellovi, tvorcovi teórie elektromagnetického poľa.

Pozemské radary identifikovali aj dve náhorné planiny kontinentálneho rozsahu v rovníkovej oblasti. Inžinieri ich nazvali Alpha Regio a Beta Regio. Radar sondy Pioneer Venus potvrdil platnosť radarových pozorovaní vykonaných zo Zeme a pripojil merania výšok, ktoré zodpovedali lepšiemu plošnému rozlíšeniu. Radar sondy Pioneer Venus zvestoval svetu, že Maxwellove pohorie dosahuje výšku

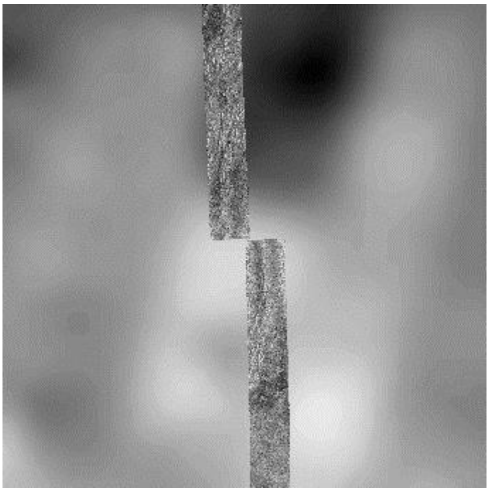


Obr. 4: *Trojrozmerná rekonštrukcia segmentu radarovej mapy Venuše z Pioneer Venus (1978, 1998). Oválny útvar je náhorná plošina Ištar Terra. Plošina je rozsahom väčšia, ako Austrália. [NASA/Ames/JPL/USGS]*

Obr. 5: *Sonda Magellan na palube raketoplánu Atlantis, pripravená k štartu. [NASA/JPL/KSC]*

11 000 m. [16] Komisia pre planetárne názvoslovie Medzinárodnej astronomickej únie prijala zásadu dávať topografickým a geologickým útvarom na Venuši ženské mená (1971). Mená sa majú čerpať z historických a súčasných kultúr. Severnej náhornej plošine komisia dala meno Ishtar Terra, po mezopotámskej bohyni lásky a vojny, spätej s Venušou (obr. 4). Meno Maxwell, jediné mužské meno na Venuši, komisia ponechala. Neutrálne mená Alpha a Beta ponechala tiež. Najvyššiemu končiaru v Maxwellovom pohorí a na planéte vôbec, komisia dala meno Skadi Mons. Menom Skadi poctili nordickú bohyňu hôr. Voľba mena odráža zmysel pre humor, v podobných súvislostiach neobvyklý – bohyňa Skadi žije uprostred horských štítov, v ríši večného snehu a ľadu. V jej sidle na Venuši, vo výške 11 000 m, teplota sa pohybuje okolo 655 K (380 °C). Pri tejto teplote sa taví nielen sneh a ľad, taví sa aj olovo.

Misia Magellan bola piata úspešná misia NASA k Venuši a prvá, ktorá v poslednom stupni vystrelenia vlastnej sondy použila platformu v obehu okolo Zeme (obr. 5). Pôvodný názov misie bol Venus Radar Mapper. Zvolené meno vystihlo cieľ misie: zamerať sa na Venušu a jediným vedeckým prístrojom, 2,38 GHzovým zobrazovacím radarom (Synthetic Aperture Radar, SAR) zmapovať povrch planéty.



Obr. 6: *Porovnanie kvality radarov Pioneer Venus a Magellan. Priesečnica Phoebe Regio a Devana Chasmy je tu zobrazená oboma radarmi: Pioneer Venus (podklad), Magellan (dva pásy). Plocha:* 525 km × 525 km. *[NASA/JPL]*

Obr. 7: *Radarová mozaika disku Venuše. Centrálny poludník: 90° E (východnej dĺžky). Tri cykly pozorovaní Magellan radarom prispeli k vytvoreniu mozaiky. Farebnú škálu poskytli snímky povrchu planéty, sňaté kamerami sovietskych pristávacích modulov Venera-13 a Venera-14. [NASA/JPL]*

K názvu misie neskôr pripojili meno Magellan (anglické znenie mena portugalského moreplavca zo šestnásteho storočia). Súbežne s rozhodnutím NASA rozbehnúť misiu Magellan, Sovieti vyslali k Venuši dve sondy, Veneru-15 a Veneru-16, obe vyzbrojené zobrazovacím radarom. Sovietske sondy zmapovali 25 % povrchu, s lineárnym rozlíšením 2 km. Sonda Magellan, nesená raketoplánom Atlantis, opustila Zem 4. mája 1989. Do blízkosti Venuše dorazila 10. augusta 1990. Navigátori JPL ju vsunuli do takmer polárnej obežnej dráhy, s periapsidou 292 km a periódou $3^{h}\ 9^{min}$. Každý obeh okolo planéty dal radaru príležitosť zobraziť pás približne 15 000 km dlhý a 20-25 km široký. Radary Pioneer Venus a Magellan delilo od seba jedno desaťročie. Pritom rozdiel v schopnostiach rozlíšenia sotva mohol byť dramatickejší (obr. 6). Mozaiky susedných pásov tvorili obrazy povrchu Venuše. Počas jedného mapovacieho cyklu (~1790 obehov), Venuša sa raz otočila okolo vlastnej osi. Jeden cyklus by mal stačiť na zobrazenie celého povrchu. Stereoskopické pokrytie vyžadovalo viac cyklov. Posledné dva cykly boli venované gravimetrii. Po ukončení šiesteho cyklu (11. októbra 1994), navigátori nasmerovali sondu tak, aby sa trením o atmosféru spomalila a ponorila do oblakov. Pravdepodobne sa vyparila prv, ako padla k povrchu.

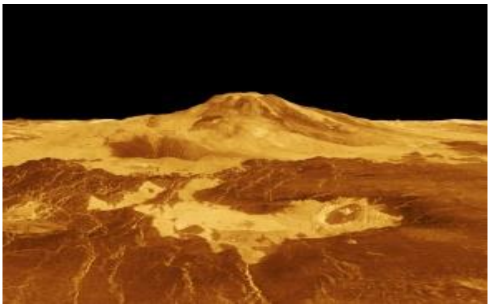
Misia Magellan súhrnne zmapovala 99 % povrchu Venuše. Výsledné obrazy, alebo mapy, majú výškové rozlíšenie 100 m a lineárne rozlíšenie medzi 100 m a 1 km (oboje približne) (obr. 7). Priemerný [„mean“] polomer Venuše, odvodený z altimetrie Magellanu, je 6051,84 km. S priemerným polomerom 6371.10 km, je Zem len o málo väčšia. Distribúcia topografických výšok na Venuši je unimodálna: výšky na prevažnej časti (80 % až 90 %) povrchu planéty majú hodnoty nie veľmi sa navzájom líšiace. Tu sa Venuša a Zem podstatne rozchádzaju. Distribúcia topografických výšok na Zemi je bimodálna: kontinenty a dná oceánov sú charakterizované svojimi vlastnými distribúciami. Napokon, radar Magellanu upresnil znalosť rotačnej periódy Venuše na −243,0185 ± 0,0001 dní. [17]

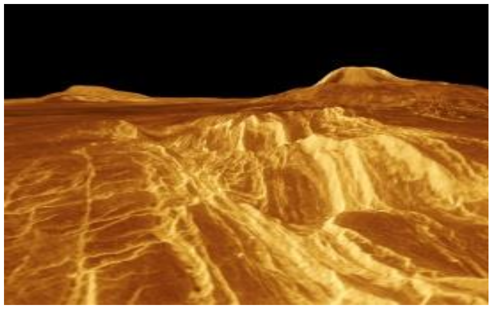
Radar Magellanu umožnil vykonať morfologickú klasifikáciu Venušiných terénnych typov. Povrch Venuše sa ukázal byť geologicky mladý. Povrch Zeme podlieha erózii, prevažne akvatickej (vodnej) a eolickej (veternej). Erózia zastiera geologickú históriu terénnych typov.

Venuša predstavuje iný prípad. Pri povrchu planéty vody niet a v hustej, horúcej atmosfére niet ani erozívneho vánku, preto postupná erózia a sprievodná tvorba pôdy na Venuši nejestvuje. Čo na Venuši vidíme, je stuhnutá láva v rôznych stupňoch mechanického narušenia a deformácie. Dlho ospevované a hľadané oceány na Venuši sú v skutočnosti oceány tvrdého bazaltu. Rozbitý, dolámaný kamenistý povrch nemá obdobu na žiadnej z planét slnečnej sústavy. Merkúr a Mesiac poznajú mikroskopickú eróziu drobnými kolíziami. Atmosféra Venuše nedovolí menším objektom preniknúť k povrchu. Narušenia a deformácie sú dielom sopečnej činnosti a tektonických poryvov. Dominantným terénnym typom na Venuši sú sopečné pláne, sopečné plošiny, sopečné kupoly rôznych veľkostí a rozsiahle štítové sopky („shield volcanoes“).

Štítové sopky spravidla rastú opakovanými erupciami lávy nízkej viskozity. Markantným príkladom štítovej sopky je Maat Mons v Atla Regio. Sopka má impozantný objem, $2{,}1 \times 10^5$ km^3, a je najvyššia na Venuši. Dvíha sa 5 km nad okolité pláne (obr. 8). (Maat bola egyptská bohyň pravdy.) Radar Magellanu identifikoval viacero štítových sopiek po celom povrchu Venuše. Ich široký výskyt je indikáciou živej sopečnej činnosti – určite v minulosti a azda aj v prítomnosti. Ďalší inštruktívny príklad poskytuje dvojica Gula Mons a Sif Mons v Eistla Regio.

Obe sopky tvoria dvojicu pravdepodobne rovnakého veku. Majú objem menší ako Maat Mons, ale stále značný ($\sim 10^4$ km^3) a hoci sú nižšie (3 km, 2 km), obe sa výrazne dvíhajú nad všeobecne plochý terén planéty (obr. 9). (Gula bola Mezopotámska bohyňa zdravia, Sif nordická bohyňa zeme, mená Atla a Eistla sa vyskytuje v nordickej mytológii.) Charakteristická pre Venušu je rozmanitosť sopečných štruktúr. Na úbočí Maat Mons hniezdia malé kupolovité útvary, najskôr sopečného





Obr. 8: *(vľavo hore) Trojrozmerná rekonštrukcia radarovej mapy štítovej sopky Maat Mons, druhého najvyššieho končiara na Venuši. Výška: 8 km vzhľadom k priemernému polomeru planéty. Súradnice:* 0,5° *N,* 194,6° *E. Rekonštruovaný pohľad je od severu, zo vzdialenosti* 600 km*. Vertikálna mierka:* 10 × *horizontálnej mierky. [NASA/JPL]*

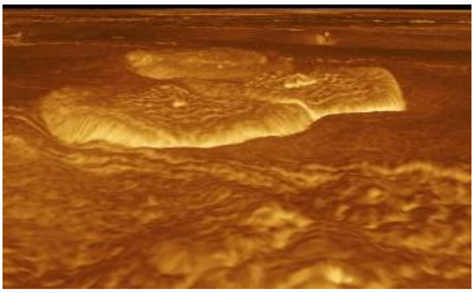
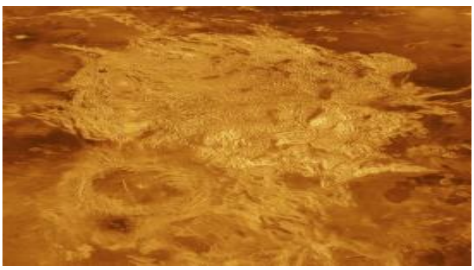
Obr. 9: *(vpravo hore) Trojrozmerná rekonštrukcia radarovej mapy štítových sopiek Sif Mons (vľavo) a Gula Mons (vpravo). Súradnice Gula Mons:* 22° *N,* 359° *E. Simulovaný pohľad je od juhovýchodu, zo vzdialenosti* 700 km*.[NASA/JPL]*

Obr. 10*: (dole) Lievancovité kupoly v Eistla Regio. Súradnice stredu obrazu:* 12,3° *N,* 8,3° *E. Rozmery obrazu:* 250 km *(horizontálne)* × 160 km *(vertikálne).[NASA/JPL]*

pôvodu. Podobne sopečného pôvodu sú tisíce kupol rôznych veľkostí, rozhádzaných po povrchu planéty.

Príkladom kupol extrémnej veľkosti sú tzv. lievance („pancake domes") v Eistla Regio (obr. 10). Lievance, kupoly majú kruhový pôdorys, strmé steny, plochý vrch. Ich priemer dosahuje 60 km, výška 1 km. Predstavujú kategóriu sopiek vlastných výlučne Venuši. Typy sopiek, aké poznáme na Zemi (plínijské, či kužeľovité) sa spravidla prejavujú explozívnymi erupciami a sú spojené s lávami nízkej viskozity.

Za vznikom Venušiných kupol je pravdepodobne vysokoviskózna magma nenásilne presakujúca z plášťa planéty. Postupné uvoľňovanie vysokoviskóznej magmy zrejme malo širšiu úlohu pri tvorbe krajiny na Venuši. Pomerne jasný prípad je plošina Alpha Regio. Fyzicky blízke kupoly, vyvrhujúce súčasne, vytvorili spoločný magmatický front. Pomaly postupujúca magma sformovala východné krídlo plošiny (obr.11). Sformovala možno nielen východné krídlo, ale plošinu celú. Pozrime sa na Merkúr a Mesiac. Obe telesá sú posiate kolíznymi krátermi všetkých veľkostí a druhov do nasýtenia. Vzorky hornín z Mesiaca majú dokonca mikrokrátery „vydolované“ kolíziami s galaktickým prachom. Kolízie na Venuši nehrali krajinotvornú rolu. Nájdeme tu len neveľký počet izolovaných kráterov, s priemerom nad 3 km. Menších kráterov niet. Nepreniknuteľná atmosféra spôsobuje odseknutie veľkosti. Kráter Jeanne, o priemere 19,5 km, môže slúžiť za príklad charakteristicky izolovaného kolízneho kráteru na Venuši (obr. 12).

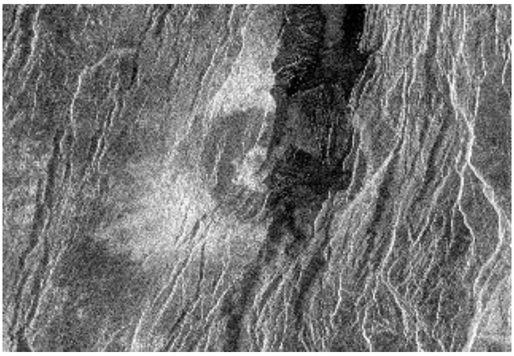

Obr. 11: *(vľavo hore) Trojrozmerná rekonštrukcia radarovej mapy východného okraja Alpha Regio. Splývajúce kupoly majú každá priemer* 25 km *a výšku* 750 m. *[NASA/JPL]*
Obr. 12: *(vpravo) Kolízny kráter Jeanne. Súradnice:* 40,0° *N,* 331,4° *E. [NASA/JPL]*
Obr. 13: *(vľavo dole) Alpha Regio. Mierne vyvýšená plošina o priemere približne* 1500 km. *Súradnice stredu plošiny*: 22° *S,* 5° *E. Pod plošinou (doľava) nachádza sa neklasifikovaný oválny útvar, pomenovaný Eva. Uprostred Evy vidieť jasný bod. Bod bol zvolený za kotvu nulového poludníka Venušinej kartografickej siete. [NASA/JPL]*

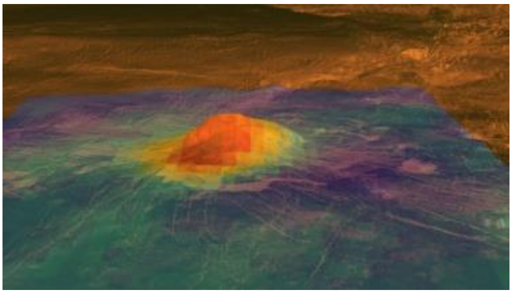
Vráťme sa k Alpha Regio. Lievancovité kupoly na okraji komplexu môžu slúžiť za príklad opačného javu: nakopenia sopiek a ich postupných erupcií. Na povrchu plošiny niet známky po inej činnosti, než vulkanickej. Pozorujeme len rozbitú lávu, pripomínajúcu dolámané parkety (*tesserae*). Mechanicky hrubo porušený terén poskytol ideálny terč pre radar a dovolil detekciu plošiny zo Zeme – skôr, ako sa to podarilo z obežnej trajektórie (obr. 13).

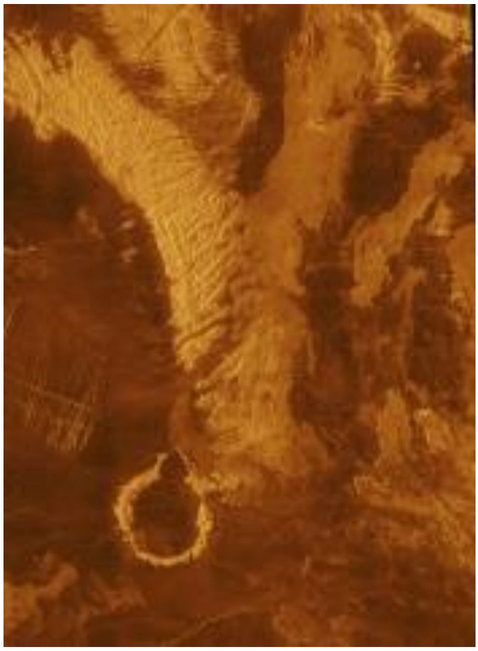
Kôra Zeme pozostáva z viacerých tektonických dosiek a úlomkov dosiek. Násilný styk medzi doskami (trenie, zrážky, subdukcia, atď.) vedie k vulkanizmu. Preto sopky na Zemi ležia predovšetkým pozdĺž okrajov tektonických dosiek. Výnimočne sa vyskytnú sopky aj za hranicami, vo vnútri dosiek. V tom prípade ide o predĺženie magmatických jazykov čiahajúcich z hlbokého plášťa Zeme. Príkladom nekonvenčne umiestnených sopiek je skupina Hawaiiských ostrovov, uprostred Tichomorskej dosky. Náhodné rozloženie sopiek na Venuši naznačuje, že planéta nemá systém tektonických dosiek. Kôra planéty je sama súvislá doska, škrupina. Každá sopka je v princípe Hawaiiského typu. Venuša sa výrazne líši od Zeme a od ostatných kamenných planét (vrátane Mesiaca) počtom magmatických kontaktov s plášťom, prejavujúcich sa ako sopky. Venuša nepozná globálny tektonizmus. Lokálna tektonická činnosť sa prejavila útvarmi, inde neznámymi.

Napríklad, trhlina 20 km široká sa otvorila v Beta Regio geologicky nedávno. Podobný úkaz si na Zemi sotva vieme predstaviť (obr. 14). Navyše, nevieme si predstaviť kataklizmatickú udalosť (alebo sériu na seba nadväzujúcich kataklizíem), ktorá postihla Venušu pred približne 500 miliónmi rokov. Láva nízkej viskozity zaplavila všetky planiny – viac ako tri štvrtiny povrchu planéty. (Grandiózna lávová záplava Venuše suverénne triumfla skromnú vodnú potopu Zeme.) Dôkazom lávovej záplavy je relatívna neprítomnosť väčších kolíznych kráterov. Krátery, ktoré Venuša má, počtom a morfológiou sú zjavne mladé. Magellanova radarová mapa okraja Leda Planitia ilustruje základnú sekvenciu udalostí spojených so záplavou (obr. 15). Najstaršie terény sú roztrieštené a chaotické výšiny – možno zbytky kôry z obdobia pred záplavou. Kruhová štruktúra o priemere 40 km je pravdepodobne hrebeň zaplaveného krátera. Ak predpokladáme, že kolízia s asteroidom vyhĺbila 3 km hlbokú jamu, máme hrubý odhad hĺbky lávového oceánu. Plošná hustota kráterov na planinách dáva odhad veku zaplaveného povrchu. [18]

S vysokým počtom sopiek je z hľadiska geológie a geofyziky Venuše spojená otázka prvoradej dôležitosti: sú zobrazené sopky aktívne? Misia Magellan otázku nadhodila, odpoveď ale musela prísť z iných zdrojov. Prvé dôkazy sopečnej aktivity boli nepriame a nie plne spoľahlivé. Sovietske sondy Venera-9 (1975) a Venera-







***Obr. 14:** (vľavo hore) Tektonicky zničený kolízny kráter Somerville v Beta Regio.*
Pôvodný priemer: približne 37 km. *Súradnice:* 29,9° *N,* 282,9° *E.[NASA/JPL]*
***Obr. 15:** (vpravo) Lávou zaplavená Leda Planitia. Súradnice stredu obrazu: 41° N, 52° E.*
Rozmery obrazu: 220 km *(horizontálne),* 275 km *(vertikálne).[NASA/JPL]*
***Obr. 16:** (vľavo dole) Relatívne teploty v oblasti štítovej sopky Idunn Mons (*46,0° *S,* 214,5° *E). Pozadie tvorí trojrozmerná rekonštrukcia radarovej mapy sopky. Teplé farby predstavujú spektroskopicky pozorované vyššie teploty. Vrchná štvrtina obrazu nie je pokrytá spektroskopickými údajmi. [NASA/JPL/ESA/ASI]*

12 (1978) a sonda ESA, Venus Express (2007), zachytili údery bleskov v atmosfére Venuše. Prostredím pre hromobitie mohol byť popol vymrštený erupciami a rozptýlený v atmosfére. Kolísanie atmosférického obsahu oxidu siričitého, zistené viacerými sondami, môžeme tiež pokladať za nepriame potvrdenie sopečnej činnosti na Venuši. Prvý, provizórne priamy dôkaz lokálne zvýšenej teploty podal spektrometer VIRTIS (Visible and Infrared Thermal Imaging Spectrometer), na palube sondy Venus Express (2007). Pozorovania v infračervenom pásme naznačili, že skaly smerom k vrcholcu sopky Idunn Mons, týčiacej sa 2,5 km nad okolie, vykazujú vyššiu teplotu ako okolie, (obr. 16) (Idunn bola nordická bohyňa jari.) VIRTIS identifikoval aj niekoľko bodov s premenlivou teplotou v oblasti Maat Mons. [19]

Viac misií k Venuši sa nachádza v rôznych štádiách definovania cieľov. Spomeniem jednu. Ruská kozmická agentúra Roskosmos plánuje misiu pomenovanú

Venera-D („dlugoživuščaja“), v spolupráci s NASA. „Dlhý život“ sa vzťahuje na želanie, aby pristávací modul ostal funkčný v krutých podmienkach pri povrchu planéty aspoň 24 hodín. Modul Venera-13 pracoval rekordných 127 minút, modul Venera-14 len 57 minút. O radare sa uvažuje ako o jednom z prístrojov, ktoré by mohli tvoriť vedecký základ obežnej sondy. Ani jeden z potenciálnych partnerov misiu Venera-D definitívne neschválil. Pôvodný termín štartu, r. 2026, prestáva prichádzať do úvahy. Nadhodený bol náhradný termín, v r. 2031. [20] Prvé roky robotických kozmických letov boli svedkami tlačenice okolo Venuše. Tie časy sa pominuli. Pominuli, ale vari nie natrvalo. Predný americký exobiológ David H. Grinspoon kritizuje záporné odpovede na otázku, či Venuša môže hostiť zivot. Nesúhlasí s nezahrnutím Venuše do debát o živote na Marse, mesiacoch Európa (Jupiter) a Titan (Saturn) a planétach inde v galaxii. Odmietavý postoj voči Venuši nie je oprávnený. Je založený na nepodloženom predpoklade znalosti univerzálnej definície života a pravidiel pre obývateľnosť planét. Grinspoon hovorí: „Skutočný osoh planetárneho prieskumu je sebapoznanie. Venuša je naše dvojča – nie identické, ale dvojča jednako. Ponúka prísľub a rozšírenú perspektívu Zemi a jej novo uvedomelých obyvateľov. Vážme si každý kúštiček znalostí, ktoré nám Venuša dáva. Je naším jediným dvojčaťom.“ [21]

Misia Magellan a ostatné vymenované misie nám poskytli určitý, sotva povznášajúci obraz fyzikálnych realít Venuše. Čitateľ nech posúdi, či sa s optimistickým hodnotením role planetárneho prieskumu a Venuše, zvlášť načrtnutým v závere tohoto článku, vie, alebo má stotožniť. Názory na užitočnosť a potrebnosť kozmických letov, robotických či ľudských, pokrývajú široké spektrum.

LITERATÚRA – REFERENCES

[1] L. E. Roth and S. D. Wall, editors, *The Face of Venus: The Magellan Radar Mapping Mission*, Washington, DC: National Aeronautics and Space Administration Special Publication 520 (1995).

[2] S. Drake, *Galileo at Work: His Scientific Biography*, Chicago: University of Chicago Press (1978); P. Palmieri, 'Galileo and the Discovery of the Phases of Venus', *Journal for the History of Astronomy* 21 (2001), 109.

[3] B. N. Menshutkin, *Russia's Lomonosov: Chemist, Courtier, Physicist, Poet*, J. E. Thal and E. J. Webster, tr., Princeton: Princeton University Press (1952); V. Shiltsev, 'The 1761 Discovery of Venus' Atmosphere: Lomonosov and Others', *Journal of Astronomical History and Heritage* 17 (2014), No. 1, 85.

[4] W. Sheehan, *Worlds in the Sky: Planetary Discovery from Earliest Times Through Voyager and Magellan*, Tucson: University of Arizona Press (1992), 67.

[5] P. Moore, *The Planet Venus*, New York: Macmillan (1959), 80, 133.

[6] K. Lodders and B. Fegley, *The Planetary Scientist's Companion*, New York: Oxford University Press (1998), 110; https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/venusfact.html.

[7] M. J. Crowe, *The Extraterrestrial Life Debate 1750-1900*, Cambridge: Cambridge University Press (1986), 11, 21, 52, 72, 370.

[8] G. Basalla, *Intelligent Life in the Universe*, Oxford: Oxford University Press (2006), 51; M. J. Crowe, *The Extraterrestrial Life Debate, Antiquity to 1915: A Source Book*, Notre Dame, Indiana: University of Notre Dame Press (2008), 180.

[9] S. J. Dick, *The Biological Universe: The Twentieth-Century Extraterrestrial Life Debate and the Limits of Science*, Cambridge: Cambridge University Press (1996), 15, 129.

[10] R. Bradbury, *Death by Rain*, New York: Love Romances Publishers (1950).

[11] W. S. Adams and T. Dunham, 'Absorption Bands in the Infrared Spectrum of Venus', *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 44 (1932), 243; C. H. Mayer, T. P. McCullough, and R. M Sloanaker, 'Observations of Venus at 3.15 cm Wave Length', *Astrophysical Journal* 127 (1958), 1; J. S. Lewis and R. Prinn, *Planets and Their Atmospheres*, Orlando: Academic Press (1984).

[12] L. Niven, *Becalmed in Hell*, New York: Blackstone Publishing (2017).

[13] C. P. Sonett, 'A Summary Review of the Scientific Findings of the Mariner Venus Mission', *Space Science Reviews* (1963), 751.

[14] V. M. Vakhnin, 'A Review of the Venera 4 Flight and Its Scientific Program', *Journal of the Atmospheric Sciences* 25 (1968), 533.

[15] D. M. Hunten et al., editors, *Venus*, Tucson: University of Arizona Press (1983).

[16] R. O. Fimmel, L. Colin, and E. Burgess, *Pioneer Venus*, Washington, DC: National Aeronautics and Space Administration Special Publication 461 (1983).

[17] R. S. Saunders et al., 'Magellan Mission Summary', *Journal of Geophysical Research* 97 (1992), 13.067; H. Moritz, 'Geodetic Reference System 1980', *Geodesy* 74 (2000), 128.

[18] S. W. Bougher et al., editors, *Venus II*, Tucson: University of Arizona Press (1997).

[19] 'Have Venusian Volcanoes Been Caught in the Act?', European Space Agency Press Release (3 December 2012).

[20] 'Development of the Venera-D Mission Concept: From Science Objectives to Mission Architecture', Houston: Lunar and Planetary Science Conference, Contribution 2083 (19 March 2018).

[21] D. H. Grinspoon, *Venus Revealed: A New Look Below the Clouds of Our Mysterious Twin Planet*, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley (1997).

Adresa autora: Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, emeritus,
e-mail:ladislavroth@sbcglobal.net

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2020 (49)

Z HISTÓRIE SPOLOČNOSTI MATEMATIKOV A FYZIKOV

JSMF pri SAV, pobočka Banská Bystrica Minulosť a súčasnosť

Ľuboš Krišťák, Jana Špirková

Úvod

Príspevok prezentuje stručný historický prehľad mnohých aktivít JSMF pri SAV, pobočka Banská Bystrica, realizovaných počas jej existencie, s uvedením mien osôb, ktorí na týchto aktivitách významne participovali. Z dôvodu zvýšenia prehľadnosti textu sú mená osôb v článku uvádzané bez akademických titulov, čím v žiadnom prípade nechceme znižovať ich význam a dôležitosť ich príspevku k činnosti pobočky. Pri zostavovaní textu sme využili dostupné historické dokumenty, napriek našej snahe niektoré faktografické údaje nemusia byť celkom presné.

Jednou zo šiestich pobočiek (vtedajšej) Jednoty československých matematikov a fyzikov, ktoré boli založené v roku 1956 na Slovensku, bola pobočka Zvolen. V tom čase, na rozdiel od súčasnosti, bola Jednota vedeckou spoločnosťou pri Československej akadémii vied, a tomu zodpovedali aj jej ciele a aktivity. Hlavným cieľom bolo podporovanie vedeckej práce v oblasti matematiky a fyziky, ďalej zvyšovanie úrovne vyučovania na vysokých, stredných a základných školách, propagácia výsledkov vedeckého bádania a podpora študentov talentovaných na matematiku a fyziku.

Pobočka Jednoty československých matematikov a fyzikov (JČSMF) vo Zvolene bola založená na slávnostnej ustanovujúcej schôdzi 24. novembra 1956 v budove Rektorátu Vysokej školy lesníckej a drevárskej vo Zvolene (VŠLD). Medzi zakladajúcimi členmi pobočky boli dlhoroční členovia JČSMF, ako napríklad B. Šofr, člen od roku 1910, F. Krsek, člen od roku 1925, L. Thern, člen od roku 1930, C. Palaj, člen od roku 1933. Ustanovujúcej schôdze sa zúčastnil akademik J. Hronec, predseda slovenského výboru JČSMF. Sídlom pobočky sa stala Katedra matematiky a fyziky VŠLD. Bol zvolený prvý výbor pobočky v zložení: L. Thern (predseda), P. Višňovský (podpredseda), C. Palaj (tajomník), J. Adamča, Ľ. Beracková, J. Jánoš a A. Grega. V ďalšom období sa vo funkcii predsedu pobočky vystriedali C. Palaj (1959-1978), A. Dekrét (1979-1987), R. Nedela (1988-1992), S. Ondrejka (1993-1995), J. Krajčo (1996-2004), B. Riečan (2005-2010), V. Bahýľ (2011-30. 4. 2016), J. Špirková (1. 5. 2016-doteraz).

Členmi zvolenskej pobočky Jednoty boli na začiatku jej činnosti najmä učitelia vysokých škôl so sídlom vo Zvolene a v Banskej Bystrici a učitelia stredných škôl zo Zvolena, Banskej Bystrice, Lučenca, Rimavskej Soboty, Prievidze a Žiaru nad Hronom.

Po roku 1956 prešla Jednota viacerými organizačnými zmenami. Celoštátny zjazd JČSMF, ktorý sa konal 23. - 25. 4. 1969, schválil dve rovnoprávne organizácie: Jednotu českých matematikov a fyzikov a Jednotu slovenských matematikov a fyzikov v rámci JČSMF. Kvôli zjednodušeniu textu nebudeme striktne odlišovať JČSMF pred rokom 1969 a JSMF.

V roku 1987 nekandidoval do funkcie predsedu pobočky, napriek úsiliu dovtedajších funkcionárov, žiadny pracovník VŠLD, dovtedajšieho sídla pobočky. Dôsledkom boli zmeny sídla pobočky a postupne sa ustálil jej názov do súčasnej podoby: *JSMF pri SAV, pobočka Banská Bystrica*.

Od 20. 5. 1993 je sídlom pobočky Fakulta prírodných vied Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici (FPV UMB).

V 70-tych a 80-tych rokoch 20-teho storočia sa na základných a stredných školách kládol dôraz na vzdelávanie v matematike a v prírodných vedách, lebo spoločnosť potrebovala zvýšiť počet lekárov a inžinierov rôznych technických zameraní. V tom období bez stanoviska JSMF boli zmeny v učebných plánoch ZŠ a SŠ nemysliteľné. Okrem toho bola snaha skvalitniť vzdelávanie a nezastupiteľnú úlohu pri tzv. modernizácii vyučovania matematiky a fyziky mala Jednota. Dôsledkom bol nárast členskej základne (najmä učiteľov zo ZŠ) a napríklad v r. 1987 mala pobočka 397 platiacich členov a v nasledujúcich dvoch rokoch tento počet presiahol 400.

1. Prednášky, semináre, letné/zimné školy a konferencie pre učiteľov a vedeckých pracovníkov.

Založenie pobočky bolo impulzom pre aktivizáciu vedecko-výskumnej činnosti v oblasti matematiky a fyziky na vysokých školách v Banskej Bystrici a vo Zvolene, kde táto činnosť nemala dlhodobé tradície. Bolo tiež podnetom pre zvyšovanie úrovne vzdelávania na školách všetkých typov a stupňov v stredoslovenskom regióne.

Počas celého obdobia činnosti pobočky prebiehali prednášky na rôzne aktuálne témy z matematiky a fyziky v rôznych mestách južnej časti stredného Slovenska. Odzneli stovky prednášok, pričom najčastejšími prednášateľmi boli učitelia z katedier matematiky a fyziky z Banskej Bystrice a zo Zvolena, ale často to boli aj významní slovenskí a českí matematici a fyzici, napríklad Š. Schwarz, O. Borůvka,

J. Novák, V. Štěpanský, J. Nožička, K. Havlíček, A. Apfelbeck, A. Švec, M. Kolibiar a M. Harant.

Pobočka počas prvých šiestich rokov zorganizovala 368 prednášok pre učiteľov matematiky a fyziky na vysokých a stredných školách a bola aj počas nasledujúceho obdobia hodnotená ako jedna z najaktívnejších nielen na Slovensku, ale aj v rámci Československa. Na prednáškach sa podieľali predovšetkým učitelia z katedier matematiky a fyziky z vysokých škôl vo Zvolene a v Banskej Bystrici. Uvádzame mená aspoň niektorých z nich: L. Thern, C. Palaj, P. Višňovský, A. Grega, Ľ. Beracková, T. Klein, F. Husárik a S. Ondrejka.

Prvý vedecký seminár zameraný na matematiku viedol vo Zvolene C. Palaj v rokoch 1957-63. Išlo o seminár z algebraickej geometrie a zúčastňovali sa ho aj učitelia vysokých škôl zo Žiliny, Nitry a Banskej Bystrice. Prvú letnú školu organizoval v roku 1959 na vysokej škole lesníckej a drevárskej (VŠLD) P. Višňovský a mala názov Teória a prax topografických prác.

V ďalších rokoch počas letných prázdnin zorganizoval tajomník pobočky T. Klein v spolupráci s Ústavom pre ďalšie vzdelávanie učiteľov v Banskej Bystrici 13 letných škôl pre učiteľov matematiky a fyziky zo ZŠ a SŠ v rôznych mestách stredoslovenského kraja. Napríklad 5. až 8. júla 1961 sa uskutočnila letná škola z experimentálnej fyziky a 6. až 8. júla 1964 letná škola pre učiteľov matematiky ZŠ, SŠ a SPŠ.

V dňoch 10. až 14. 9. 1973 pobočka organizovala v Sklených Tepliciach 9. celoštátnu konferenciu o matematike na vysokých školách technických, ekonomických a pôdohospodárskych, ktorej sa zúčastnilo 90 účastníkov. Organizačne ju pripravili T. Klein a D. Palumbíny. V spolupráci s VŠLD pobočka organizovala v dňoch 5. až 8. 6. 1978 v Turanoch Celoštátnu konferenciu o vyučovaní matematiky na vysokých školách poľnohospodárskych, lesníckych a drevárskych. V dňoch 25. až 29. 8. 1980 taktiež organizovala Celoštátnu konferenciu o matematike v Banskej Bystrici, na ktorej sa zúčastnilo 131 účastníkov. Organizačne ju pripravili A. Dekrét a T. Klein. Seminár s podobným zameraním sa na VŠLD uskutočnil aj v r. 1999.

Prvý matematický vedecký seminár, ktorý ovplyvnil aj kvalifikačný rast na Katedre matematiky a deskriptívnej geometrie VŠLD, viedol A. Dekrét od r. 1974 vyše dvoch desaťročí a mal názov Diferenciálna geometria so zameraním na fibrované priestory. Jeho dlhodobí účastníci T. Klein a F. Husárik, spolu s A. Dekrétom, zorganizovali aj niekoľko česko-slovenských konferencií s uvedeným zameraním.

S. Ondrejka a P. Ferko z Katedry fyziky na Pedagogickej fakulte (KF PF) v Banskej Bystrici zorganizovali v 70-tych rokoch v spolupráci s Krajským pedagogickým ústavom a Okresným pedagogickým ústavom v Banskej Bystrici celý rad významných podujatí, medzi ktoré patrili Celoslovenská konferencia o vyučovaní stredoškolskej fyziky (Banská Bystrica, 1972), I. Celoslovenský seminár o vyučovaní fyziky na ZŠ (Martin, 1974), Celoslovenská konferencia o stave vyučovania fyziky na odborných učilištiach a učňovských školách (Banská Bystrica, 1974), seminár – Diagnostické metódy vo vyučovaní fyziky (Veľký Krtíš, 1975), III. Celoslovenská konferencia o vyučovaní fyziky (Banská Bystrica, 1977), Krajský seminár o vyučovaní fyziky na SOU (Detva, 1978), Seminár o vyučovaní fyziky na vysokých školách (Banská Bystrica, 1979).

S veľkým úspechom sa stretli fyzikálne semináre s názvom Vanovičove dni, ktorých prvý ročník zorganizovala KF PF v r. 1980 v Banskej Bystrici a odvtedy prebiehajú semináre každoročne v rôznych mestách Slovenska.

KF PF bola v 80-tych rokoch špičkovým pracoviskom pre tvorbu a využívanie učebných pomôcok. S. Ondrejka získal ocenenia aj na medzinárodných výstavách učebných pomôcok, bronzová medaila Bazilej 1984, zlatá medaila Lipsko 1985. Medzi úspešných tvorcov učebných pomôcok patril aj R. Baník, ktorého súpravy pre pokusy z elektriny boli sériovo vyrábané a distribuované do škôl v počte štyri tisíc kusov. Preto je prirodzené, že v r. 1986 zorganizovala KF PF konferenciu k otázkam navrhovania a tvorby učebných pomôcok.

Pracovníci Katedry matematiky Pedagogickej fakulty (KM PF) v Banskej Bystrici sa podieľali na organizácii zimných škôl zameraných na teóriu univerzálnych algebier a teóriu zväzov, ktoré sa konali v Krpáčove (1979-1980), v Palcmanskej Maši (1981-91) a v Lučatíne (1993). Zimných škôl sa zúčastňovali vysokoškolskí učitelia z Bratislavy, Košíc, Žiliny, Banskej Bystrice a zamestnanci Matematického ústavu SAV.

V 80-tych rokoch sa konali semináre:

- na KM PF v Banskej Bystrici: Algebraické štruktúry a usporiadané množiny (A. Haviar),
- na VŠLD vo Zvolene: Matematické a fyzikálne problémy interakcie dreva s rôznymi formami energie (A. Dekrét, M. Marčok, E. Rajčan),
- na KF PF v Banskej Bystrici a prebiehal aj v Detve: Seminár z didaktiky fyziky (P. Ferko, M. Hruboš),
- v Detve: Seminár o metodike programovania a využití výpočtovej techniky (V. Bahýľ, D. Sarvaš),
- v Jarabej: semináre o aplikáciách matematiky a fyziky (A. Dekrét, R. Zimka).

Na VŠLD vo Zvolene sa v tej dobe konal cyklus prednášok na tému Matematická teória optimálneho riadenia, prednášali F. Husárik, A. Dekrét, V. Vacek a M. Matejdes.

J. Brincková z Fakulty prírodných vied Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici (FPV UMB) organizovala pre učiteľov matematiky v rokoch 1990-2000 semináre zamerané na aktuálne otázky z didaktiky matematiky. Prednášali na nich A. Plocki, J. Kopka, M. Hejný, J. Novotná a viacerí učitelia zo slovenských vysokých škôl. Pre učiteľov J. Brincková organizovala tiež prednášky z kombinatoriky na školách v Krupine, Detve, Brezne, Rimavskej Sobote, Revúcej a v Žarnovici.

Pobočka JSMF v spolupráci s Katedrou fyziky FPV UMB zorganizovala:

- v roku 1993 medzinárodnú konferenciu pod názvom Fyzikálne vzdelávanie ako súčasť prírodovedného vzdelávania,
- v roku 1996 seminár pod názvom Prírodovedné vzdelávanie, v rámci ktorého s prednáškami vystúpili W. Hudson z V. Británie a Jansen z Holadska,
- v roku 1998 na Táloch v Nízkych Tatrách medzinárodnú konferenciu o vzdelávaní učiteľov prírodovedných predmetov.

V rokoch 1993-1995

- KF FPV UMB organizovala semináre o fyzikálnych experimentoch, na ktorých sa podieľali S. Ondrejka, R. Baník, P. Ferko, S. Holec a J. Krajčo,
- M. Haviar z FPV UMB organizoval seminár pod názvom Teória dualít.

R. Nedela (v spolupráci s J. Karabášom, P. Kráľom a Ľ. Törökom) zorganizovali Česko-Slovenskú konferenciu z teórie grafov (Donovaly 1992, Šachtičky 2011) a medzinárodné konferencie Graph Embeddings and Maps on Surfaces (Donovaly 1994, Banská Bystrica 1997, Tále 2009, Smolenice 2013, Podbanské 2017).

Od roku 1995 pracuje pod vedením Ľ. Snohu na Katedre matematiky FPV UMB vedecký seminár Dynamické systémy. Referujú sa v ňom vedecké články z dynamických systémov a vlastné vedecké výsledky účastníkov seminára, na seminári vystupujú aj zahraniční hostia. Od začiatku jeho existencie bol účastníkom aj P. Maličký, neskôr sa pridali žiaci Ľ. Snohu R. Hric, V. Špitalský a M. Dirbák. V súčasnosti v seminári pracujú už aj doktorandi R. Hrica a V. Špitalského. Počas rokov vzniklo v seminári množstvo vedeckých prác a aj na jeho základe sa sformoval jeden zo súčasných slovenských špičkových vedeckých tímov identifikovaných Akreditačnou komisiou v r. 2015. Seminár počas celej svojej existencie výrazne ovplyvňoval a ovplyvňuje vedecké smerovanie Katedry matematiky FPV UMB.

V spolupráci s JSMF bolo zorganizovaných aj viacero workshopov a konferencií z dynamických systémov. Ľ. Snoha spolu s J. Smítalom založili v r. 1997 tradíciu každoročných česko-slovenských workshopov z dynamických systémov. Napr. hneď prvé tri z nich organizoval Ľ. Snoha na Slovensku, v Liptovskom Trnovci. Jednota pomáhala bansko-bystrickej skupine dynamických systémov aj pri organizovaní druhej a štvrtej konferencie pod názvom Visegrad Conference on Dynamical Systems (Štrbské Pleso, 2007; Banská Bystrica, 2011).

V rokoch 1995-2004

- každoročne sa konalo na Technickej univerzite vo Zvolene (TU) Kolokvium ACOUSTICS, ktoré organizoval E. Rajčan,
- na FPV UMB prebiehal Seminár z teórie grafov so zameraním na graciózne ohodnotenia grafov a excentricity grafov, ktorí organizovali A. Haviar a P. Hrnčiar.

Vedecký seminár Dynamické modely v ekonómii bol založený v akademickom roku 1997/98 R. Zimkom na Katedre kvantitatívnych metód a informačných systémov Ekonomickej fakulty Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici (EF UMB). Cieľom seminára bolo študovať možnosti aplikácií matematiky v ekonómii. Seminár beží nepretržite až do dnešných dní, pričom jeho účastníci sa stretávajú približne dvakrát mesačne. Do roku 2013 bolo hlavnou témou seminára predovšetkým skúmanie dynamiky makroekonomických procesov s dôrazom na konštrukciu spojitých dynamických modelov týchto procesov a ich skúmanie vzhľadom na existenciu rovnovážnych stavov, skúmanie ich stability a vyšetrovanie problematiky existencie hospodárskych cyklov v okolí rovnovážnych stavov. Od roku 2014 sa v rámci seminára začala skúmať tiež problematika efektívnosti podnikov a inštitúcií prostredníctvom DEA modelov (Data Envelopment Analysis). Na seminári niekoľko ráz mali prednášky nasledujúci špičkoví svetoví odborníci:

- Profesor M. Luptáčik z Economic University vo Viedni (Input-Output analýza a DEA modely),
- Profesor G. Feichtinger z University of Technology vo Viedni (Dynamické modely),
- Profesor E. Thanassoulis z Aston University v Birminghame, Veľká Británia (DEA modely).

Činnosť seminára umožnila jeho účastníkom skvalitňovať ich vedeckú činnosť, čo sa postupne začalo prejavovať na ich aktívnych vystúpeniach na konferenciách doma aj v zahraničí a hodnotných vedeckých publikáciách. Od jeho založenia až do roku 2015 bol seminár vedený R. Zimkom. Od roku 2016 vedie tento seminár RNDr. M. Hužvár, PhD.

B. Riečanom bol založený seminár Aká si mi krásna..., ktorý predstavoval a dodnes predstavuje veľmi významný príspevok k životu matematickej komunity. Po B. Riečanovi prevzal jeho organizáciu M. Haviar a po šesťročnej zodpovednej práci odovzdal štafetu kolegovi P. Hanzelovi, ktorého po roku nahradil L. Lafférs.

Seminár je určený širokému okruhu účastníkov, najmä stredoškolským a vysokoškolským študentom a učiteľom. Koná sa pravidelne nepárne utorky počas trvania semestra, v čase od 13:00 do 14:00 na Katedre matematiky FPV UMB v Banskej Bystrici, v prednáškovej miestnosti profesora Štefana Známa, č. 234.

Katedra matematiky PF UMB zorganizovala

- v roku 2000 v Trenčianskych Tepliciach medzinárodnú konferenciu zameranú na prípravu učiteľov matematiky s názvom Autentické vyučovanie a využitie medzipredmetových vzťahov,
- v roku 2001 v Liptovskom Trnovci medzinárodnú konferenciu Matematika v príprave učiteľov 1. stupňa ZŠ.

V roku 2000-2008 prebiehali matematické semináre

- na TU vo Zvolene Matematická analýza (M. Matejdes),
- Teória pravdepodobnosti (B. Riečan), Randomizované algoritmy (M. Renčová) a Matematická štatistika (G. Wimmer).

V rroku 2008-2014 prebiehal matematický seminár

- Teória fuzzy množín (V. Janiš, P. Kráľ), ktorý pokračoval v rokoch 2015-2019 pod názvom Teória agregačných funkcií.

V roku 2005 sa pobočka podieľala na zorganizovaní medzinárodnej konferencie PRASTAN.

Na KF FPV viedol S. Holec seminár Informačné a komunikačné technológie vo fyzike (2006-2007) a semináre z fyziky a didaktiky fyziky viedol B. Tomášik (2007-2013).

Od roku 2005 organizuje každoročne A. Danihelová na TU vo Zvolene medzinárodnú vedeckú konferenciu Materiál – Acoustics – Place.

V rokoch 2005-2012 sa konal na pracovisku Matematického ústavu SAV v Banskej Bystrici každý týždeň vedecký seminár z diskrétnej matematiky, ktorý viedol R. Nedela.

V rokoch 2008-2019 pobočka JSMF podporovala aj organizovanie konferencií a workshopov a seminárov, ako sú napr.:

- Medzinárodná konferencia o aplikovanej informatike (Katedra informatiky FPV UMB),
- Konferencia slovenských fyzikov (B. Tomášik z FPV UMB),
- Regionálna prehliadka mladých štatistikov a demografov (V. Úradníček, EF UMB),

- Seminár Teória fuzzy množín (P. Kráľ a V. Janiš, EF a FPV UMB),
- Seminár Fyzikálne vzdelávanie na vysokých školách (Ľ. Krišťák, TU Zvolen),
- Pravidelný seminár z aplikovanej akustiky (A. Danihelová, TU Zvolen),
- Pravidelný seminár z fyzikálnych faktorov prostredia (M. Němec, TU Zvolen).

V tomto období sa pobočka podieľala na organizovaní prednášok na TU vo Zvolene, ako boli:

- Polomerovo a priestorovo stabilné grafy (O. Vacek),
- Metódy multifunkcií v štúdiu zovšeobecnených spojitostí (A. Jankech),
- Úvod do multifunkcií (M. Matejdes),
- Sextant - GPS minulosti pod záštitou V. Bahýľa,

aj na organizovaní seminárov na FPV UMB v Banskej Bystrici pod názvami:

- Life technical provisions – requirements under Solvency II., ktorý sa konal 10. 11. 2016, prednášajúca bola Mgr. A. Harmanová z Poisťovne Generali, a.s.
- Aplikácie stochastických modelov úrokových mier pri oceňovaní starobných dôchodkov vyplácaných z druhého dôchodkového piliera na Slovensku sa konal 24. 11. 2016 a prednášajúcim bol Mgr. Gábor Szücs, PhD. z Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

2. Ďalšie aktivity pobočky

V druhej polovici 20. storočia prebiehala úspešná spolupráca JSMF s Krajským pedagogickým ústavom a s okresnými pedagogickými strediskami týkajúca sa skvalitňovania vyučovania matematiky a fyziky na ZŠ a SŠ. Boli zriadené Kluby učiteľov matematiky a fyziky (členov JSMF) vo Zvolene (predseda klubu A. Országhová), v B. Bystrici (A. Bystričanová), v Prievidzi (M. Franek) a vo Veľkom Krtíši (A. Mózer), ktoré reagovali v súlade s požiadavkami učiteľov na aktuálne otázky v pedagogickej oblasti, ako sú zavádzanie množinovej matematiky na ZŠ a SŠ, programové učenie, novinky v učebných osnovách matematiky a fyziky, využívanie počítačov vo vyučovacom procese, atď. Napríklad v Prievidzi zorganizoval Klub po roku 1980 kurz programovania pre učiteľov ZŠ, ktorý sa konal pravidelne a prednášali učitelia SŠ M. Bundzelová, M. Franek, E. Krajniaková, I. Mečiar a J. Murín.

Členovia JSMF prispeli aj k organizácii Študentskej matematickej konferencie, ktorej prvý ročník sa konal v r. 1977 na Gymnáziu Ľ. Štúra vo Zvolene. Cieľom konferencie bola popularizácia matematiky a umožnenie prezentácie zaujímavých výsledkov z rôznych oblastí matematiky a aplikácií matematiky študentom stredných škôl. Súťažiaci stredoškoláci vypracovali písomné práce, ktoré hodnotila viacčlenná komisia z učiteľov stredných a vysokých škôl. Konferencia úspešne prebiehala niekoľko desaťročí a vystúpili na nej stovky stredoškolských študentov z rôznych gymnázií.

V B. Bystrici sa 25. 4. – 28. 4. 1985 konalo celoštátne kolo MO kategórie A. Odbor školstva Stredoslovenského krajského národného výboru poveril pobočku za spoluorganizátora súťaže. Na úspešnej organizácii sa podieľali najmä J. Čaklóš (predseda organizačného výboru), P. Klenovčan (predseda KV MO) a A. Haviar (tajomník pobočky JSMF).

Začiatkom 90-tych rokov zorganizoval T. Klein matematické stretnutia na Šachtičkách pri Banskej Bystrici, ktorých sa zúčastňovali takmer všetci vysokoškolskí učitelia z B. Bystrice a zo Zvolena. V dopoludňajších hodinách sa konali prednášky o aktuálnych problémoch vyučovania matematiky na vysokých školách a popoludní bola voľná diskusia v skupinách.

V októbri 2001 sa v Štátnej vedeckej knižnici v B. Bystrici v spolupráci s mestom B. Bystrica konalo Priateľské stretnutie v rámci cyklu OSOBNOSTI s profesorom B. Riečanom, z Katedry matematiky FPV UMB.

Pri príležitosti 50. výročia zriadenia prvej vysokoškolskej učiteľskej inštitúcie v Banskej Bystrici sa konal na PF v Banskej Bystrici seminár venovaný jubileám troch významných slovenských matematikov (90. výročie narodenia Š. Schwarza, 85. výročie narodenia A. Kotziga, 75. výročie narodenia T. Neubrunna). Seminár sa konal 14. 9. 2004 a po úvodnom slove B. Riečana predniesli referáty A. Haviar, O. Grošek, F. Gliviak a Ľ. Holá. Účastníci ukončili seminár návštevou predstavenia v Štátnej opere v B. Bystrici.

3. Starostlivosť o mladé talenty v matematike a vo fyzike

3.1 Tábory mladých matematikov

Členovia KM PF V Banskej Bystrici (Ľ. Ďurišová, B. Sivák, Ľ Snoha, P. Konôpka, G. Monoszová), spolu s niektorými svojimi študentami matematiky (V. Knížetová, P. Baniar, P. Homola, D. Jantová), v rokoch 1977 – 1987 pravidelne každé letné prázdniny organizovali Tábory mladých matematikov pre vybraných talentovaných žiakov zo stredného Slovenska. Zabezpečovali odbornú činnosť a priamo v táboroch ju aj realizovali. Pri výbere žiakov pomáhali predsedovia okresných výborov Matematickej olympiády. Tábory trvali 2 až 3 týždne na rôznych miestach stredného Slovenska. Spolu v jedenástich táboroch strávilo časť svojich letných prázdnin so zábavnou matematikou a získalo aj veľa nových vedomostí 360 žiakov vekovej kategórie 11 – 13 rokov.

3.2 Matematické korešpondenčné semináre

Významnú úlohu pri vyhľadávaní a rozvíjaní matematických talentov zohrali matematické korešpondenčné semináre. Ich priekopníkom bol Ľ. Snoha, ktorý od šk. roku 1979/80 viedol Stredoslovenský korešpondenčný matematický seminár pre stredné školy. Pri organizovaní seminára a neskôr aj sústredení úspešných riešiteľov mu pomáhali kolegovia z našej a žilinskej pobočky, najmä B. Sivák. Od šk. roku 1983/84 prevzala kategóriu A seminára žilinská pobočka (M. Kaukič), kategória BC ostala v našej pobočke. V nej o rok neskôr Ľ. Snohu vo funkcii vedúceho vystriedal P. Hrnčiar a potom R. Nedela. Seminár existoval do šk. r. 1989-90, v posledných dvoch rokoch už len v kategórii A, spoločne organizovaný oboma stredoslovenskými pobočkami. Pritom od šk. r. 1986/87 minimálne do 1990/91 sa konal aj Matematický korešpondenčný seminár pre SOU pod vedením B. Siváka a okrem toho istý čas aj korešpondenčný seminár pre základné školy, KOVBOJ (Korešpondenčný veľký boj), opäť pod vedením B. Siváka.

Postupne sa počet korešpondenčných seminárov rozširoval. Napríklad v okrese Zvolen viedla korešpondenčný seminár pre ZŠ v 80-tych a 90-tych rokoch A. Országhová a ďalšie korešpondenčné semináre pre ZŠ prebiehali v okresoch Prievidza, Detva, Žiar nad Hronom a Banská Štiavnica.

3.3 Matematická olympiáda a Fyzikálna olympiáda

Veľkú zásluhu na vyhľadávaní matematických talentov má E. Oravcová, ktorá je od r. 1999 dodnes predsedníčkou Krajského výboru MO, resp. Krajskej komisie MO a členkou Slovenskej komisie MO. Pravidelne organizuje sústredenia úspešných riešiteľov MO a obetavo sa venuje svojim študentom, s ktorými sa zúčastňuje, popri MO, aj mnohých ďalších matematických súťaží, napríklad Náboj, Mathrace, Pangea a B-day.

Ale aj mnoho ďalších členov pobočky odviedlo obetavú prácu pri hľadaní talentov pre matematické a fyzikálne olympiády (MO a FO). Treba oceniť prácu mnohých učiteľov stredných a základných škôl, ktorí viedli krúžky MO a FO na školách. Po roku 2000 popri krúžkoch zameraných na matematiku a fyziku členovia JSMF organizujú aj krúžky informatické, technické a astronomické. Medzi najúspešnejšie školy v riešení MO a FO dlhoročne patrili Gymnázium V. B. Nedožerského v Prievidzi, Gymnázium B. S. Timravy v Lučenci, Gymnázium SNP v Banskej Bystrici, Gymnázium J. G. Tajovského v Banskej Bystrici a Gymnázium v Banskej Štiavnici. Osobitne by sme chceli v tomto smere oceniť prácu učiteľa M. Franeka z Gymnázia V. B. Nedožerského v Prievidzi, ktorého študenti dosahovali už v 60-tych rokoch úspechy aj na Medzinárodných matematických olympiádach. Taktiež je treba oceniť prácu organizátorov a prednášateľov pri každoročných sústredeniach úspešných riešiteľov MO a FO. Z organizátorov v prvých desaťročiach existencie MO a FO spomenieme aspoň P. Kršňáka, R. Baníka, P. Ferka, S. Ondrejku z PF v Banskej Bystrici, L. Therna, M. Marčoka z VŠLD Zvolen, ktorí pracovali vo funkciách predsedov Krajských výborov MO a FO. Vo funkciách predsedov Okresných výborov matematickej a fyzikálnej olympiády pracovali v Banskej Bystrici E. Ondrejková a L. Dobra, v Lučenci J. Kotman a J. Miadok, v Prievidzi M. Križanová a D. Dérerová, vo Veľkom Krtíši A. Šuhajová a A. Mózer, vo Zvolene Š. Krátky a O. Remeselník, v Žiari nad Hronom E. Kopecká a A. Koreň. Členovia KM a KF PF organizovali v spolupráci s OPS a Klubmi JSMF inštruktáže pre učiteľov ZŠ v rôznych okresoch stredoslovenského kraja. Z ochotných lektorov spomenieme aspoň G. Monoszovú, P. Klenovčana a D. Pelecha z PF v Banskej Bystrici. Mimoriadne cennou bola dlhoročná obetavá práca a vynaložené úsilie Ľ. Berackovej, ktorá 26 rokov vykonávala funkciu tajomníčky Krajského výboru MO a už od 60-tych rokov organizovala každoročne týždňové sústredenia úspešných riešiteľov MO v Lučatíne a v Ponickej Hute. Na každoročných sústredeniach úspešných riešiteľov MO a FO medzi najčastejších prednášateľov patrili P. Maličký, E. Oravcová, Ľ. Snoha, B. Sivák, G. Monoszová, P. Hrnčiar, P. Konôpka, M. Haviar, V. Špitalský, J. Janiš, Ľ. Gerová, R. Baník, S. Holec, J. Raganová a D. Pelech. Neoceniteľnú prácu odviedla aj J. Raganová, ktorá s Ľ. Snohom v rokoch 2006 - 2009 robila projekt Brána vedy otvorená na troch gymnáziách. Takisto nemôžeme nespomenúť aj L. Topoľského, ktorý bol dlho riaditeľom gymnázia JGT a urobil veľmi veľa v prospech matematických talentov.

4. Ostatné aktivity pobočky

Z dotácie MŠVVaŠ SR boli zakúpené hry zamerané na rozvoj logiky, priestorovej predstavivosti, riešenie problémov a počítanie. Darované boli piatim školám, ktoré ich využívajú vo výučbe a v rámci matematických krúžkov.

Okrem toho sme z dotácií MŠVVaŠ SR financovali účasť učiteľov na Letnej škole Pytagoras.

JSMF takisto finančne podporuje aj účasť učiteľov na Konferencii slovenských matematikov v Jasnej.

Z členských príspevkov a dotácií boli zakúpené dve sady trojdielnej série kníh od Josefa Poláka:

Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně.,

Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně., II. část

Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně., III. část.

Knihy boli darované do fondu Univerzitnej knižnice Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici.

Dňa 27. 2. 2018 sa konalo stretnutie členov JSMF pri SAV – pobočka Banská Bystrica. Na tomto stretnutí bol premietnutý film pod názvom Fermat's Last Theorem. Tento dokument zobrazuje prostredie matematikov, ich ambície, myslenie, rozprávanie a vzťahy na sklonku 20. storočia predovšetkým v USA a osobitne na jednom z popredných svetových matematických pracovísk v Princetone.

Na jar 2020 pobočka plánuje stretnutie členov JSMF pri SAV, pobočka Banská Bystrica u pána V. Bahýľa v jeho hvezdárni Júlia v Sebechove 41/82, vo Zvolenskej Slatine.

Poďakovanie

Chceme vyjadriť poďakovanie J. Raganovej, M. Hruškovi z Katedry fyziky FPV UMB, G. Monoszovej, Ľ. Snohovi z Katedry matematiky FPV UMB a množstvu nemenovaných kolegov, za ich ochotu a pomoc pri zhromažďovaní historických dokumentov, ktoré nám pomohli napísať tento príspevok.

Adresa autorov: Špirková Jana, Katedra kvantiotatívnych metód a informačných systémov, Ekonomická fakulta, Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Tajovského 10, 975 90 Banská Bystrica
e-mail: jana.spirkova@umb.sk
Krišťák Ľuboš, Katedra fyziky, elektrotechniky a aplikopvanej mechaniky, Drevárska fakulta TU vo Zvolene, T. G. Masaryka 2117/24, 960 01 Zvolen
e-mail: kristak@tuzvo.sk

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2020 (49)

JUBILEUM

Prof. Martin Kalina – ďalší mladý jubilant

prof. RNDr. Martin Kalina, CSc.

Čas letí neúprosne každému z nás, aj nášmu Martinovi. Už je to raz tak, 1. apríla oslávi prof. RNDr. Martin Kalina, CSc. významné životné jubileum – presnú kopu rôčkov. Pre tých, čo ho nepoznajú, uveďme pár faktov:

Po absolvovaní gymnázia Jura Hronca (Novohradská) v Bratislave študoval Martin v rokoch 1979 – 1984 na MFF UK v Bratislave, odbor pravdepodobnosť a matematická štatistika, kde ho ovplyvnili také osobnosti, ako sú prof. Neubrunn či prof. Riečan. v rámci tohto štúdia absolvoval aj jeden rok na MFF Karlovej univerzity, kde ho viedli osobnosti ako profesori Vopěnka, Winklbauer, či Dupač. Za „červený diplom“ dostal titul RNDr. v doktorandskom štúdiu (internej ašpirantúre) v odbore pravdepodobnosť a matematická štatistika pokračoval na MFF UK v Bratislave pod vedením prof. Riečana a prof. Zlatoša v rokoch 1985 – 1989. Hodnosť CSc. získal v júli 1990 úspešnou obhajobou kandidátskej dizertačnej práce „*Pravdepodobnosť v alternatívnej teórii množín*“.

Ako mladý nádejný učiteľ a vedecko-výskumný pracovník nastúpil v roku 1989 na Katedru matematiky a deskriptívnej geometrie Stavebnej fakulty STU v Bratislave, kde postupne ako odborný asistent, od roku 1995 ako docent v odbore pravdepodobnosť a matematická štatistika (obhajoba habilitačnej práce „*Základy počtu pravdepodobnosti v alternatívnej teórii množín*“ na MFF UK v Bratislave), a od roku 2017 ako profesor v odbore aplikovaná matematika (máj/jún 2016 inauguračná prednáška:„*Stavy a monotónne miery na rôznych algebraických štruktúrach*“ na SvF STU a na STU v Bratislave) pôsobí doteraz.

Martin nielenže patril k nádejným akademickým pracovníkom (viď napr. v roku 1990 získanie 2. ceny JSMF pre mladých vedeckých pracovníkov, spolu s prof. Nedelom), on tieto nádeje aj do bodky naplnil. Či už ako pedagóg, za čo bol o.i. ocenený ministrom školstva D.Čaplovičom v roku 2012 pri príležitosti 150-teho výročia založenia JSMF alebo ako vedec (každý si môže pozrieť jeho záznamy v databázach SCOPUS či WoS). Z oblastí jeho vedeckého záujmu spomeňme modelovanie neurčitosti, a to najmä teóriu miery v alternatívnej teórii množín, ktorá dominovala v prvej dekáde jeho vedeckého bádania, resp. jeho ďalšie oblasti vedeckého záujmu, ako sú miery a podmieňovanie na rôznych algebraických štruktúrach, fuzzy logika a fuzzy spojky, resp. monotónne miery a integrály vzhľadom k monotónnym mieram.

Martin sa významne podieľa na organizácii vedeckého života ako na Slovnesku, tak aj v medzinárodnom kontexte. Veľa energie a voľného času venoval Jednote slovenských matematikov a fyzikov, kde pôsobil ako tajomník pobočky Bratislava v rokoch 1996 – 2002, predseda pobočky Bratislava od roku 2002 doteraz, resp. predseda JSMF od roku 2008 doteraz. Aby toho nebolo málo, od roku 2017 doteraz je aj predsedom Slovenskej matematickej spoločnosti. Len ten, kto v niektorej zo spomínaných funkcií reálne pôsobil, vie precítiť, koľko času a energie tieto aktivity Martina stoja, a to pravidelne organizuje konferencie Prastan či Uncertainty Modelling, je v redakčných radách medzinárodných vedeckých časopisov, resp. členom programových výborov uznávaných medzinárodných vedeckých podujatí.

Martin je veľmi skromný človek, ktorý veľa nehovorí, ale o to viac koná. Má za sebou veľa mravenčej práce (najmä pre druhých), ktorú moc nevidieť, ale o to viac cítiť. Nerozpráva o tom, skôr sa s tým skrýva, a keď treba niekde priložiť ruku k práci, je vždy ochotný. Málokto ho pozná ako zanieteného turistu, najmä v jeho milovaných Tatrách, v okolí rodinnej chaty na Podbanskom, ale to už patrí k jeho vyznávaniu a realizácii kalokagatie.

Milý Martin,

pokračuj ešte dlho vo svojich doterajších krokoch, zdravíčko, šťastíčko
a pohody ti prajeme, a naše Živió nech ti príjemne doznieva!!!

Radko Mesiar a Oľga Stašová[1]

Adresa jubilanta: Katedra matematiky a DG, Stavebná fakulta STU,
Radlinského 11, 810 05 Bratislava
e-mail: martin.kalina@stuba.sk

[1] Katedra matematiky a DG, Stavebná fakulta STU, Radlinského 11, 810 05 Bratislava,
mail: mesiar@math.sk.

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
1/2020 ročník 49

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov s finančným prispením
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková, Ivo Kluvanec
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 550 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: jún 2020

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal “Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences”
OMFI 1/2020 Volume 49
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/)

OBSAH

Jozef D o b o š : O exponenciálnych rovniciach 1
Timea G á b o v á : Sebahodnotenie – nástroj formatívneho hodnotenia ako súčasť učenia sa 13
Erika F e c k o v á Š k r a b u ľ á k o v á : Erupcie pre matematikov 23
21. KONFERENCIA KOŠICKÝCH MATEMATIKOV v Herľanoch (Erika Fecková Škrabuľáková) 29
Michal K ř í ž e k : O paradoxech ve speciální teorii relativity 31
Ladislav E. R o t h : Čo nám o Venuši povedala Misia Magellan? 41
Z HISTÓRIE SPOLOČNOSTI MATEMATIKOV A FYZIKOV
Ľuboš K r i š ť á k, Jana Š p i r k o v á : JSMF pri SAV, pobočka Banská Bystrica Minulosť a súčasnosť 59
JUBILEUM
Prof. Martin Kalina – ďalší mladý jubilant (Radko Mesiar,a Oľga Stašová) 71

CONTENTS

Jozef Doboš: On Exponential Equations 1
Timea Gábová: Student Self-Assessment - Formative Assessment Tool 13
Erika Fecková Škrabuľáková: Eruptions for Mathematicians 23
21st Conference of Košice Mathematicians in Herľany (Erika Fecková Škrabuľáková).. 29
Michal Křížek: On Paradoxes in the Special Theory of Relativity 31
Ladislav E. Roth: What the Magellan Mission told us about Venus 41
FROM THE HISTORY OF THE SOCIETY OF MATHEMATICIANS AND PHYSICISTS
Ľuboš Krišťák, Jana Špirková: Past and Present of the Union of Slovak Mathematicians and Physicists at the Slovak Academy of Sciences, Banská Bystrica Branch...................... 59
JUBILEE
Jubilee of Professor Martin Kalina (Radko Mesiar and Oľga Stašová) 71