OBZORY

4/2022 (51)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2022 ročník 51

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 4/2022 Volume 51

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2022 (51)

VMI ZDELÁVANIE V MATEMATIKE A INFORMATIKE

O troch významoch znaku mínus

Jozef Doboš

Abstract [On three meanings of minus sign]: In this article, we want to point out the three meanings of the minus sign and the different ways of marking them in the literature.

Key words: negative numbers, opposite of a number, subtraction

Súhrn: V tomto článku chceme poukázať na tri významy znaku mínus a na rôzne spôsoby ich označovania v literatúre.

Kľúčové slová: záporné čísla, opačné číslo, odčítanie

MESC: 97A80, 97A30.

Úvod

Začneme citátom z príručky [9], str. 15:

„Znak nebo znaménko $-$ má v matematice tři různé významy.

a) Před číslem zapsaným číslicemi znamená znak $-$, že dané číslo je záporné, např. -7.
b) Před číslem zapsaným písmenem znamená znak $-$, že jde o číslo opačné, např. $-a$ je opačné k číslu a, ale $-\pi$ znamená záporné číslo.
c) Znak $-$ znamená početní výkon, tj. odčítání.“

Podobne, v učebnici [11] na str. 44 sa píše (voľný preklad):

„Znamienko mínus môže znamenať tri rôzne veci, v závislosti od kontextu.

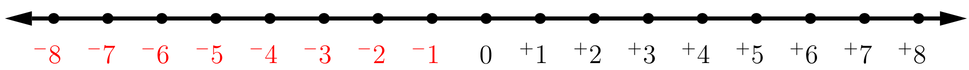
- Môže označovať záporné číslo. Pred kladným číslom, a iba tam, znamená záporné číslo. Príklad: ${}^{-}2$ môže znamenať mínus 2.
- Môže označovať opačné číslo. Číslo opačné k danému číslu je také číslo, ktoré keď pripočítate k danému číslu, dostanete nulu. Príklad: ${}^{-}2$ je opačné číslo k číslu 2, čo je v tomto prípade číslo mínus 2, pretože $2 + {}^{-}2 = 0$. Podobne ${}^{-}x$ je opačné číslo k číslu x, teda $x + {}^{-}x = 0$.
- Môže to znamenať odčítanie. Medzi dvoma výrazmi to znamená odčítať druhý výraz od prvého. Napríklad $x - 3$ znamená odčítať 3 od x.

V tejto knihe bude znamienko mínus, ktoré znamená záporný alebo opačný, menšie ako znamienko pre odčítanie. Pri písaní rukou to nie je potrebné. Niektoré kalkulačky však používajú rôzne klávesy pre tieto dva významy: $\boxed{-}$ pre odčítanie a $\boxed{(\text{-})}$ alebo $\boxed{+/-}$ pre záporné a opačné čísla.“

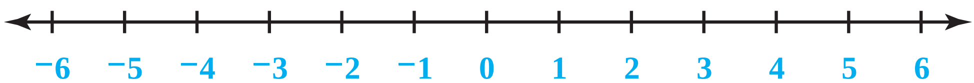
Na druhej strane, na Wikipédii[1] sa píše (voľný preklad):

„Niektorí učitelia základných škôl používajú pred číslami znamienka plus a mínus umiestnené vyššie, aby ukázali, že ide o kladné alebo záporné čísla. Napríklad odčítanie čísla -5 od čísla 3 sa zapíše v tvare $3 - {}^{-}5$, čo sa prevedie do tvaru $3 + 5 = 8$, alebo sa dokonca zapíše v tvare ${}^{+}3 - {}^{-}5$, čo sa prevedie do tvaru ${}^{+}3 + {}^{+}5$, čo je rovné ${}^{+}8$.“

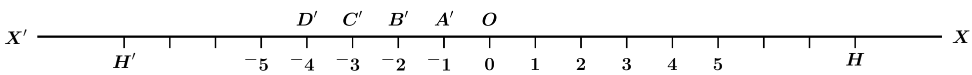
Tak je to napr. v učebnici [4] na strane 178 z roku 1985, odkiaľ sme prevzali nasledujúcu ukážku:



Podobne, v učebnici [6] na strane 144 z roku 2004 môžeme vidieť takúto ilustráciu:



Týmto spôsobom sú označované záporné čísla aj v učebnici [10] (str. 79) z roku 1900. Sken z tejto učebnice, ktorý sa nachádza v článku [7], znázorňuje číselnú os v nasledujúcom tvare:



Niektoré učebnice (napísané vo francúzštine) jasne rozlišujú medzi mínusom ako binárnym symbolom na odčítanie a mínusom ako unárnym symbolom na získanie opačného čísla (pozri [3]). Pritom opačné číslo k číslu x sa označuje $\text{opp}(x)$. V učebnici [2] na str. 21 je uvedené pravidlo, že odčítanie je pripočítanie opačného čísla, v tvare

$$a - b = a + \text{opp}(b).$$

V knihe [8] sa kladie dôraz na zavedenie záporných celých čísel ako nových čísel, ktoré budú koreňmi rovnice $a + x = c$ v prípade, keď $c < a$. Každé prirodzené číslo a

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Plus_and_minus_signs

potom bude mať „partnera“ $\hat{a}$ s vlastnosťou

$$a + \hat{a} = 0.$$

Takto sa množina prirodzených čísel rozširuje do radu

$$\dots\ \ \hat{4},\ \ \hat{3},\ \ \hat{2},\ \ \hat{1},\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ \ \dots$$

Autori článku [5] idú ešte ďalej. Uvádzajú nasledujúci výraz, v ktorom sa stretávajú všetky tri významy znamienka mínus:

$$-(-3) - 2.$$

Pritom dôsledne odlišujú tieto tri významy, ako môžeme vidieť na prepise uvedeného výrazu v tvare

$$^{-}\hat{3} - 2.$$

V tomto zápise $\hat{3}$ označuje záporné číslo mínus 3, zatiaľ čo ^{-}a označuje opačné číslo k číslu a. Teda $^{-}\hat{3} = 3$.

V materiáli [1] zverejnenom na internete sa autor podrobne venuje zdôvodneniu rovnosti

$$(40 + 12) - (20 + 5) = (40 - 20) + (12 - 5).$$

Binárne mínus $a - b$ pritom prepisuje do tvaru $a + {}^{-}b$. Tiež ukazuje, že platí

$$^{-}a = ({}^{-}1) \cdot a.$$

Využíva k tomu distributívny zákon:

$$a + ({}^{-}1) \cdot a = 1 \cdot a + ({}^{-}1) \cdot a = (1 + {}^{-}1) \cdot a = 0 \cdot a = 0.$$

Záver. Ukázali sme rôzne spôsoby, ako možno medzi sebou odlíšiť jednotlivé významy znamienka mínus. Použitie striešky, ako v zápise $\hat{3}$, na označenie záporných celých čísel nie je použiteľné pri viacciferných číslach. Okrem toho, svojím tvarom a umiestnením má ďaleko od zaužívaných označení pre znamienko mínus. Pritom strieška sa v matematike používa v úplne iných situáciách. Pre nás neobvykle pôsobí aj označenie opp(x) pre opačné číslo k číslu x. Tu by sme dali skôr prednosť spôsobu podľa učebnice [11], kde opačným číslom k číslu x je -x. Výraz $-(-3) - 2$ by potom prešiel do tvaru -$({}^{-}3) - 2$. Všetky tri znamienka mínus sú si podobné, avšak vieme ich medzi sebou ľahko odlíšiť.

Literatúra – References

[1] Baldwin, J.: What is a minus sign anyway? preprint (2001). `http://homepages.math.uic.edu/~jbaldwin/pub/assoc.ps`

[2] Barreau, M. et all: Mathématiques, cycle 4, Lycée Français Louis Pasteur, Bogota, Colombie, 2016.

[3] Borovik, A. V.: Shadows of the Truth: Metamathematics of Elementary Mathematics, American Mathematical Society, 2012.

[4] Eicholz, R. E. and all: Addison-Wesley Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, 1985.

[5] Harkin, J. B., Rising, G. R.: Some Psychological and Pedagogical Aspects of Mathematical Symbolism, Educational Studies in Mathematics, Vol. 5, No. 3 (1974), 255–260.

[6] Impact Mathematics: Algebra and More, Course 1, Student Edition, Glencoe/McGraw-Hill, 2004.

[7] Maz-Machado, A., Rico-Romero, L.: Negative numbers in the 18th and 19th centuries: phenomenology and representations, Electronic Journal of Research in Educational Psychology, No. 17, Vol. 7 (1) (2009), 537–554.

[8] McWeeny, R.: Number and Symbols: From Counting to Abstract Algebras, Learning Development Institute, 2007.

[9] Názvy a značky školské matematiky, Terminologická komise Jednoty čs. matematiků a fyziků, SPN, Praha, 1966.

[10] Octavio de Toledo, L.: Elementos de aritmética universal. Calculatoria. Madrid, España, Imprenta Fortanet, 1900.

[11] Wah, A., Picciotto, H.: Algebra: Themes, Concepts, Tools, Creative Publications, Mountain View, California, 1994.

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantu KEGA 012UPJŠ-4/2021 *Vývoj digitálnej knižnice interdisciplinárnych STEAM projektov a jej implementácia do informatického, matematického a prírodovedného vzdelávania na stredných školách*.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2022 (51)

Konstruktivistický přístup k žákům matematicky méně zdatným

Jana Hanušová

Abstract [A constructivist approach to less mathematically able pupils]: We want to show in the story of one pupil that it is possible to teach constructivist even to pupils who seem unsuccessful at first sight in the article. At the same time, the illustrative story shows a constructivist approach to the introduction of trigonometric functions.

Key words: constructivist approach, trigonometric functions

Souhrn: V článku chceme na příběhu jedné žákyně ukázat, že je možné konstruktivisticky vyučovat i žáky, kteří se na první pohled jeví jako neúspěšní. Ilustrační příběh zároveň přibližuje konstruktivistický přístup při zavádění goniometrických funkcí.

Klíčová slova: konstruktivistický přístup, goniometrické funkce

MESC: C70, D40, G60

1 Úvod

Již dvacet let se snažím ve svém vyučování zdůrazňovat prvky konstruktivistických přístupů – spíše než demonstrovat žákům hotové výsledky matematiky, vést je pomocí vhodných úloh k vlastním objevům. Domnívám se, že můj postup je žáky hodnocen pozitivně a domnívala jsem se, že i rodiče jsou s tímto přístupem spokojeni. Nedá se však říct, že stejně pozitivně vždy reagovali všichni mí kolegové učitelé matematiky.

Jednou jsem setkala s odmítavou reakcí rodičů na konstruktivistický přístup učitele. Nestalo se tak v mé třídě, ale ve třídě začínající kolegyně, kterou jsem učila jako žákyni gymnázia od primy až do maturity. Ředitel mne požádal, abych se jako vedoucí předmětové komise, vyjádřila k edukačnímu přístupu mladé učitelky. Dověděla jsem se, že rodiče žádají, aby matematika byla vyučována tradičně. Námitky některých rodičů byly velice ostré a zazněl i tvrdý požadavek na změnu vyučující. Ze zprostředkovaných informací jsem nedokázala usoudit, do jaké míry je nelibost rodičů způsobena konstruktivistickým stylem výuky a do jaké míry skutečností, že učitelka je začátečnice. Nevěděla jsem ani to, jak početná je skupina nespokojených rodičů. Nicméně dvě myšlenky, které zde zazněly, mne vedly k rozhodnutí napsat tento článek. První byla myšlenka rodičů, že netradiční přístup je snad dobrý pro nadané žáky, ale pro běžného žáka je nevhodný. Druhá byla myšlenka kolegů učitelů, kteří začínající kolegyni radili, aby nejprve učila tradičně a až když se trochu „ostřílí“, aby zkusila metody netradiční.

V posledních několika letech často i s učiteli matematiky ve škole i na různých setkáních diskutujeme na téma konstruktivistického přístupu k vyučování matematice. Učitelé svými zkušenostmi dokládají argumenty, které ukazují na přínos i úskalí tohoto přístupu. Velmi často se setkávám i s tím, že si učitelé nedovedou pod pojmem konstruktivistický přístup nic představit. Jako hlavní nedostatek uvádějí (podobně jako nespokojení rodiče), že metoda je možná dobrá pro rozvíjení nadaných žáků, ale průměrní a slabší žáci se tak nemohou nic naučit, protože nejsou schopni sami na nic přijít, z toho, co objeví spolužáci, mají pouze zmatek a pak nevědí, co si mají zapamatovat a co se mají naučit. Tento argument vyvolal pocit, že by bylo dobré ukázat na konkrétních příkladech, jak může probíhat poznání i u žáků, kteří v první fázi objevování nejsou úspěšní.

Jsem přesvědčena, že konstruktivistický přístup je vhodný nejen pro matematicky zdatné žáky, ale i pro průměrné a podprůměrné. Stejně jsem přesvědčena, že menší pedagogické zkušenosti začínajícího učitele se projeví stejnou měrou v tradičním přístupu podobně jako v přístupu konstruktivistickém. První z těchto myšlenek argumentačně podpoří příběh žákyně Anny, který zde předkládáme čtenáři.

Nejprve popíšeme matematickou problematiku, které se příběh týká i didaktické zázemí z něhož vychází.

2 Didaktická úskalí goniometrických funkcí

Po mnoho let jsem goniometrické funkce zaváděla v druhém ročníku čtyřleté střední školy a pravidelně jsem konstatovala, že znalosti žáků jsou zde velice formální. Pojem sinusu byl u mnoha žáků omezen na asociaci symbolu sin a zlomku $\frac{a}{c}$. Takovéto porozumění, redukované na znaky písmen, převládalo u většiny žáků u všech goniometrických funkcí.

Pokaždé jsem *„přeučovala“* žáky ve smyslu: od znaků a, b, c k pojmům protilehlá odvěsna, přilehlá odvěsna, přepona. I pak ale značný počet žáků měl ještě dlouho problémy s hlubším porozuměním goniometrických situací a značné potíže se objevily při rozšiřování definičního oboru goniometrických funkcí na celé $\mathbb{R}$.

Ve třídě, kde jsem učila matematiku celých sedm let – od primy (1991) až do maturity (1998), jsem základy goniometrie dávala žákům sama. Používali jsme učebnici od prof. Šedivého [1], která byla v té době jako jediná dostupná, a sbírku úloh od Buška [2]. Goniometrické funkce ostrého úhlu jsou zde zavedeny užitím podobnosti pravoúhlých trojúhelníků, červeně zvýrazněné vzorce, určené k zapamatování, jsou uvedeny pouze ve zkrácené podobě ve tvaru zlomků s písmeny a, b, c. Od počátku jsem se vyhýbala nebezpečí formalizmu zapříčiněného fixací písmen a, b, c na jednotlivé goniometrické funkce. Navíc jsem žákům ukazovala větší počet goniometrických situací, které jim umožnily budovat generický model pojmu sinus přes sérii izolovaných modelů [1]. Stejně samozřejmě i pro jiné goniometrické funkce.

Navzdory takovéto přípravě jsem pozorovala pro mne překvapivý jev. Žáci v tercii velice dobře zvládli goniometrické funkce úhlu v pravoúhlém trojúhelníku, i přesto pak v kvintě tito žáci měli potíže při pochopení goniometrických funkcí v celém $\mathbb{R}$.

Shrňme. Z uvedeného vyplývají (podle mých zkušeností) dvě hlavní didaktická úskalí porozumění goniometrických funkcí:

1. zjednodušení pojmu sinus na asociaci sin $\leftrightarrow \frac{a}{c}$, resp. sin $\leftrightarrow$ protilehlá/přepona, analogicky pro další funkce cos, tan, cot;
2. neschopnost pracovat s úhly přesahujícími 90°, následně potom 360°, neschopnost evidovat dynamismus funkce.

3 Hledání konstruktivistického přístupu ke goniometrickým funkcím

Byla jsem si vědoma toho, že tradiční vyučování je založeno již v samém začátku na deklarativní prezentaci goniometrických funkcí. Na tabuli se objeví pravoúhlý trojúhelník, v lepším případě víc podobných pravoúhlých trojúhelníků, a učitel řekne: *„Poměr těchto dvou stran označujeme jako sinus tohoto úhlu.“* Žáci nevědí, proč se takové označení má zavádět, k čemu je to dobré. Konstruktivistický přístup vyžaduje najít úlohu, která je formulována v jazyce žákům známém, ale jejíž řešení vede k odhalení některé goniometrické funkce jako pracovního nástroje. Na takovou úlohu jsem narazila při čtení skripta Hejný, Jirotková [4].

Úloha 3.1
Jsou dány body $O[0;0]$, $P[5;0]$ a dále body $A[2;1]$, $B[5;2]$, $C[7;4]$, $D[16;6]$, $E[22;11]$ a $F[101;50]$. Uspořádejte podle velikosti úhly $\alpha = \measuredangle AOP$, $\beta = \measuredangle BOP$, $\gamma = \measuredangle COP$, $\delta = \measuredangle DOP$, $\varepsilon = \measuredangle EOP$, $\varphi = \measuredangle FOP$.

---

[1] Pojmy izolovaný (dříve separovaný) a generický (dříve univerzální) model používáme ve smyslu Hejný a kol. [3] s. 23 nebo Hejný, Kuřina [5] s. 103–109. Stručně řečeno, obecné poznání přichází do našeho vědomí nejprve ve tvaru konkrétních zkušeností (izolovaných modelů) příštího poznání. Po jisté době se z původně izolovaných poznatků stane společenství poznatků a člověk uzří celé toto společenství jako jeden celek, jednu zákonitost. Tento poznatek nazveme generickým.

Poprvé jsem uvedenou úlohu využila v kvartě v květnu 2001. S výsledkem jsem byla spokojena, protože žáci zde sami objevili, že při porovnávání velikostí úhlů lze každý úhel vyjádřit pomocí poměru dvou délek. Přitom k před-pojmu (pre-konceptu) tangens dospěli nikoli přes trojúhelník, ale přes prostředí čtverečkovaného papíru. Ukázalo se, že tito žáci snadněji a rychleji zvládli učivo goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku na úrovni základní školy. Mnohé otázky, které jsme v průběhu řešení diskutovali, přesáhly rámec učiva ZŠ. Ve školním roce 2002 – 2003 jsem v této třídě mohla konstatovat, že rozšíření definičního oboru goniometrických funkcí na $\mathbb{R}$ většině žáků nečinilo potíže. Někteří sami přišli na vyjádření hodnot goniometrických funkcí pomocí souřadnic bodů na jednotkové kružnici, odkud pak při skupinové práci nacházeli jejich různé vlastnosti a bylo jasné, že v této oblasti nabyli značné zkušenosti. Projevilo se to u dalších úloh jako: sestrojování grafů goniometrických funkcí, řešení základních goniometrických rovnic, objevení goniometrických identit.

Z hlediska výuky jsem hodnotila uskutečněný experiment jako velice zdařilý, žel v průběhu této práce jsem byla tak vtažena do role učitele, že jsem zapomněla na roli experimentátora. Dokumentace žákovských projevů byla útržkovitá, cítila jsem potřebu experiment opakovat a vést o něm evidenci, která by umožňovala jeho podrobnější analýzu. Prezentace práce žákyně Anny při uvedeném experimentu je předmětem tohoto článku.

4 Experiment v kvartě 2002

4.1 Příprava výuky

Před druhým pokusem jsem podrobněji promyslila zkušenost z prvního pokusu pro využití dané úlohy ve výuce. Především jsem se snažila poznat příčiny úspěšnosti této úlohy. Uvědomila jsem si následující:

- Řešení úlohy začíná rýsováním, které žáka vtáhne do aktivní práce.
- Úloha má komplexní charakter a rozpadá se na sérii podúloh:
  - identifikace úhlů $\alpha, \beta, \ldots, \varphi$,
  - nalezení způsobu, jak uchopit vzdálené body E a F,
  - odhalení nástroje jímž lze šestici úhlů uspořádat podle velikosti.
- Dřívější žákovská řešení ukázala různé přístupy. Pomalejší žáci uchopili nejprve čtyři snadné úhly (α, β, γ, δ) a povzbuzeni tímto úspěchem hledali, jak postupy uvedených čtyř izolovaných modelů přenést na dva náročnější případy (ε, φ). Pokročilí žáci rychle přistupovali k náročnějším úlohám, které představovaly generický model řešení. Někteří dospěli k objevení pojmu tangens (jméno tohoto poznatku jsem jim pak řekla), vnímali funkční závislost velikosti zlomku na velikosti úhlu.

- Právě uvedenou volitelnost rychlosti postupu žáka při řešení úlohy jsem vnímala jako její hlavní přednost, protože přirozeným způsobem zaměstnala všechny žáky třídy, a navíc do jisté míry umožnila učiteli diagnostikovat žáky.

Popsaná zkušenost z předchozího experimentu mi posloužila jako scénář pro následující experiment: předložit třídě úlohu, sledovat různé řešitelské strategie, nevstupovat žákům do myšlenkových procesů, komunikovat, když o to žák sám projeví zájem a případně iniciovat diskuse mezi žáky.

4.2 Průběh výuky

24. 6. 2002 – 4. vyučovací hodina, přítomno 28 žáků – 14 dívek a 14 chlapců
Vstupní atmosféra: konec školního roku, klasifikace je již uzavřená, horko – otevřená okna i dveře, ostatní třídy již mají volný program. Vzhledem k tomu, že tři žáci třídy budou po prázdninách navštěvovat jinou střední školu a podle osnov by měli znát úvod do goniometrie, rozhodla jsem se i za těchto okolností experiment uskutečnit a požádat třídu o spolupráci a o pomoc jejich třem spolužákům. Byla jsem velice příjemně překvapena pozitivní reakcí třídy.

Žáci dostali úlohu 3.1 zadanou zápisem na tabuli, čtverečkované papíry na řešení a bílé papíry na zaznamenání postupu. Pracovat měli nejprve samostatně, pak měli svoje úvahy porovnat se sousedem, pak mohli podle potřeby pokračovat v práci ve čtveřicích, případně mohli konzultovat s kýmkoliv ze třídy. Na bílém papíru měli oddělit čarou úvahy, které doplnili po konzultaci s někým dalším.

Žáci pracovali s velkým zaujetím, nejprve samostatně, pak vzájemně diskutovali, vytvořili příjemnou pracovní atmosféru. S body A až E si uměli docela dobře poradit, problémy nastaly s bodem F, který je nedostupný a nutno jej uchopit pomocí *„teoretického“* nástroje. Dvě dívky porovnávaly prvočíselné rozklady ve zlomku tvořeném souřadnicemi bodů. Další dívka tento bod řešila pomocí nastaveného papíru. Proto jsem zadání rozšířila o další bod $G[1050; 548]$, který nelze řešit nastavováním papíru. Mimochodem, tento bod pomohl i ostatním žákům prověřit domněnky k nimž se dopracovali.

O dva dny později jsme v bádání pokračovali.

26. 6. 2002 – 4. vyučovací hodina přítomno 30 žáků – 15 dívek a 15 chlapců
Atmosféra: poslední hodina matematiky v tomto školním roce (po filmovém představení první dvě vyučovací hodiny) Pokračovali jsme v práci. Já jsem se věnovala zejména třem odcházejícím žákům, ale i další žáci se snažili problém dořešit. Zároveň jsem požádala žáky, aby na modré papíry, které jsem jim rozdala, popsali svůj řešitelský postup (na bílých papírech z minulé hodiny byly většinou uvedeny pouze výsledky bádání a nikoliv postup).

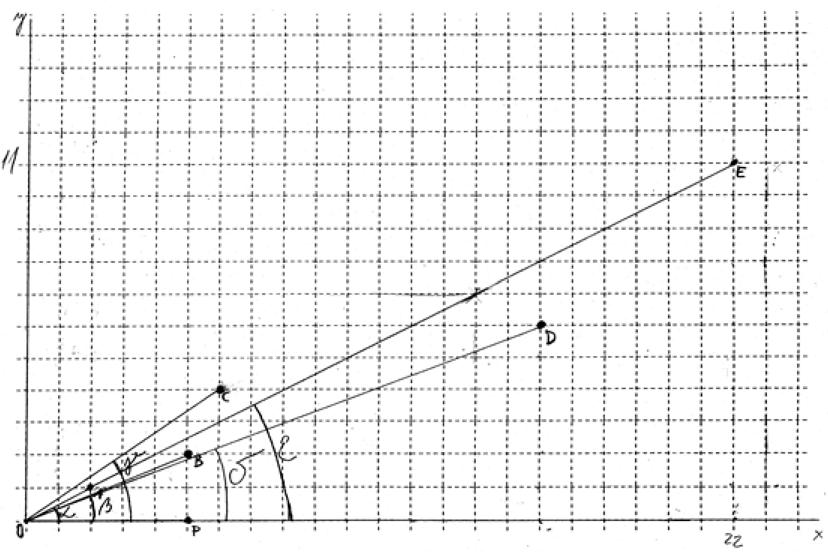
4.3 Konstatování

Na konci druhé hodiny bylo možné žáky roztřídit do tří kategorií, podle toho, jak blízko se dostali k objevu závislosti velikosti úhlu na poměru souřadnic příslušného bodu. Do první skupiny patří ti, kteří samostatně závislost objevili. Do druhé skupiny patří ti, kteří k poznání došli v důsledku diskuse s jinými žáky. Do třetí skupiny patří ti žáci, kterým se zatím nepodařilo dojít k danému poznatku.

Žákyně Anna, které je věnován tento článek, je představitelkou třetí skupiny. Anna by se zřejmě některým učitelům jevila jako slabší v matematice, alespoň z pohledu výsledků zaznamenaných v průběhu první hodiny bádání a v porovnání s výsledky ostatních žáků při této hodině.

Anna je zajímavá nejen svým přístupem k matematice ale i po stránce osobnostní. Je velice hloubavá, ráda přichází *„věcem na kloub“*, podávané informace nepřijímá konzumně, snaží se vše dávat do souvislostí, často přichází s otázkami, které směřují do hloubky problému. Již od primy se zajímá o kosmologii, čte odbornou literaturu o vzniku vesmíru, v oblasti techniky má přehled především o letadlech a vojenských vozidlech. Nerada přejímá hotové poznatky, chce vše vyřešit sama. Často se zadaným problémem zabývá dál doma a o přestávce přichází s dalšími nápady. Pokud se jí však nepodaří vypočítat nějakou úlohu, má sklon se podceňovat.

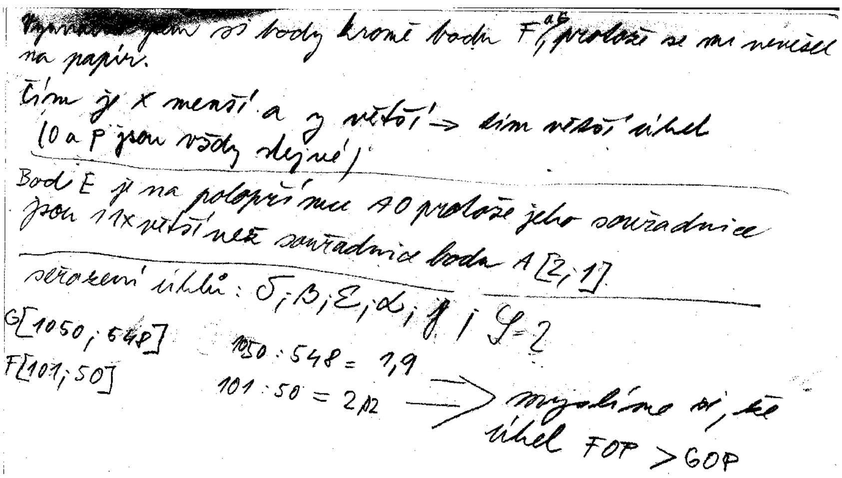
4.4 Analýza žákovského řešení



Obrázek 1. Text na čtverečkovaném papíře.

Poznámka. Některé informace při kopírování originálu do tiskové podoby zanikají. Jsou podrobně rozvedeny v evidencích.

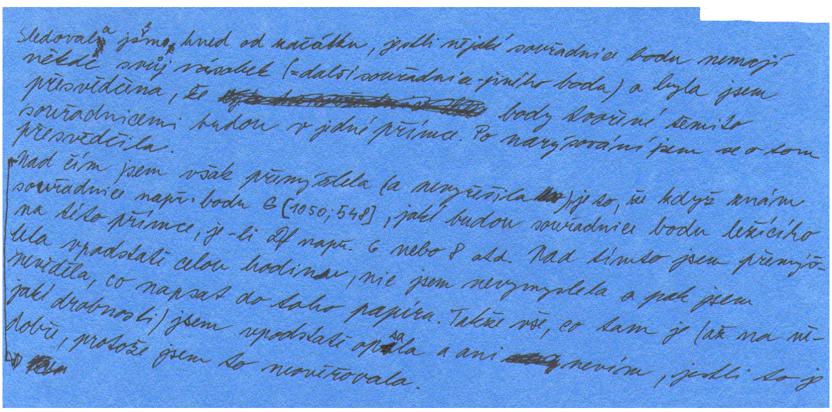
Vysvětlení postupu na bílém papíře:



Vyznačila jsem si body kromě bodu F, protože se mi nevešel na papír.
Čím je x menší a y větší → tím větší úhel
(0 a P jsou vždy stejné)
Bod E je na polopřímce AO protože jeho souřadnice jsou 11x větší než souřadnice bodu A [2;1]
seřazení úhlů: δ; β; ε; α; γ; φ-2
G[1050;548]   1050 : 548 = 1,9
F[101;50]   101 : 50 = 2,02 ⟹ myslíme si, že úhel FOP > GOP

Obrázek 2. Text na bílém papíře.

Vysvětlení postupu na modrém papíře:



Sledovala jsem hned od začátku, jestli nějaké souřadnice bodu nemají někde svůj násobek (=další souřadnice jiného bodu) a byla jsem přesvědčena, že body tvořené těmito souřadnicemi budou v jedné přímce. Po narýsování jsem se o tom přesvědčila.
Nad čím jsem však přemýšlela (a nevyřešila) je to, že když znám souřadnice např. bodu G[1050;548], jaké budou souřadnice bodu ležícího na této přímce, je-li X např. 6 nebo 8 atd. Nad tímto jsem přemýšlela celou hodinu, ale jsem nevymyslela a proto jsem nevěděla, co napsat do tohoto papíru. Takže vše, co tam je (až na nějaké drobnosti) jsem vypočítala a ani nevím, jestli to je dobře, protože jsem to nevyzkoušela.

Obrázek 3. Text na modrém papíře.

Přepis textu: *Sledovala jsem hned od začátku, jestli nějaké souřadnice bodu nemají někde svůj násobek (= další souřadnice jiného bodu) a byla jsem přesvědčena, že body tvořené těmito souřadnicemi budou v jedné přímce. Po narýsování jsem se o tom přesvědčila. Nad čím jsem však přemýšlela (a nevyřešila) je to, že když znám souřadnice* *např. bodu G[1050;548], jaké budou souřadnice bodu ležícího na této přímce, je-li* D_f *např. 6 nebo 8 atd. Nad tímto jsem přemýšlela v podstatě celou hodinu, nic jsem nevymyslela a pak jsem nevěděla, co napsat do toho papíru. Takže vše, co tam je (až na nějaké drobnosti) jsem v podstatě opsala a ani nevím, jestli to je dobře, protože jsem to neověřovala.*

4.5 Evidence

Čtverečkovaný papír:

- E1 Na kopii práce na čtverečkovaném papíře není znatelné gumování. Na originále lze vysledovat stopy po gumování zápisu zadání – výčet bodů zadaných souřadnicemi zapsaný do prvních dvou řádků, papír byl původně na výšku. Dále jsou znatelné stopy po vygumování soustavy souřadnic (osa x byla původně na předposlední mřížové přímce dole, osa y na druhé mřížové přímce zleva, pouze ve spodní části papíru). Opravený obrázek je narýsován na papíru na šířku.
- E2 Počátek soustavy souřadnic je posunut do levého dolního rohu, osa x vodorovná, osa y svislá.
- E3 Obrázek je narýsován tužkou, osy x, y – perem, část osy x (úsečka OP) je narýsována tužkou.
- E4 Body O, P, A, B, C, D, E jsou vyznačeny výraznými plnými kolečky, bod F chybí.
- E5 Úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ jdou za sebou v abecedním pořadí, řecká písmena systematicky zapisována za čáru obloučku. Řecká písmena jsou větší než písmena označující body.
- E6 Koncová ramena úhlů končí v bodech B, C, D, E – jsou narýsována jako úsečky. Pouze rameno úhlu α je prodloužené, (při kontrole pomocí pravítka zjištěno napojení v bodě A) končí v bodě E.
- E7 OAE je lomená čára.
- E8 Pouze u bodu E jsou vyznačeny souřadnice – úseky na osách označeny čísly 22, 11.
- E9 Na úsečce OE je stopa po gumování dalšího neoznačeného bodu. Přes gumování je znatelné obnovení úsečky OE. Ze stop je patrné označení souřadnic tohoto bodu $[14; 7]$.
- E10 Bod C má chybnou x-ovou souřadnici proti zadání. Na obrázku $[6; 4]$, v zadání $[7; 4]$.

Bílý papír:

- E11 Na bílém papíru první věta nad čarou – popis činnosti – narýsování podle zadání, vysvětlení, proč chybí body F a G (G doplněn dodatečně). Další věta vypovídá o vztahu x, y a velikosti úhlu.

E12 Pod první čarou je napsána věta zdůvodňující, proč bod E leží na polopřímce AO.

E13 Pod druhou čarou je neúplná odpověď na zadanou otázku a výpočty týkající se bodů F a G s porovnáním velikosti úhlů FOP a GOP.

Modrý papír:

E14 Na modrém papíru na začátku textu je přepis: *„Sledovaly jsme"* – opraveno na *„Sledovala jsem"*.

E15 Ve třetím řádku je přeškrtaný nápis: *„tyto dvě souřadnice bu"*

E16 Celý druhý odstavec na modrém papíru vysvětluje, o čem Anna přemýšlela a co pak zapsala a proč. V odstavci je třikrát škrtáno, na levé straně je přes celý odstavec šipka, která směřuje ke škrtu pod nápisem. V textu použit symbol D_f.

4.6 Komentáře k evidencím

Čtverečkovaný papír:

K1 Anna nejprve přečetla zadání úlohy, pečlivě ho přepsala na čtverečkovaný papír (situovaný na výšku), zakreslila osy. To vše je vygumováno, ale dobře znatelné. Ve zvolené soustavě souřadnic není žádná stopa po zakreslených bodech. Anna si zřejmě uvědomila, že se jí v tomto uspořádání body do obrázku nevejdou. Vzhledem k tomu, že nejsou vyznačeny ani body O, P, A, C, D, které by se tam vešly, dá se předpokládat, že geometrickou situaci Anna vnímala jako koncept. Kdyby totiž Anna vnímala situaci procesuálně, vyznačila by všechny tyto body a až u bodu E, který by vyznačit nebylo možné, by začala uvažovat o změně polohy papíru. Ona se však rozhodla změnit polohu papíru a umístění soustavy souřadnic bez rýsování, jen po přečtení souřadnic bodů.

K2 Na otočeném papíru cíleně umístila souřadnice do levého dolního rohu, pro zakreslení bodů nechala co největší prostor. Zadání již neopisovala. Zřejmě začala přemýšlet o strategii a nepotřebovala jinou náhradní činnost.

K3 Při podrobném zkoumání (papír proti světlu) je vidět, že celé osy jsou narýsovány keramickým perem, úsečka OP je přes tenkou čáru perem vytažena tužkou. To svědčí o tom, že osy souřadnic Anna narýsovala jako první a byla si jistá v jejich umístění. Zvýraznění jinou barvou odděluje i významově osy od ostatních čar na obrázku (slouží k orientaci a nejsou součástí úhlů). Úsečka OP je tužkou, protože dominantní funkce této úsečky je vztah ke všem úhlům. V Anniných separovaných modelech úhlů představuje jejich společné počáteční rameno.

K4 Výrazně velkými kolečky jsou vyznačeny body, kterými si Anna byla jistá. Nepřítomnost bodu F nejprve zdůvodnila tím, že se na papír nevešel, teprve z dodatečného vysvětlení vyplývá (viz K16), že v tuto chvíli probíhaly Anně hlavou neevidované myšlenkové pochody, že hledala, jak změnit souřadnice bodu, aby se dostal do viditelné oblasti, jak ho posunout po přímce a přiblížit ho tak k počátku. Z geometrie tak přešla do oblasti aritmetiky.

K5 Ze způsobu zápisu se dá usoudit, že úhly jsou hlavním objektem zkoumání. Zatím však jsou pouze pečlivě zakresleny, geometrické porovnání velikosti úhlů zřejmě Anna zatím nevidí. Domnívám se, že je v tuto chvíli příliš zaujata řešením aritmetického problému, který je zaměřen pouze na zkoumání souřadnic bodů na jedné přímce. Z tohoto pohledu jsou pro Annu zajímavé především body A a E.

K6 Pro zviditelnění zkoumaných úhlů použila Anna separované modely, ve kterých koncová i počáteční ramena jsou znázorněna úsečkami. V tomto modelu se ztrácí neohraničenost úhlu a tím i propojení na neviditelnou oblast.

K7 Zalomení čáry OAE svědčí o tom, že byla nejprve narýsována úsečka OA a potom úsečka AE. Čára OAE dokumentuje Annino přesvědčení, že body A, E leží na stejné přímce – vyjádřeno jejím jazykem (myšleno na téže polopřímce OA). Toto přesvědčení vyplývá z úvahy popsané na modrém papíře: *„... jestli nějaké souřadnice bodu nemají někde svůj násobek a byla jsem přesvědčena, že body tvořené těmito souřadnicemi budou v jedné přímce.“*

K8 Označení úseků na osách pouze u bodu E může mít dvojí důvod. Jedná se o bod nejdál od počátku a je tedy větší pravděpodobnost omylu, napočítání čtverečků a označení číslem dává jistotu správného umístění. Může to však také souviset se zaujatostí na řešení problému s násobky souřadnic. Bod E je v tomto směru nápadný.

K9 Zvolení dalšího bodu na téže úsečce a vyznačení jeho souřadnic, které jsou násobky souřadnic bodu A, spíš potvrzují druhou možnost. Vygumování tohoto bodu a znovu propojení úsečky svědčí o nejistotě. Doplněný bod domněnku Anny potvrdil, ale nebyl v zadání, možná proto jej vygumovala.

K10 Chyba v zakreslení bodu se vyskytla pouze u bodu C, pravděpodobně se jedná o přehlédnutí. Poloha bodu C vzhledem k Annině myšlence není rozhodující.

Bílý papír:

K11 V první větě se Anna snaží popsat činnost při řešení úlohy. Tato věta skutečně odpovídá tomu, co pozorujeme na čtverečkovaném papíru. Je napsána osobnostně a činnostně, což potvrzuje domněnku, že Anna teprve hledá řešení. Druhá věta: *„Čím je x menší a y větší $\rightarrow$ tím větší úhel (O a P jsou vždy stejné)“* nemá nikde žádnou další souvislost. Je napsána nad první čarou, kde měly být zapsány vlastní úvahy žáka. Po prvním přečtení (bez vysvětlení na modrém papíru,) jsem se domnívala, že v hlavě Anny proběhly úvahy, které nebyly zaznamenány, nebo byly napsány na nějaký pomocný papír. Při porovnání s prací sousedky a po přiznání na modrém papíru se ukázalo, že tuto druhou větu Anna opsala bez porozumění od sousedky. První čára tedy neodděluje vlastní úvahy od společných.

K12 Věta pod druhou čárou: *„Bod E je na polopřímce AO protože jeho souřadnice jsou* $11\times$ *větší než souřadnice bodu A[2;1].“*, je zajímavá z několika důvodů. Podle umístění pod čáru by měla tato myšlenka přijít až po konzultaci se sousedkou. Evidence E7 – E9 však potvrzují, že Anna hledala důkaz pro tuto myšlenku ve svém obrázku. V práci sousedky se tato věta vyskytla také na stejném místě – to znamená po konzultaci s Annou. Dříve se však v práci sousedky žádná souvislost s touto úvahou neobjevila. Vysvětlení přináší upřesnění z následující hodiny na modrém papíru. Z něho je vidět, že to bylo první, nad čím Anna přemýšlela, neuměla však myšlenku zformulovat. Po konzultaci se sousedkou, které své úvahy vysvětlovala, formulaci zřejmě společně vytvořily. Ve větě je poprvé použita polopřímka, v obrázku se neobjevila žádná. Anna polopřímku označila chybně AO, sousedka ji má označenou správně OA.

K13 Celý text pod druhou čarou je pouze opsán při konzultaci s dalšími skupinami. V seřazení úhlů podle velikosti úhel ε je zařazen jako menší než úhel α. Anna věnovala spoustu energie na objev, že body A a E leží na téže polopřímce, přesto si neuvědomila, že se úhly α a ε rovnají, nebo přinejmenším nevnímala, co píše. Je pravděpodobné, že otázka o koincidenci bodů O, A, E byla kontextem, v němž dominovala aritmetická úvaha, zatímco při porovnávání úhlů α, ε viděla dívka jen kontext geometrický.

Modrý papír:

K14 Přepis z množného čísla na jednotné dokumentuje, že se jedná opravdu o vlastní úvahy Anny. Škrtání svědčí o tom, že Anna výpověď právě tvoří, neměla ji předem promyšlenou ani připravenou. Výpověď naznačuje i časový průběh řešení. První myšlenka směřovala ke zkoumání souřadnic bodů ležících na přímce. Pak následovalo rýsování, které myšlenku potvrdilo. Věta: *„Po narýsování jsem se o tom přesvědčila“*, poukazuje nejen na časovou posloupnost řešení, ale i na Anninu schopnost kritického myšlení.

K15 V průběhu psaní se snaží o přesnou formulaci. Minulou hodinu měla Anna největší potíže právě s formulováním myšlenky.

K16 Celý tento odstavec vyznívá dost skepticky – slova: *„... nevyřešila ..., nic jsem nevymyslela a pak jsem nevěděla, co napsat do toho papíru“*. Anna se přiznává, že vše až na nějaké drobnosti opsala. Tyto *„drobnosti“* však představují správnou a potvrzenou myšlenku: *„... ani nevím, jestli to je dobře, protože jsem to neověřovala.“* Opět potvrzuje Anninu schopnost kritického myšlení.

Anna se hned od začátku zaměřila na souřadnice bodů na přímce – uvědomila si, že to budou násobky. Dál si uvědomuje, že přes tuto závislost by mělo být možné dostat bod po přímce do viditelné oblasti. Domnívám se, že Anna zde hledala souvislost s grafem přímé úměrnosti. Tomu by odpovídala i věta: *„... když znám souřadnice např. bodu G[1050;548], jaké budou souřadnice bodu ležícího na této přímce, je-li D_f např. 6 nebo 8 atd.“* Chybné použití symbolu pro definiční obor opět potvrzuje potíže s přesným vyjadřováním, zřejmě měla na mysli body s x-ovou souřadnicí 6 nebo 8, které by mohla do obrázku umístit.

4.7 Další komentář

Anna ve své výpovědi vyjádřila pocit, že nic nevyřešila, že nic neobjevila. Podobně zareagovala i jedna kolegyně po přečtení Anniny práce slovy *„To je nějaká slabá žákyně! Co to píše za nesmysly?“* Domnívám se, že podrobná analýza však ukázala něco jiného. Anna má problémy s formulací myšlenek, cestu k řešení vidí v souvislosti s funkcí přímá úměrnost. Ve vědomí už je na stopě správného objevu vlastní cestou.

Po této analýze jsem měla pocit, že by bylo potřeba vytvořit další situaci cílenou přímo pro Annu tak, aby sama poznala, že i její cesta vede k cíli. Připravila jsem níže uvedenou sérii návodných úloh a doufala jsem, že pomocí této série a s časovým odstupem, se Anně podaří řešení původní úlohy dokončit. Návodné úlohy vycházejí z vlastností přímé úměrnosti, které jsou pro Annu známé.

V září po prázdninách jsem Anně dala zadání devíti úloh napsané na počítači. Při zadání úloh dostala Anna pokyn: *„Vrať se k řešení úlohy o úhlech. Přečti si záznamy z předchozích hodin, pokus se úlohu dořešit. Zjisti, jestli se v zápisech nevyskytují nějaké chyby nebo nepřesnosti. Pokud ano, oprav je. Jestliže se ti nedaří úlohu dořešit, řeš postupně následující návodné úlohy. Ty nemusíš řešit všechny, v kterémkoliv okamžiku se můžeš vrátit k původní úloze.“*

Návodné úlohy:

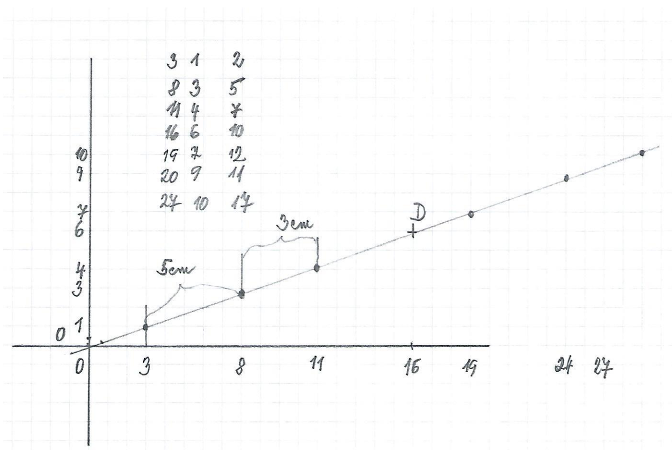
1. Ve větě: *„Bod E je na polopřímce AO protože jeho souřadnice jsou* $11\times$ *větší než souřadnice bodu* $A[2;1]$*.“* najdi nepřesnosti a oprav je.
2. Je úsečka OE částí grafu nějaké funkce? Které? Najdi rovnici této funkce.
3. Ověř, zda body $K[8;4]$, $L[8;5]$, $M[6;9]$, $N[28;15]$, $G[1050;548]$ leží na grafu této funkce.
4. Najdi souřadnice dalšího dosud neuvedeného bodu, který bude ležet na grafu této funkce.
5. Body $Q[6;\dots]$, $R[24;\dots]$ a $S[100;\dots]$ leží na polopřímce OA. Nalezni chybějící souřadnice. Správnost řešení ověř rýsováním.
6. Úsečka OB je částí grafu funkce f, úsečka OD částí grafu funkce g. Najdi rovnice funkcí f a g.

7. Podle svého obrázku srovnej úhly α, β, γ, δ, ε podle velikosti. Porovnej tuto odpověď se zápisem na bílém papíru.
8. Najdi souvislost rovnic funkcí f a g s velikostmi úhlů β a ε.
9. Ověř správnost posledního sdělení uvedeného na bílém papíru.

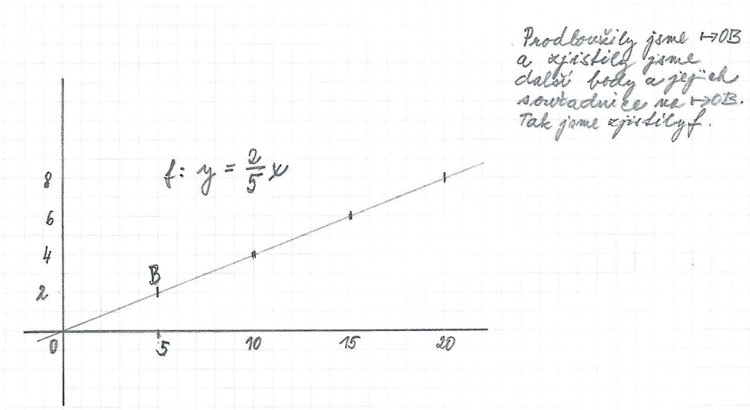
První úloha pomáhá upřesnit formulace. Úlohy druhá až čtvrtá připomínají funkci přímá úměrnost. Pátá úloha pomáhá najít souvislost grafu přímé úměrnosti a polopřímky OA. Šestá až osmá úloha vede ke hledání vztahu koeficientu přímé úměrnosti a velikosti úhlu, což je zároveň propedeutika zavedení funkce tangens i směrnice přímky.

4.8 Analýza řešení návodných úloh

Tyto úlohy řešila Anna ve dvojici se sousedkou doma. Výsledky svého bádání odevzdaly na třech papírech. Na jednom z nich byly správné výsledky (bez postupu řešení) prvních pěti úloh, ze šesté úlohy jen zjednodušené zadání. Na dvou čtverečkovaných papírech bylo řešení šesté úlohy, které se jeví jako klíčové z hlediska procesu objevování. Řešení úloh 7 až 9 dívky uvedly pouze ústně, zdálo se jim vše jasné, není to už třeba zapisovat.



Obrázek 4. Řešení 6. úlohy.



Obrázek 5. Řešení 6. úlohy.

Evidence (pouze zjednodušené, stručné):

E1 Každá z funkcí f a g je narýsována do samostatné soustavy souřadnic na čtverečkovaném papíře.

E2 Na přímce OD je bod D vyznačen svislou čárkou, další body (s vyznačenými souřadnicemi) plnými kolečky.

E3 Na osách souřadnic funkce g jsou vyznačené číselné hodnoty souřadnic některých bodů.

E4 Nad grafem funkce g je ve třech sloupcích tabulka – první dva sloupce tvoří vyznačené x-ové a y-ové souřadnice označené na osách (s jednou chybou), třetí sloupec jsou hodnoty rozdílu těchto souřadnic.

E5 Nad přímkou OD jsou první tři body po dvou spojeny svorkami s označením 5 cm a 3 cm.

E6 Graf funkce f je narýsován na dalším obrázku. Není v něm gumováno, ani tam nejsou žádné zbytečné body navíc, vše je provedeno čistě a ekonomicky.

E7 V pravém horním rohu je komentář: Prodloužily jsme $\mapsto OB$ a zjistily jsme další body a jejich souřadnice na $\mapsto OB$. Tak jsme zjistily f.

E9 Nad grafem je napsána rovnice funkce f.

Komentáře:

K1 Grafy funkcí jsou oddělené, dívky zkoumají každou funkci zvlášť, zatím nemají potřebu je porovnávat.

K2 Sestrojení grafu funkce g zřejmě začíná konstrukcí bodu D a sestrojením přímky OD. Postup sestrojování grafu potvrzuje souvislost s grafem přímé úměrnosti – přímka procházející body O a D.

K3 Na přímce jsou kolečky vyznačené body, o kterých se zřejmě dívky domnívaly, že leží na grafu. Tyto body podrobněji zkoumaly.

K4 Souřadnice těchto bodů vyznačily na osách a pak je vypsaly do tabulky. Hledaly souvislosti mezi uvedenými čísly. Nejprve se zaměřily na rozdíly, ale tam žádnou pravidelnost nenašly. Jeden chybný údaj pohled ještě víc komplikoval.

K5 Na čtverečkovaném papíře je zaujala myšlenka *„schodů"*. Dva schody naznačily svorkami. Z obrázku není patrné, že se jedná o schody, ale dívky to upřesnily při ústním vysvětlení. Nejprve se zaměřily na porovnávání šířky a výšky schodů u dvou sousedních mřížových bodů ležících na přímce. Tyto dva vyznačené body ale vedly do slepé uličky, protože ve skutečnosti druhý z nich na přímce neleží, jedná se o nepřesné rýsování.

K6 Graf funkce f již dívky rýsovaly cíleně s myšlenkou zkoumat mřížové body ležící na přímce z pohledu schodů. Graf je proveden velmi přesně a s jistotou.

K7 Legenda v pravém horním rohu papíru popisuje činnost, jak našly vhodné body. Při ústním vysvětlení pak ukázaly, že si všimly, že pro všechny sousední mřížové body na přímce je společné, že mají stejnou základnu (rozdíl x-ových souřadnic) a stejnou výšku schodu (rozdíl y-ových souřadnic). Že sklon přímky se dá vyjádřit zlomkem, kde v čitateli je výška schodu a ve jmenovateli je šířka schodu. Tento objev se jeví jako klíčový.

K8 Nad grafem je zapsána rovnice funkce f, což bylo poslední, co se dívkám jevilo jako důležité pro zápis. Vše ostatní pak už bylo zbytečné psát, protože už to bylo jasné. Při rozhovoru pak potvrdily, že o problému spolu diskutovaly, že řešení hledaly a nacházely společně. Rovnici funkce si ověřily dosazením souřadnic vyznačených bodů. Konstatovaly jako jasné, že koeficient v rovnici přímé úměrnosti je roven nalezenému zlomku a že vlastně určuje sklon přímky a tím je jasné, že se tak snadno dají srovnat požadované úhly podle velikosti. Dívky už vůbec nepotřebovaly úlohu dokončit zápisem na papír, vše se jim jevilo evidentní. Při vysvětlování se střídaly v líčení objevu, skákaly si do řeči, vyzařovala z nich velká radost.

Se svým bádáním dívky seznámily celou třídu. Společně jsme porovnávali různé cesty řešení, které vedly ke stejnému výsledku. Anna si prožila pocit úspěšného objevu. Pro třídu byl objev dívek také užitečný, v následné diskusi jsme společně zhodnotili souvislost koeficientu přímé úměrnosti se sklonem přímky a funkcí tangens směrového úhlu.

5 Poznámka na závěr

Jak hluboce se uvedený objev zakořenil ve vědomí Anny potvrzuje i další situace. Asi za měsíc jsme ve fyzice probírali pojem okamžitá rychlost. Již při hodinách žáci o tomto pojmu živě diskutovali, objevily se úvahy související s chováním zlomku, jestliže se čitatel i jmenovatel hodně zmenšují. To Annu zaujalo a porovnávala náš zjednodušený způsob zavedení rychlosti se zavedením ve vysokoškolské učebnici. O přestávce za mnou přišla s dotazem: *„Tady mají, že* $v = \frac{dv}{dt}$ *a my jsme zavedli* $v = \frac{\triangle v}{\triangle t}$. *Co tam znamená to malé* d*?"* Nad vztahem byl v učebnici uveden graf závislosti dráhy na čase se znázorněním významu okamžité rychlosti, byla tam zakreslena i tečna ke grafu. Docela snadno Anna pochopila souvislost a zjednodušení našeho zavedení okamžité rychlosti s přesnějším vyjádřením pomocí *„malého* d*"* a nezdálo se jí ani divné, že sklon tečny souvisí se zvětšováním nebo zmenšováním rychlosti a se sklonem přímky, jak to objevily dívky při matematice. Anna s překvapením přijala i to, že se jejich zlomek v nové souvislosti může označovat jako derivace funkce v daném bodě a měla radost, že se jí tak zdá pochopitelnější text ve vysokoškolské učebnici.

Z objevování má Anna metakognitivní zkušenost. V okamžiku, kdy přichází za učitelem pro radu, stačí ukázat okno, které je nutno otevřít. Po rozmluvě Anna nevidí derivaci, jako něco, co bude nadřazeno, ale něco, co poukáže na souvislost jevů a co je pomůže uchovat ve vědomí. Zatím má derivaci jen na úrovni pojmů, ne technologie.

Můžeme se domnívat, že uvedený způsob práce Annu posunul nejen z hlediska kognitivního, ale především z hlediska sebehodnocení. Na počátku byl pocit neschopnosti, postupně se postoj mění tak, že se Anna nebojí otevřít náročnou učebnici, nebojí se žádat o radu a diskutovat o tom, čemu nerozumí.

Při přípravě a realizaci experimentu i při analýzách experimentálních materiálů jsem využívala metodické postupy popsané v knihách [3], [5] a [4]. Jsem ráda, že jsem měla možnost i osobně konzultovat s M. Hejným a chtěla bych mu poděkovat za jeho rady a připomínky.

Literatura – References

[1] Šedivý, O., Križalkovič, K., Macháček, V., Müllerová, J., Drlík, P.: Matematika pre 8. ročník ZŠ, II. diel, SPN, Bratislava, 1991.

[2] Bušek, I. a kol.: Sbírka úloh z matematiky pro 8. ročník ZŠ, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1992.

[3] Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2, SPN, Bratislava, 1990.

[4] Hejný, M., Jirotková, D.: Čtverečkovaný papír jako most mezi geometrií a aritmetikou, PedF UK, Praha, 1999.

[5] Hejný, M., Kuřina, F.: Dítě, škola a matematika : konstruktivistické přístupy k vyučování, Portál, Praha, 2001.

Adresa autora:

Gymnázium, Studentská 896, 295 01 Mnichovo Hradiště, e-mail: `hanusovaj@atlas.cz`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2022 (51)

Zadania úloh
72. ročníka Matematickej olympiády

Kategória Z5

Úloha Z5-I-1. (*Libuše Hozová*) Na lúke bolo 45 oviec a niekoľko pastierov. Potom ako z lúky odišla polovica pastierov a tretina oviec, mali zvyšní pastieri a ovce spolu 126 nôh. Pritom všetky ovce a všetci pastieri mali obvyklé počty nôh. Koľko pastierov bolo pôvodne na lúke?

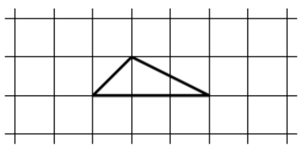
Úloha Z5-I-2. (*Josef Tkadlec*) Marta hrá hru, v ktorej háda päťciferné číslo tvorené navzájom rôznymi číslicami. Priebeh prvých troch kôl vyzerá takto:

1. kolo	2 (žlté)	6 (šedé)	1 (žlté)	3 (šedé)	8 (žlté)
2. kolo	4 (žlté)	1 (zelené)	9 (šedé)	6 (šedé)	2 (žlté)
3. kolo	8 (žlté)	1 (zelené)	0 (šedé)	2 (žlté)	5 (šedé)

Farba políčka prezrádza niečo o číslici v ňom napísanej:
- Zelené políčko znamená, že číslica sa v hádanom čísle vyskytuje, a to presne na tom mieste.
- Žlté políčko znamená, že číslica sa v hádanom čísle vyskytuje, ale na inom mieste.
- Šedé políčko znamená, že číslica sa v hádanom čísle nevyskytuje.

Vysvetlite, či Marta môže alebo nemôže päťciferné číslo s istotou uhádnuť v nasledujúcom kole.

Úloha Z5-I-3. (*Erika Novotná*) Vo štvorcovej sieti je daný trojuholník, ktorého vrcholy sú uzlovými bodmi siete:



V dostatočne rozšírenej sieti nakreslite štyri rozdielne (navzájom nezhodné) mnohouholníky také, že ich vrcholy sú tiež jej uzlovými bodmi a každý z nich má dvojnásobný obvod, ako má daný trojuholník.

Úloha Z5-I-4. (*Libuše Hozová*) Nikola mala v zošite napísané jedno trojciferné a jedno dvojciferné číslo. Každé z týchto čísel bolo tvorené navzájom rôznymi číslicami. Rozdiel Nikoliných čísel bol 976. Aký bol ich súčet?

Úloha Z5-I-5. (*Veronika Bachratá*) Tri žaby sa naučili skákať po rebríku. Každá dokáže skákať smerom hore aj smerom dole, ale len o určité počty priečok. Žaby začínajú na zemi a každá by sa rada dostala na svoju obľúbenú priečku:

- Malá žaba vie skákať o 2 alebo o 3 priečky a chce sa dostať na siedmu priečku.
- Stredná žaba vie skákať o 2 alebo o 4 priečky a chce sa dostať na prvú priečku.
- Veľká žaba vie skákať o 6 alebo o 9 priečok a chce sa dostať na tretiu priečku.

Pre jednotlivé žaby rozhodnite, či vedia doskočiť na svoju obľúbenú priečku. Ak áno, popíšte ako. Ak nie, vysvetlite prečo.

Úloha Z5-I-6. (*Michaela Petrová*) Jakub zbiera hracie kocky, všetky rovnakej veľkosti. Včera našiel škatuľku, do ktorej začal kocky ukladať. Prvá vrstva kociek pokryla presne štvorcové dno škatuľky. Podobne vyskladal päť ďalších vrstiev, avšak v polovici nasledujúcej vrstvy mu došli kocky. Dnes dostal Jakub od babičky 18 kociek a s prekvapením zistil, že mu presne chýbali na dokončenie neúplnej vrstvy v škatuľke. Koľko kociek mal Jakub včera?

Kategória Z6

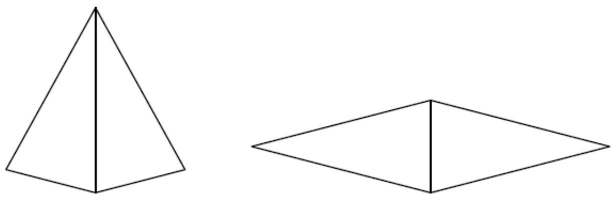
Úloha Z6-I-1. (*Libuše Hozová*) Pán Škovránok bol známym chovateľom vtákov. Celkovo ich mal viac ako 50 a menej ako 100. Andulky tvorili devätinu a kanáriky štvrtinu celkového množstva vtákov. Koľko vtákov choval pán Škovránok?

Úloha Z6-I-2. (*Libuše Hozová*) Václav násobil dve trojciferné čísla obvyklým písomným spôsobom. Overil si, že výsledok je naozaj správny a svoj výpočet niekam založil. Po čase potreboval výsledok ukázať mamičke. Našiel síce svoj predchádzajúci výpočet, ale mnoho číslic bolo rozmazaných, takže sa nedali vôbec prečítať (hviezdičky nahrádzajú nečitateľné číslice):

$$\begin{array}{ccccc}
 & & * & * & * \\
\times & & 1 & * & * \\
\hline
 & 2 & 2 & * & * \\
 & 9 & 0 & * & \\
* & * & 2 & & \\
\hline
5 & 6 & * & * & *
\end{array}$$

Václav si už nepamätal, ktoré čísla násobil, napriek tomu bol schopný určiť ich súčin. Aký bol tento súčin?

Úloha Z6-I-3. (*Eva Semerádová*) Magda si z papiera vystrihla dva rovnaké rovnoramenné trojuholníky, z ktorých každý mal obvod 100 cm. Najprv z týchto trojuholníkov zložila štvoruholník tak, že ich k sebe priložila ramenami. Potom z nich zložila štvoruholník tak, že ich k sebe priložila základňami.
(Ak by mali základne 1 cm a ramená 2 cm, vzniknuté štvoruholníky by teda vyzerali ako na obrázkoch.)



V prvom prípade jej vyšiel štvoruholník s obvodom o 4 cm kratším ako v druhom prípade. Určte dĺžky strán Magdiných trojuholníkov.

Úloha Z6-I-4. (*Libuše Hozová*) Sedem trpaslíkov sa narodilo v rovnaký deň v siedmich po sebe idúcich rokoch. Súčet vekov troch najmladších trpaslíkov je 42 rokov. Keď jeden trpaslík odišiel so Snehulienkou po vodu, zistili zvyšní trpaslíci, že ich priemerný vek je rovnaký ako priemerný vek všetkých siedmich. Koľko rokov mal trpaslík, ktorý šiel so Snehulienkou po vodu?

Úloha Z6-I-5. (*Michaela Petrová*) Pat a Mat si precvičovali počítanie. Vo štvorcovej sieti orientovanej podľa svetových strán priradili posunu o jedno políčko nasledujúce matematické operácie:

- Pri posune na sever (`S`) pripočítali sedem.
- Pri posune na východ (`V`) odpočítali štyri.
- Pri posune na juh (`J`) vydelili dvoma.
- Pri posune na západ (`Z`) vynásobili tromi. Malá žaba vie skákať o 2 alebo o 3 priečky a chce sa dostať na siedmu priečku.

(Napríklad keď Mat zadal Patovi číslo 5 a cestu `S-V-J`, vyšlo im pri správnom počítaní číslo 4.)

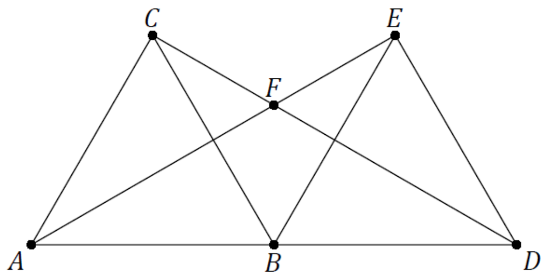
Ktoré číslo zadal Pat Matovi, ak pri ceste `S-V-J-Z-Z-J-V-S` pri správnom počítaní vyšlo na konci číslo 57?

Úloha Z6-I-6. (*Monika Dillingerová*) Boris má zvláštne digitálne hodiny. Idú síce presne, ale namiesto hodín a minút ukazujú iné dve čísla: Prvé je ciferným súčtom čísla, ktoré by bolo na displeji bežných hodín, druhé je súčtom hodín a minút (napríklad o 7:30 ukazujú Borisove hodiny 10:37). Aký môže byť skutočný čas, keď Borisove hodiny ukazujú 6:15? Určte všetky možnosti.

Kategória Z7

Úloha Z7-I-1. (*Libuše Hozová*) Priemerný vek dedka, babičky a ich piatich vnúčat je 26 rokov. Priemerný vek samotných vnúčat je 7 rokov. Babička je o rok mladšia ako dedko. Koľko rokov má babička?

Úloha Z7-I-2. (*Iveta Jančigová*) Sú dané dva zhodné rovnostranné trojuholníky ABC a BDE tak, že body A, B, D ležia na jednej priamke a body C, E ležia v rovnakej polrovine vymedzenej priamkou AD. Priesečník CD a AE je označený F. Určte veľkosť uhla AFD.



Úloha Z7-I-3. (*Matúš Papšo*) *Obkročné číslo* je také prirodzené číslo, v ktorého zápise

- je každá nenulová číslica použitá práve dvakrát,
- medzi dvoma rovnakými nenulovými číslicami sa nachádza práve toľko núl, aká je hodnota týchto číslic.

(Obkročné čísla sú napríklad 40001041 alebo 300103100.)

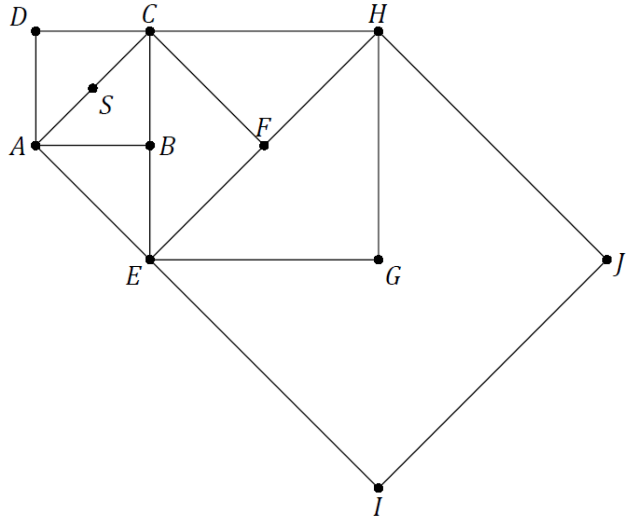
Zistite, koľko existuje sedemciferných obkročných čísel, v ktorých zápise sa vyskytujú práve jednotky, dvojky a nuly.

Úloha Z7-I-4. (*Jaroslav Zhouf*) Jarko mal napísanú postupnosť slabík:

`ZU ZA NA NE LA LU CI SA MU EL`

Písmená chcel nahradiť číslicami od 0 do 9 tak, aby rôznym písmenám zodpovedali rôzne číslice, a aby (v danom poradí) vznikla rastúca postupnosť dvojciferných čísel. Zistite, či sa to dá a ako, alebo vysvetlite, prečo to možné nie je.

Úloha Z7-I-5. (*Eva Semerádová*) Na obrázku nižšie sú znázornené štvorce $ABCD$, $EFCA$, $GHCE$ a $IJHE$. Body S, B, F a G sú postupne stredy týchto štvorcov. Úsečka AC je dlhá 1 cm. Určte obsah trojuholníka IJS.



Úloha Z7-I-6. (*Erika Novotná*) Eva si myslela dve prirodzené čísla. Tieto čísla najprv správne sčítala, potom od seba správne odčítala. V obidvoch prípadoch dostala dvojciferný výsledok. Súčin takto vzniknutých dvojciferných čísel bol 645. Ktoré čísla si Eva myslela?

Kategória Z8

Úloha Z8-I-1. (*Karel Pazourek*) Sú dané tri navzájom rôzne čísla. Priemer priemeru dvoch menších čísel a priemeru dvoch väčších čísel je rovný priemeru všetkých troch čísel. Priemer najmenšieho a najväčšieho čísla je 2022. Určte súčet týchto troch čísel.

Úloha Z8-I-2. (*Karel Pazourek*) Kosoštvorec $ABCD$ má stranu dĺžky 6 cm a výšku 4 cm. Bod E je stred strany AD, bod G je stred strany BC, bod F je priesečník úsečiek AG a BE, bod H je priesečník úsečiek CE a DG. Určte obsah štvoruholníka $EFGH$.

Úloha Z8-I-3. (*Ján Mazák*) Pre postupnosť čísel začínajúcu sa

$$1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ \ldots$$

platí, že každé číslo počnúc tretím je súčtom predchádzajúcich dvoch. Akou číslicou sa končí číslo na 2023. mieste tejto postupnosti?

Úloha Z8-I-4. (*Michaela Petrová*) Cyril na mape s mierkou $1 : 50\,000$ vyznačil štvorcový pozemok a vypočítal si, že jeho strana v skutočnosti zodpovedá 1 km. Mapu zmenšil na kopírke tak, že vyznačený štvorec mal obsah o $1{,}44\,\mathrm{cm}^2$ menší ako na pôvodnej mape. Aka bola mierka mapy po zmenšení?

Úloha Z8-I-5. (*Erika Novotná*) etra mala na tabuli napísané všetky prirodzené čísla od 1 do 9, každé práve raz. Dve z týchto čísel sčítala, zmazala a výsledný súčet napísala namiesto zmazaných sčítancov. Mala tak teraz napísaných osem čísel, ktoré sa jej podarilo rozdeliť do dvoch skupín s rovnakým súčinom. Určte, aký najväčší mohol byť tento súčin.

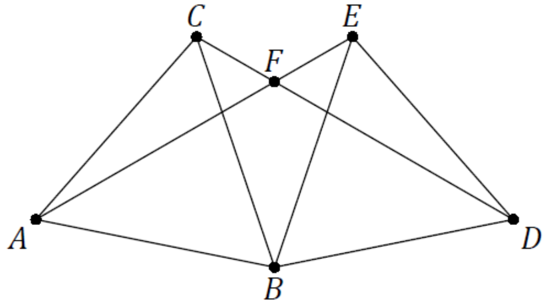
Úloha Z8-I-6. (*Jaroslav Švrček*) Je daný obdĺžnik $ABCD$ a body E, F tak, že trojuholníky BEC a CFD sú rovnostranné a každý z nich má s obdĺžnikom $ABCD$ spoločnú iba stranu. Zdôvodnite, že aj trojuholník AEF je rovnostranný.

Kategória Z9

Úloha Z9-I-1. (*Erika Novotná*) Aritmetická postupnosť je taká postupnosť čísel, v ktorej je rozdiel každého čísla a čísla jemu predchádzajúceho stále rovnaký; tomuto rozdielu sa hovorí *diferencia*. (Napríklad $(2, 8, 14, 20, 26, 32)$ je aritmetická postupnosť s diferenciou 6.)

Bolek a Lolek mali každý svoju aritmetickú postupnosť. Aj Bolkova aj Lolkova postupnosť sa začínala číslom 2023 a končila sa číslom 3023. Tieto dve postupnosti mali 26 spoločných čísel. Pomer Bolkovej a Lolkovej diferencie bol $5 : 2$. Určte rozdiel Bolkovej a Lolkovej diferencie.

Úloha Z9-I-2. (*Iveta Jančigová*) Sú dané dva zhodné rovnostranné trojuholníky ABC a BDE tak, že veľkosť uhla ABD je väčšia ako $120°$ a menšia ako $180°$ a body C, E ležia v rovnakej polrovine vymedzenej priamkou AD. Priesečník CD a AE je označený F. Určte veľkosť uhla AFD.



Úloha Z9-I-3. (*Erika Novotná*) Traja kúzelníci kúzlia s číslami, každý však vie len jedno kúzlo:

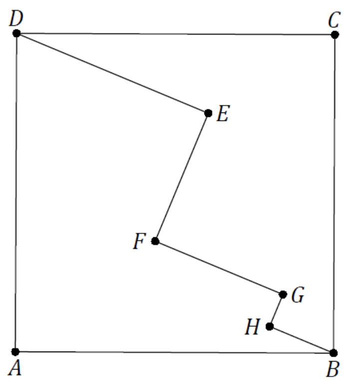
- Prvý kúzelník vie od ľubovoľného čísla odčítať číslo jedna.
- Druhý kúzelník vie ľubovoľné číslo vydeliť číslom dva.
- Tretí kúzelník vie ľubovoľné číslo vynásobiť číslom tri.

Kúzelníci sa pri čarovaní môžu ľubovoľne striedať, každý však môže svoje kúzlo počas jedného vystúpenia použiť najviac päťkrát a žiadny medzivýsledok nesmie byť väčší ako 10. Pri jednom vystúpení mali z pätice čísel $(3, 8, 9, 2, 4)$ vykúzliť päticu trojok, pri inom vystúpení mali z tej istej pätice čísel vykúzliť päticu pätiek. Ako si mohli s problémom poradiť? Nájdite možné riešenie alebo vysvetlite, prečo to možné nie je.

Úloha Z9-I-4. (*Alžbeta Bohiniková*) Nájdite najmenšie kladné celé čísla a a b, pre ktoré platí $7a^3 = 11b^5$.

Úloha Z9-I-5. (*Karel Pazourek*) Na snovom trhovisku ponúkla Sfinga cestovateľovi za štyri sny sedem ilúzií, dva šlofíky a jednu nočnú moru. Inému cestovateľovi ponúkla za sedem snov štyri ilúzie, štyri šlofíky a dve nočné mory. Sfinga je pri svojich ponukách spravodlivá a vymeriava vždy rovnako. Koľko ilúzií stojí jeden sen?

Úloha Z9-I-6. (*Monika Dillingerová*) Vrcholy štvorca $ABCD$ spája lomená čiara $DEFGHB$. Uhly DEF, EFG, FGH, GHB sú pravé a úsečky DE, EF, FG, GH, HB merajú postupne 6 cm, 4 cm, 4 cm, 1 cm, 2 cm. Určte obsah štvorca $ABCD$.



Termíny odovzdania riešení:

- Z5, Z9 – úlohy 1, 2, 3: **16. 11. 2022**; úlohy 4, 5, 6: **9. 1. 2023**
- Z6, Z7, Z8 – úlohy 1, 2, 3: **16. 1. 2023**; úlohy 4, 5, 6: **3. 3. 2023**

Za Slovenskú komisiu Matematickej olympiády spracoval Stanislav Krajči
e-mail: `stanislav.krajci@upjs.sk`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2022 (51)

Zadania úloh 38. ročníka Olympiády v informatike

Informácie a pravidlá

Pre koho je súťaž určená?

Do *kategórie B* sa smú zapojiť len tí žiaci základných a stredných škôl, ktorí ešte ani v tomto, ani v nasledujúcom školskom roku nebudú končiť strednú školu.
Do *kategórie A* sa môžu zapojiť všetci žiaci (základných aj) stredných škôl.

Odovzdávanie riešení domáceho kola

Riešitelia domáceho kola odovzdávajú riešenia sami, v elektronickej podobe, a to priamo na stránke olympiády: `http://oi.sk/`.
Riešenia kategórie A je potrebné odovzdať najneskôr *15. 11. 2022*.
Riešenia kategórie B je potrebné odovzdať najneskôr *30. 11. 2022*.

Priebeh súťaže

Za každú úlohu domáceho kola sa dá získať od 0 do 10 bodov. Na základe bodov domáceho kola stanoví Slovenská komisia OI (SK OI) pre každú kategóriu bodovú hranicu potrebnú na postup do *krajského kola*. Očakávame, že táto hranica bude približne rovná *tretine maximálneho počtu bodov*.

V krajskom kole riešitelia riešia štyri teoretické úlohy, ktoré môžu tematicky nadväzovať na úlohy domáceho kola. V kategórii B súťaž týmto kolom končí.

V kategórii A je približne najlepších 30 riešiteľov krajského kola (podľa počtu bodov, bez ohľadu na kraj, v ktorom súťažili) pozvaných do *celoštátneho kola*. V celoštátnom kole účastníci prvý deň riešia teoretické a druhý deň praktické úlohy. Najlepší riešitelia sú vyhlásení za víťazov. Približne desať najlepších riešiteľov následne SK OI pozve na týždňové výberové sústredenie. Podľa jeho výsledkov SK OI vyberie družstvá pre Medzinárodnú olympiádu v informatike (IOI) a Stredoeurópsku olympiádu v informatike (CEOI).

Ako majú vyzerať riešenia úloh?

V praktických úlohách je vašou úlohou vytvoriť program, ktorý bude riešiť zadanú úlohu. Program musí byť v prvom rade korektný a funkčný, v druhom rade sa snažte aby bol čo najefektívnejší.

V kategórii B môžete použiť ľubovoľný programovací jazyk.

V kategórii A musíte riešenia praktických úloh písať v jednom z podporovaných jazykov (napr. C++, Pascal alebo Java). Odovzdaný program bude automaticky otestovaný na viacerých vopred pripravených testovacích vstupoch. Podľa toho, na koľko z nich dá správnu odpoveď, vám budú pridelené body. Výsledok testovania sa dozviete krátko po odovzdaní. Ak váš program nezíska plný počet bodov, budete ho môcť vylepšiť a odovzdať znova, až do uplynutia termínu na odovzdávanie.

Presný popis, ako majú vyzerať riešenia praktických úloh (napr. realizáciu vstupu a výstupu), nájdete na webstránke, kde ich budete odovzdávať.

Ak nie je v zadaní povedané ináč, riešenia teoretických úloh musia v prvom rade obsahovať *podrobný slovný popis použitého algoritmu, zdôvodnenie jeho správnosti* a diskusiu o efektivite zvoleného riešenia (t. j. posúdenie časových a pamäťových nárokov programu). Na záver riešenia uveďte program. Ak používate v programe netriviálne algoritmy alebo dátové štruktúry (napr. rôzne súčasti STL v C++), súčasťou popisu algoritmu musí byť dostatočný popis ich implementácie.

Usporiadateľ súťaže

Olympiádu v informatike (OI) vyhlasuje *Ministerstvo školstva SR* v spolupráci so *Slovenskou informatickou spoločnosťou* (odborným garantom súťaže) a *Slovenskou komisiou Olympiády v informatike*. Súťaž organizuje *Slovenská komisia OI* a v jednotlivých krajoch ju riadia *krajské komisie OI*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia informatiky.

Celoštátne kolo OI, tlač materiálov a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou OI.

A-I-1 Najmenejkrát rozsvieť

Toto je praktická úloha. *Pomocou webového rozhrania odovzdajte* funkčný, odladený program.

Nočný matfyz je zväčša temný. Budovu si zjednodušene vieme predstaviť ako mriežku rozmerov $n \times n$, rozdelenú na štvorcové políčka. Každé políčko má buď rozsvietené, alebo je tam tma.

Matúš stojí v severozápadnom rohu budovy a chce sa dostať do protiľahlého, juhovýchodného rohu. Tmavé políčka sú nebezpečné – človek ľahko o niečo zakopne, do niečoho narazí, alebo si nejak ináč ublíži. Matúš preto zásadne odmieta na takéto políčka vstúpiť. Matúšov začiatok aj cieľ cesty majú rozsvietené.

Riadky aj stĺpce mriežky si očíslujeme od 1 po n začínajúc v rohu, kde Matúš začína. Políčko v riadku r a stĺpci s budeme označovať (r, s). Matúš sa vie pohybovať štyrmi základnými smermi – teda z políčka (r, s) sa vie pohnúť na ľubovoľné z políčok $(r-1, s)$, $(r, s-1)$, $(r, s+1)$ a $(r+1, s)$. Samozrejme, Matúš sa smie pohnúť len na políčko, ktoré existuje a je tam rozsvietené.

Pri poslednej rekonštrukcii budovy pribudli na všetkých políčkach tlačidlá, ktorými sa dá rozsvietiť. Z nejakého záhadného dôvodu každé tlačidlo funguje tak, že rozsvieti svetlá nielen na políčku, na ktorom je, ale dokonca v celom jeho riadku mriežky. Stlačenie tlačidla v riadku r a stĺpci s teda rozsvieti všetky nasledovné miestnosti: $(r, 1), (r, 2), \ldots, (r, n)$.

V dnešnej dobe treba šetriť elektrinou. Matúš by preto chcel svoj cieľ dosiahnuť tak, aby cestou čo najmenejkrát musel tlačidlom rozsvietiť.

Formát vstupu a výstupu

V prvom riadku vstupu sú dve celé čísla n a m: rozmer mriežky a počet miestností, v ktorých sa už teraz svieti. V každom z nasledujúcich m riadkov sú súradnice jednej z týchto miestností vo formáte „riadok stĺpec". Môžete predpokladať, že všetky súradnice sú korektné, že všetky miestnosti na vstupe sú navzájom rôzne a že medzi nimi sú miestnosti $(1, 1)$ a (n, n).

Na výstup vypíšte jeden riadok a v ňom jedno celé číslo. Ak sa Matúš do cieľa svojej cesty vôbec nevie dostať, vypíšte číslo -1. V opačnom prípade vypíšte najmenší počet riadkov, ktoré potrebuje cestou rozsvietiť.

Obmedzenia a hodnotenie

Vstupy sú rozdelené do štyroch sád. Za každú sadu, ktorú vaše riešenie celú správne vyrieši, dostanete príslušný počet bodov.

Vo všetkých vstupoch platí $2 \le m \le n^2$. Ďalšie obmedzenia pre jednotlivé sady vstupov sú v tabuľke:

číslo sady	1	2	3	4
body	3	2	2	3
maximálne n	10	100	2 000	2 000
maximálne m			6 000	

Príklady

vstup
```
2 3
1 1
1 2
2 2
```
výstup
```
0
```

vstup
```
3 3
3 3
1 1
2 2
```
výstup
```
2
```

vstup
```
3 3
3 3
1 1
2 1
```
výstup
```
1
```

vstup
```
3 3
3 3
1 1
1 2
```
výstup
```
-1
```

V prvom príklade už existuje rozsvietená cesta do protiľahlého rohu.

V druhom príklade Matúš môže stlačiť tlačidlo na štarte, potom prejsť na $(1,2)$, odtiaľ na $(2,2)$, tam znova stlačiť tlačidlo, následne prejsť na $(2,3)$ a odtiaľ do cieľa cesty.

V treťom príklade môže Matúš prejsť na políčko $(2,1)$, tam rozsvietiť druhý riadok, ním prejsť na $(2,3)$ a odtiaľ už rovno do cieľa.

Vo štvrtom príklade sa Matúš nemá ako dostať do druhého riadku.

A-I-2 Vizualizácia firmy

Toto je praktická úloha. *Pomocou webového rozhrania odovzdajte* funkčný, odladený program.

Firma, v ktorej pracuje Michal, má stromovú hierarchiu. Vo firme je $n > 1$ zamestnancov. Tí majú navzájom rôzne čísla od 1 po n. Číslo 1 má Marta – riaditeľka firmy. Každý iný zamestnanec má práve jedného priameho nadriadeného, a to tak, že v hierarchii nie sú žiadne cykly.

Riaditeľka nedávno dala Michalovi pravidelný n-uholník a povedala mu, že doň má spraviť vizualizáciu hierarchie firmy: každého zamestnanca umiestniť do iného vrcholu a následne nakresliť modrú úsečku medzi každým zamestnancom a jeho priamym nadriadeným. Dobrá vizualizácia je taká, pri ktorej sa žiadne dve z týchto $n-1$ modrých úsečiek nekrižujú – nanajvýš môžu mať niektoré dvojice úsečiek spoločný koncový bod.

Zistite, koľko rôznych dobrých vizualizácií existuje. Keďže toto číslo môže byť veľké, stačí, keď vypočítate jeho zvyšok po delení $10^9 + 7$. (Vizualizácie, ktoré sa líšia otočením a/lebo preklopením, považujeme za rôzne.)

Formát vstupu a výstupu

V prvom riadku vstupu bude číslo n. V druhom riadku bude $n-1$ prirodzených čísel $p_2, \ldots, p_n$, pričom p_i je číslo priameho nadriadeného zamestnanca i. Je zaručené, že vstup bude korektný, teda v hierarchii zamestnancov nebude mať žiadne cykly.

Na výstup vypíšte jeden riadok a v ňom jedno číslo: počet dobrých vizualizácií, modulo $10^9 + 7$.

Obmedzenia a hodnotenie

Je päť sád vstupov. Za každú, ktorú váš program celú správne vyrieši, dostanete príslušné body.

- V prvej sade (3 body) platí $n \leq 10$.
- V druhej sade (1 bod) platí $n \leq 100$ a pre všetky i platí $p_i = 1$ (všetci sú priami podriadení riaditeľky).

- V tretej sade (1 bod) platí $n \leq 100$ a pre všetky i platí $p_i = i - 1$ (celá firma tvorí jednu „reťaz“).
- Vo štvrtej sade (2 body) platí $n \leq 100$.
- V piatej sade (3 body) platí $n \leq 10^6$.

Príklady

vstup

```
3
1 1
```

výstup

```
6
```

Firma má troch zamestnancov: riaditeľku, Michala a vrátnika. Pri vizualizácii môžeme riaditeľku umiestniť do ľubovoľného vrcholu trojuholníka (3 možnosti), následne Michala do ľubovoľného ešte voľného vrcholu (2 možnosti) a vrátnik skončí v poslednom voľnom vrchole. Všetkých 6 takto získaných vizualizácií je dobrých.

vstup

```
4
1 2 3
```

výstup

```
16
```

Štyri z vyhovujúcich možností vyzerajú tak, že na obvode štvorca máme postupne v smere hodinových ručičiek zamestnancov 1, 2, 3, 4. Naopak, nevyhovujú možnosti, pri ktorých máme na obvode postupne zamestnancov 1, 3, 2, 4. Pri každej takejto vizualizácii sa križujú úsečky spájajúce 1-2 a 3-4.

vstup

```
11
1 1 1 2 2 2 3 4 4 5
```

výstup

```
38016
```

vstup

```
15
1 1 1 2 2 2 3 4 4 5 8 8 8 10
```

výstup

```
2488320
```

A-I-3 Nevhodný darček

Toto je teoretická úloha. Pomocou webového rozhrania odovzdajte súbor vo formáte PDF, obsahujúci riešenie, spĺňajúce požiadavky uvedené v pravidlách.

Zuzka zbožňuje binárne postupnosti. Jej priateľ Peter nemá talent na dávanie darčekov, a tak jej namiesto toho dal k narodeninám prirodzené číslo c.

Našťastie v miestnom matematickom servise ponúkajú službu, ktorá Zuzke pomôže. Táto služba funguje nasledovne: Ak im prinesiete postupnosť zloženú len z núl a jedničiek, vrátia vám ju nezmenenú. Ak ale prinesiete postupnosť, kde sú aj väčšie čísla, jedno z nich ($x > 1$) si vyberú, zoberú kladivo a pobúchajú po ňom tak, že sa rozpadne na tri menšie čísla x_0, x_1, x_2, pre ktoré platí $x_0 = x_2 = \lfloor x/2 \rfloor$

a $x_1 = x$ mod 2. (Slovne: x vydelíme dvoma. Prvé aj tretie nové číslo sú rovné celej časti podielu, druhé nové číslo je zvyšok po delení.) Zvyšok postupnosti zostane nezmenený.

Zuzka do servisu prvýkrát priniesla jednoprvkovú postupnosť tvorenú jej číslom c. Následne servis navštevovala znova a znova až dovtedy, kým nedostala binárnu postupnosť čísel. Rozmyslite si, že výsledná Zuzkina postupnosť nezávisí od toho, ako si v servise vyberajú, po ktorom prvku kedy pobúchať kladivom.

Príklad: Zuzka začala s postupnosťou (6). Po prvom pobúchaní kladivom po šestke sa táto postupnosť zmenila na $(3, 0, 3)$. Potom napríklad mohli pobúchať kladivom po prvej trojke a vyrobiť postupnosť $(1, 1, 1, 0, 3)$. No a následne by rozbili aj druhú trojku a tak vznikla výsledná postupnosť $(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$. Aj keby v servise rozbili najskôr druhú trojku a až potom prvú, skončila by Zuzka s touto postupnosťou.

Súťažná úloha

Na vstupe dostanete číslo c. Tým je jednoznačne určená Zuzkina výsledná postupnosť $z_1, \ldots, z_n$. Ďalej na vstupe dostanete dva indexy ℓ a r.

Zistite, koľko jedničiek sa nachádza v podpostupnosti $z_\ell, z_{\ell+1}, \ldots, z_r$.

Formát vstupu a výstupu

V jedinom riadku vstupu sú čísla c, ℓ a r. (Hodnota n, teda dĺžka výslednej Zuzkinej postupnosti, nie je súčasťou vstupu. Je ale zaručené, že ℓ a r spĺňajú nerovnosti $1 \leq \ell \leq r \leq n$.)

Na výstup vypíšte hľadaný počet jedničiek.

Obmedzenia a hodnotenie

Pri písaní svojich riešení môžete predpokladať, že váš programovací jazyk vie efektívne robiť aritmetické operácie s ľubovoľne veľkými celými číslami. (Tieto teda netreba implementovať, stačí napr. použiť normálny operátor + pre sčítanie a podobne.)

Plný počet bodov dostanete za riešenie, ktoré efektívne vyrieši ľubovoľný vstup s $c \leq 10^{1000}$.

Nanajvýš 6 bodov môžete dostať za riešenie, ktoré je efektívne za dodatočného predpokladu $r - \ell \leq 100$.

Nanajvýš 3 body môžete dostať za riešenie, ktoré je efektívne pre $c \leq 10^5$.

Nanajvýš 2 body môžete dostať za riešenie, ktoré funguje aspoň keď $\ell = 1$ a $r = n$, čiže za riešenie, ktoré vie vypočítať, koľko jednotiek je v celej výslednej postupnosti.

Príklady

vstup	výstup
`5 2 4`	`2`

Z čísla 5 vznikne postupnosť $(1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$. Z tej chceme úsek $(z_2, z_3, z_4) = (0, 1, 1)$.

vstup	výstup
`6 1 7`	`6`

Postupnosť pre číslo 6 sme videli vyššie. V celej postupnosti je šesť jedničiek.

A-I-4 Zoznámte sa s Hviezdnym impériom

Toto je teoretická úloha. Pomocou webového rozhrania odovzdajte súbor vo formáte PDF, obsahujúci riešenie, spĺňajúce požiadavky uvedené v pravidlách. K tejto úlohe patrí študijný text uvedený na nasledujúcich stranách. Odporúčame najskôr prečítať ten a až potom sa vrátiť k samotným súťažným úlohám.

Podúloha A (2 body): Navrhnite algoritmus, ktorý zistí, či Hviezdne impérium tvorí kružnicu: teda či vieme všetky systémy zoradiť do postupnosti $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ tak, aby pre každé i platilo, že systém s_i susedí práve s dvoma systémami: s_{i-1} a s_{i+1}. (Oba indexy treba brať modulo n, teda napr. systém s_0 má susediť s s_{n-1} a s_1.)
Podúloha B (2 body): Navrhnite algoritmus, ktorý zistí, či v Hviezdnom impériu existuje perfektné párovanie. Inými slovami, treba skontrolovať, či sa dá všetky systémy rozdeliť do dvojíc tak, aby každú dvojicu tvorili dva susediace systémy. (Každý systém musí patriť do práve jednej dvojice.)
Podúloha A (5 bodov): Navrhnite algoritmus, ktorý zistí, či Hviezdne impérium obsahuje Hamiltonovskú kružnicu. Formálne, podobne ako v podúlohe A chceme overiť, či vieme všetky systémy zoradiť do postupnosti $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ tvoriacej kružnicu, tentokrát však môže mať každý systém navyše aj ľubovoľne veľa ďalších susedov okrem tých dvoch na kružnici.

V podúlohách A aj C môžete predpokladať, že $n \geq 3$. Pripomíname, že na vašich riešeniach budeme hodnotiť len ich správnosť, korektnosť zdôvodnenia a hodnotu k. Na časovej a pamäťovej zložitosti nezáleží.

Študijný text: Hviezdne impérium

Pred dávnymi rokmi vo vzdialenej galaxii existovalo Hviezdne impérium. Toto impérium bolo tvorené n systémami.

Niektoré dvojice systémov boli k sebe natoľko blízko, že sa medzi nimi dalo lietať a komunikovať bežnými prostriedkami. Takéto dvojice systémov budeme volať *susedné*.

Pre každú dvojicu susedných systémov trvá prenesenie správy z jedného systému do druhého presne jeden rok. Hviezdne impérium je *súvislé* – z ľubovoľného systému vieme postupným preposielaním dostať správu do ľubovoľného iného. Toto však samozrejme môže trvať tisíce rokov, alebo aj viac, keďže Hviezdne impérium je obrovské.

Hviezdne impérium občas potrebuje riešiť rôzne algoritmické problémy. Všetky systémy vlastnia obrovské množstvo veľmi výkonných klasických počítačov, takže nikoho netrápi časová ani pamäťová zložitosť výpočtov, problém však nastáva, ak je pre vyriešenie problému potrebná komunikácia medzi systémami.

V praxi sa preto používa hybridné riešenie, ktoré v sebe spája modernú techniku a tri netradičné zložky: *telepatického cisára, veľmi kvalitných veštcov a možnosť sfarbiť celý vesmír na ružovo*. Funguje to celé nasledovne:

- Cisár Hviezdneho impéria má telepatické schopnosti, vďaka ktorým dokáže okamžite odovzdať informáciu kamkoľvek do celého impéria. Tento kanál je bohužiaľ len jednosmerný, príjemca správy cisárovi na ňu nevie odpovedať.
- Každý systém má svojho veštca. Veštec vie na požiadanie vyveštiť postupnosť bitov zadanej dĺžky. O veštcoch je známe, že naozaj nechcú, aby niekto z nich zomrel.
- Vedci Hviezdneho impéria nedávno objavili techniku, ako poštekliť samotnú matériu časopriestoru. Ak tak niekto spraví, celý vesmír sa okamžite zafarbí do ružova a zhruba rok v takom stave ostane. Potom ružová farba v priebehu pár dní vybledne. Poštekliť časopriestor už vedia obyvatelia každého zo systémov v impériu.

Za pomoci týchto nástrojov bol vyvinutý nasledovný postup pre riešenie algoritmických problémov:

1. Cisár každému hviezdnemu systému oznámi ich celkový počet (číslo n) a každému systému taktiež oznámi jeho jednoznačný identifikátor (unikátne celé číslo od 0 po $n-1$).
2. Cisár každému systému oznámi algoritmus, ktorý majú použiť. Tento algoritmus je spoločný pre všetky systémy.
3. Vládca každého systému zájde za svojím veštcom. Veštec mu oznámi nejakú k-bitovú postupnosť R.
4. Na základe svojej lokálnej postupnosti R a predpísaného algoritmu si každý systém vypočíta, aké správy chce poslať svojim susedom, a následne tieto správy pošle.
5. Každý systém rok počká, kým mu prídu správy od jeho susedov.
6. Následne každý systém zo svojej lokálnej postupnosti R a prijatých správ vypočíta, či je jeho lokálna odpoveď „možno“ alebo „nie“.

7. Ak je odpoveď „nie“, dajú popraviť veštca a pošteklia časopriestor.
8. Ešte týždeň všetci počkajú. Ak vesmír stále nie je ružový, znamená to, že nik nemal odpoveď „nie“, a teda všetci uzavrú, že odpoveď je „áno“.

Ako sme už spomínali, veštci naozaj nechcú, aby niekto z nich zomrel. Ak existuje taká sada veštieb, ktorá všetkým zachráni život, je zaručené, že jednu takú sadu naozaj vyveštia. Ak teda bolo pred veštením možné, že odpoveď bude „áno“, tak je zaručené, že po veštení sa tak naozaj stane.

Príklad 1: tri tímy

Cisára zaujíma, či sa dajú všetky systémy v impériu rozdeliť do troch tímov tak, aby žiadne dva susediace systémy neboli v tom istom tíme.

Riešenie: Vládca každého systému si dá vyveštiť dva bity. Ak dostane 00, rovno odpovie „nie“ a dá veštca popraviť. Ak dostane 01, 10 alebo 11, prečíta to ako číslo svojho tímu v dvojkovej sústave (1, 2 alebo 3). Následne každý systém pošle všetkým svojim susedom svoje vyveštené číslo tímu. Ak o rok od niektorého suseda dostane systém rovnaké číslo, odpovie „nie“. Ak nik neodpovedal „nie“, tak vieme, že každý systém má číslo tímu iné od všetkých svojich susedov, a teda je naozaj odpoveď „áno“.

Ak existuje aspoň jedno platné rozdelenie do troch tímov, veštci si vedia jedno také rozdelenie zvoliť a vyveštiť jemu zodpovedajúce čísla. Ako sme zdôvodnili vyššie, povedie to k želanej odpovedi „áno“. Ak rozdelenie neexistuje, buď aspoň jeden veštec vyveští 00, alebo všetci veštci vyveštia platné čísla – potom ale nutne niektorí dvaja susedia dostanú to isté číslo a obaja to následne odhalia a vyhlásia „nie“.

Popísaná stratégia používa $k = 2$ (veštia sa len dva bity).

Príklad 2: čokoľvek

Vyššie popísaným protokolom vieme za niečo vyše roka vyriešiť ľubovoľnú rozumnú algoritmickú úlohu takéhoto typu. Vždy totiž môžeme postupovať nasledovne:

V každom systéme si necháme od veštca vyveštiť mapu celého Hviezdneho impéria, presnejšie, jeho maticu súvislosti. To je n^2 bitov: po riadkoch vypísaná tabuľka rozmerov $n \times n$, v ktorej riadku i a stĺpci j je hodnota 1 alebo 0 podľa toho, či systémy i a j susedia.

Následne každý systém pošle všetkým susedom celú vyveštenú mapu a svoj identifikátor. Po roku, keď každý systém dostane správy od susedov, tak spraví nasledovné:

- Skontrolujeme, či všetci susedia dostali vyveštenú tú istú mapu ako my. Ak nie, rovno odpovieme „nie“.

- Skontrolujeme, či sada identifikátorov, ktoré nám prišli, presne zodpovedá tomu, koho máme mať za susedov podľa mapy. Opäť, ak to nesedí, rovno odpovieme „nie“.

Ak žiaden systém zatiaľ neodpovedal „nie“, znamená to, že naozaj všetky dostali vyveštenú správnu mapu impéria. No a teraz si už každý systém môže na svojich počítačoch (v zanedbateľnom čase) celý problém vyriešiť a podľa toho odpovedať „áno“ alebo „nie“.

Hodnotenie riešení

Ako sme už uviedli, čas a pamäť potrebné na klasické algoritmické výpočty budeme považovať za zanedbateľné. Vo svojich popisoch riešení ich ani nemusíte odhadovať.

Naopak, veštci za svoje služby pýtajú značné sumy a veštenie každého bitu je preto veľmi drahé. Snažíme sa teda nájsť také riešenie, ktoré má čo najmenšie k – teda čo najmenej vyveštených bitov v každom systéme.

Príklad 2 ukazuje, ako v podstate ľubovoľnú úlohu vyriešiť s n^2 vyveštenými bitmi. Tento počet vieme dokonca ľahkou úpravou znížiť na $n(n-1)/2$. Preto očakávajte, že body dostanete len za riešenia, ktoré potrebujú vyveštených bitov rádovo menej ako n^2.

Ako riešenie odovzdajte popis vášho algoritmu a zdôvodnenie jeho správnosti. Nezabudnite explicitne uviesť hodnotu k pre váš algoritmus.

Algoritmus môžete detailne slovne popísať, uviesť ho ako pseudokód, alebo ho naprogramovať v ľubovoľnom bežnom jazyku. V algoritme môžete používať:

- Read-only premenné `N` a `ID` obsahujúce celkový počet systémov a identifikátor aktuálneho systému.
- Read-only premennú `stupen` obsahujúcu počet susedných systémov.
- Funkcie `vyvesti\_bit()`, `vyvesti\_bity(b)` a `vyvesti\_cislo(x)`, ktoré vieme používať na získanie veštby.

  Prvá funkcia vyveští a vráti jeden bit. Druhá vyveští rovno b bitov a vráti ich ako pole. Tretia funkcia vyveští $\lceil \log_2 x \rceil$ bitov a vráti ich ako nezáporné celé číslo z rozsahu od 0 po aspoň $x-1$.
- Pole `outbox` obsahujúce `stupen` záznamov ľubovoľného typu. Do každého políčka môžete zapísať správu, ktorú chcete odoslať jednému zo susedných systémov.
- Read-only pole `inbox` obsahujúce `stupen` záznamov toho istého typu. V každom políčku je správa, ktorú ste dostali od príslušného suseda.

Indexy do `outbox` a `inbox` si zodpovedajú: do `inbox[i]` dostanete odpoveď od toho suseda, ktorému ste poslali správu cez `outbox[i]`.

Pole `inbox` smiete začať čítať až po ukončení zápisu do poľa `outbox`.

Váš algoritmus musí vždy skončiť, a to tým, že explicitne vráti odpoveď `ANO` alebo `NIE`.

Príklad 3: cesta

Chceme zistiť, či je celé Hviezdne impérium jedna veľká cesta – inými slovami, či sa dá všetky systémy zoradiť do poradia $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ tak, aby každý systém fyzicky susedil práve s tými systémami, s ktorými susedí v postupnosti.

Riešenie: Ak má ľubovoľný systém stupeň väčší ako 2 (teda viac ako dvoch susedov), odpoveď je zjavne `NIE`.

V opačnom prípade sú len dve možnosti: buď je celé impérium cesta, alebo je to kružnica. (Pripomíname, že impérium je súvislé a všetci to o ňom vedia.)

Každý systém si preto dá vyveštiť dve veci: naše poradové číslo p na ceste a jeden bit navyše: náš lokálny index toho suseda, ktorý je na ceste pred nami. (Ak máme len jedného suseda, tento vyveštený bit bude 0 ak je sused pred nami, resp. 1, ak je za nami.)

Následne potrebujeme overiť, či nám veštci vyveštili všetko správne. Toto vieme spraviť napríklad tak, že každému susedovi pošleme číslo, o ktorom si myslíme, že je to jeho poradové číslo. Ak dostaneme od ľubovoľného suseda číslo iné ako p, odpovieme `NIE`, ak všetci dostanú všetko správne, všetci odpovedia `ANO`.

Ak Hviezdne impérium tvorí cestu, veštci si môžu vybrať jeden smer po nej, podľa neho vyveštiť poradové čísla a smery a tak zabezpečiť, že bude odpoveď `ANO`. Naopak, ak impérium tvorí kružnicu, bez ohľadu na to, aké bity veštci vyveštia, niektorý systém dostane vyveštenú najmenšiu hodnotu p zo všetkých. Tento systém potom jednému zo svojich dvoch susedov pošle hodnotu $p - 1$ a ten sused následne nutne odpovie `NIE`.

Toto riešenie potrebuje vyveštiť $k = \lceil \log_2 n \rceil + 1$ bitov.

Príklad implementácie

Nižšie uvádzame ukážkovú implementáciu riešenia z príkladu 3. Používame v nej niekoľko skratiek, ktoré môžete aj vy použiť vo svojich riešeniach. V prvom rade neuvádzame čakania: implicitne je jasné, že pred prvým prístupom do poľa `inbox` počkáme rok, aby stihli prísť správy od susedov, a pred `return ANO` počkáme týždeň a skontrolujeme, či neoružovel vesmír – ak oružovel, namiesto `ANO` pochopiteľne aj my vrátime `NIE`.

```
# ak sme jediny system v celom imperiu, odpoved je ano
if N == 1: return ANO

# ak mame privelky stupen, urcite to nie je cesta
if stupen > 2: return NIE

# vyvestime si nase poradove cislo na ceste a skontrolujeme,
  ze je z rozsahu od 0 po N-1
p = vyvesti_cislo(N)
if p >= N: return NIE

# vyvestime si index suseda, ktory je na ceste pred nami: 0 alebo 1
pred = vyvesti_bit()

if stupen == 2:
    # mame dvoch susedov, obom posleme prislusne spravy
    outbox[pred] = p-1
    outbox[1-pred] = p+1
    # a o rok na to skontrolujeme, ci od oboch prislo spravne cislo
    if inbox[0] != p: return NIE
    if inbox[1] != p: return NIE
else:
    # mame len jedneho suseda, bud pred nami alebo za nami
    if pred == 0:
        outbox[0] = p-1
    else:
        outbox[0] = p+1
    # a od neho o rok ma prist nase spravne cislo
    if inbox[0] != p: return NIE

# este tyzden pockame, ci vesmir nezruzovel, a ak nie, tak...
return ANO
```

Pre úlohovú komisiu Olympiády v informatike spracovali
Michal Anderle ⟨zaba@ksp.sk⟩ *a Michal Forišek* ⟨misof@ksp.sk⟩.

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2022 (51)

How can We Teach the History of Physics? Methodological Suggestions from a Hungarian Physics Teacher

Róbert Károly SZABÓ

Abstract. Teaching the history of physics or teaching physics from a historical view are less known pedagogical methods in Hungary. However, there have been experienced researchers who give guidance on the alternative methods that should be tried. To show these theories, I will give an insight into their knowledge in my paper. Then I complete these methods with my own ideas and results, which are unique solutions for not only teaching physics in secondary schools, but also in universities or further trainings.

Key Words: physics teaching, history of physics, physics of history, interdisciplinarity

Súhrn: [**Ako môžeme učiť dejiny fyziky? Metodické návrhy maďarského učiteľa fyziky**] Vyučovanie dejín fyziky alebo vyučovanie fyziky z historického hľadiska sú v Maďarsku menej známe pedagogické metódy. Existujú však skúsení výskumníci, ktorí poskytujú návod na alternatívne metódy, ktoré sa môžu vyskúšať. Aby som ukázal tieto teórie, vo svojom príspevku poskytnem prehľad ich poznatkov. Tieto metódy potom dotváram vlastnými nápadmi a výsledkami, ktoré sú jedinečnými riešeniami nielen pre výučbu fyziky na stredných školách, ale aj na univerzitách či školeniach.

Kľúčové slová: vyučovanie fyziky, dejiny fyziky, fyzika dejín, interdisciplinarita

MESC: M50

1. Introduction

The most important task of teaching science is to acquaint and discover the world around us, and thus understand the driving forces of the processes and phenomena that take place in nature. Although it is not always obvious, our scientific literacy shapes our thinking and worldview fundamentally, and affects even our tiniest everyday actions.

However, the education of natural sciences, including physics, faces numerous difficulties these days. Due to its complexity, physics is one of the least popular subjects among students. Interestingly, this fact is related to the practice of simplification in physics teaching, which is done in order for students to be able to comprehend the material. Although simplification is used just for the sake of easier comprehension and the possibility of quantitative description, by its application we move even farther from reality.

Curriculum developers are now turning to radical simplification and reduction of curriculum as a means of overcoming resentment. In our opinion, however, there is another solution. On the one hand, the phenomenon-centered teaching of physics (i.e. the discussion of qualitative knowledge and the practical applications of physics) has become more and more important recently. On the other hand, interdisciplinary education, which is already well applied internationally, also offers opportunities to broaden the circle of students interested in physics. All this happens, of course, through the widespread application of the latest digital technologies of our time [1].

In my view, a further alternative to reforming physics as a subject could be a history-based approach to physics, or an approach through history. With this conception in the foreground, in this article I am presenting the different interpretations of the physical-historical and the historical approach to the teaching of physics, as well as its didactic and pedagogical aspects, which have appeared in Hungary so far. In addition to this, I am presenting my own results in teaching the history of physics and the physics of history, the application of which, in my opinion, would be able to promote not only public education, but also higher education, and thus physics teacher training (or further training).

2. Presenting the Hungarian methods of teaching the history of physics

First of all, it is worth considering how the history of physics is currently taught in Hungary. It can be stated with certainty that the importance of teaching the history of physics is supported by some famous Hungarian scientists. However, they represent different theories about the reasons why the history of physics should be taught.

To start with, K. Simonyi (1916–2001), a university professor and engineer – the writer of the famous book titled *Cultural History of Physics* – says that we can make the lessons more colorful by integrating the history of physics in the curriculum, as there are a lot of stories which contain exciting, humorous episodes. Additionally, according to Simonyi, if we focus on the actions of great scientists (like [2]), we can understand the development of physics by learning about the “great thoughts of great individuals” [3]. Gy. Radnai, a retired docent of the *Eötvös Loránd University* states that the implementation of the history of physics enables us to teach physics in a chronological negotiation which is important from the aspect of physical theory development. Furthermore, Radnai adds that the history of physics shows not only the successes but also the failures of scientific development. This encourages students to accept their own mistakes, as well as those of their teacher's, as it has often happened also with scientists that they were able to get the right result after having made the same experiment several times [4]. K. Radnóti, a college teacher of the *Eötvös Loránd University*, argues that it is possible to refute the wrong prior hypothesis our students make if we teach the history of physics. Namely, these hypotheses are very similar to the ancient Greek theories, for example [5]. Z. Gábor, a university teacher of *Budapest Engineering University* says that students can accept difficult physical problems and concepts easier if we relate them to the history of physics. He also adds that by showing students the "human face" of the history of physics, we can highlight the mistakes of physicists from the past. The use of drama games (like [6]), for example, could help students imagine the dispute of physicists on different physical issues, which could promote the learning process, as well [7]. According to L. Kovács, a retired college teacher and physics historian, another important option is to present or build large experiments in a school setting. Students usually like old, famous experiments and enjoy replicating or repairing old, workable tools. For this purpose, the teacher can analyze the sketch drawing of the experimental device, show the original photo or the description of the equipment to students, or represent the formal measurements by making a copy of the old experimental equipment [8].

3. My own achievement in teaching the history of physics

Based on the aspects detailed above, it can be stated that although the opinions on the usefulness of teaching the history of physics are unanimous, surprisingly we do not have a finished methodology for teaching the history of physics in Hungary. (In contrast with Hungary, there is a lot of articles which are about remarkable research and results at abroad, like [9], [10] or [11].)

Being a physics and history teacher, I have been striving to fill this gap (at least partly) since I was a sophomore student at university. In my previous TDK (Scientific Student Conference) dissertations, as well as in my published writings, I emphasized that we can attract the attention even of those students who are not that interested in natural sciences if we elaborate and teach topics related to the history of physics [12].

Thanks to the research I have been making since 2016, I have presented such results that, according to my supervisors, can promote the popularity of teaching the history of physics. I can classify my TDK dissertations and publications into three categories according to what extent they have brought new aspects in the methodology of teaching the history of physics.

3.1. The presentation of relevant experiments which has shaped the history of physics in a school setting

In addition to my research on the methodology of teaching physics, from 2017 I have also been making historical research in my old high school, the *Szent István High School* in Kalocsa. As I am most interested in the history of the First World War, between 2017 and 2018 I explored the school's World War I history and sacrifice. In the course of this research, I was fortunate to gain an insight into the history of physics teaching in the school, as well as the history of the experimental toolkit available there.

The sources particularly emphasize the sacrifice of the physics toolkit of the school during the First World War. The X-ray laboratory of the *Kalocsa Archbishop's High School*, for instance, was used to X-ray the body parts of the wounded soldiers. Getting inspired by this topic, in my work presented at the Hungarian National Scientific Student Conference (OTDK) in the spring of 2019, I explored the history of school physics teaching from the founding of the institution (1765) to the end of the First World War (1918). In my publication based on the mentioned dissertation, I introduced the X-ray laboratory of the school and the physical bases of its operation in detail. In my article – not knowing the previously mentioned position of L. Kovács at that time – I pointed out that the understanding of how tools from the 19th-20th century worked, including both their theoretical operation and practical application, is significant for three reasons. Firstly, there may be a tool that can replace a new, expensive piece of our time. Secondly, with their application we can talk about such topics that have become part of other, independent disciplines (such as medicine) since then, so we not even teach them for demonstration purposes at school. Finally, by getting the necessary equipment, it would be possible to rebuild the laboratory and even use it for educational purposes [13].

Although the re-establishment of the already mentioned X-ray laboratory is something we have to wait for, in my opinion, the introduction of the equipment in a school class and the teaching of its operation is especially useful, as, apart from its physical-historical significance, it enriches historical knowledge, too. The extraordinary usefulness of presenting large-scale experiments shaping the history of physics in a school setting is also recognized abroad. Among the relevant publications, it is worth highlighting, for example, the reconstruction of the sloping slope [14] or the interrupted pendulum [15] of Galilei's famous experiments.

3.2. “The physics of history” or the possibility of teaching history on a history-based basis

In my point of view, another possibility is to change the order of the words in the expression ’history of physics’. It may be worthwhile to examine historical tools of technical relevance or historical events through the spectacles of physics, for example to call on the help of natural sciences to explain their operation and application.

I have already drawn attention to some relevant topics in my previous writings. Without claiming to be exhaustive, let me mention a few examples, such as the radiocarbon dating of ancient Egyptian mummies or the physics and historical background of the atomic bomb. My publication on the physics of the First World War, and ‘the monster’ known as the Paris Cannon, focuses on the physics of wars, and highlights that the weapons used in wars had been supported for thousands of years by the science of physics and engineering. So, we cannot ignore their scientific background [12]. Another publication of mine is about the accident at the Chernobyl nuclear power plant which presented the physical, historical and social causes of the disaster. It sought to answer the question, how the knowledge of nuclear physics which is necessary to understand the accident and the subsequent events, can be discussed with scientific simplicity in high school [16].

For physics teaching, the study of the “physics of history” may be a kind of novelty, for which there have been few examples so far. That is why I recommend the elaboration of as many historical topics or events as possible with the help of physics, and the preparation of auxiliary materials or independent study materials and lesson plans. To justify my position, I refer to the thoughts of K. Simonyi, according to whom physics is not only a natural but also a social phenomenon, the development of which is in relation with the sum of social phenomena. To fully understand it, we need to know, among other things, the historical development of technology and its relationship to history itself [3].

3.3. Preparation of computational tasks related to the history of physics and the physics of history

The third element of my suggestions is the presentation of physics through physics-historical, but rather historical-embedded physics tasks. There is no doubt that problem solving plays a fundamental role in today's physics teaching practice, the reason for which is that the knowledge system of the natural sciences can be learned primarily through problem solving. However, it does count a lot what the wording of these tasks is, what the context of the problem to be solved is, or what our goal is with the result of the solved task. On the one hand, it is becoming more and more important that a task is related to practical life in our present. We can promote this objective by integrating physical history and historical events, as we provide opportunities to illustrate the practical significance of counting and to evaluate very significant quantitative or qualitative results from the past. To give an example, we do not ask students what the formula for the resistance force of the medium is, but rather how it is possible that parachutists do not break themselves during a fall. Or, to give a historical example, we might even ask at what speed the paratroopers landed in the so-called Mercury operation in World War II (German occupation of Crete in 1941), taking the known conditions into account (weight of equipment, jump height, etc.). On the other hand, instead of practicing "soulless and infinite" mathematical algorithms ("substitution examples" in today's terminology), which are often characterized by the most concise wording and the avoidance of unnecessary figures, by presenting the circumstances of a historical event, the tasks gain a longer, more exciting context. The most important advantage of the integration of historical events in physics teaching, which is quite unique in the present, is that it encourages students not only to solve problems, but also to solve diverse, yet comprehensive and complex problems. Namely, the students need to interpret and understand the context of the problem, solve the task quantitatively, make a qualitative analysis of the solution and check if the result is realistic [17]. Therefore, my third suggestion for physics teachers is to create tasks for their students which meet both goals of problem solving highlighted above. I also try to fulfil this aim in the first part of an activity book I have created, which deals with experiments or discoveries in the history of physics, as well as with historical events of my choice [18].

The tasks of this activity book are partly based on the work of significant scientists and on some historical events and episodes I have found exciting. When preparing the tasks, I intended to include authentic data, for which purpose I used both literature related to the given problem and the advice and suggestions of experts. In the first part of the book, I focused on the oldest and most basic branch of physics, which is mechanics, out of which computational tasks related to kinematics, dynamics, hydro- and aerostatics came to the fore. Each of the four chapters in the activity book contains eight tasks, which follow each other in historical order. I also prepared detailed solution instructions for the tasks, the professional reviewer of which was P. Tasnádi, a retired habilitated associate professor of the *Eötvös Loránd University*. To demonstrate the historical events I asked a student, A. Gyenese to make illustrations to the tasks as *Fig. 1* shows [1].

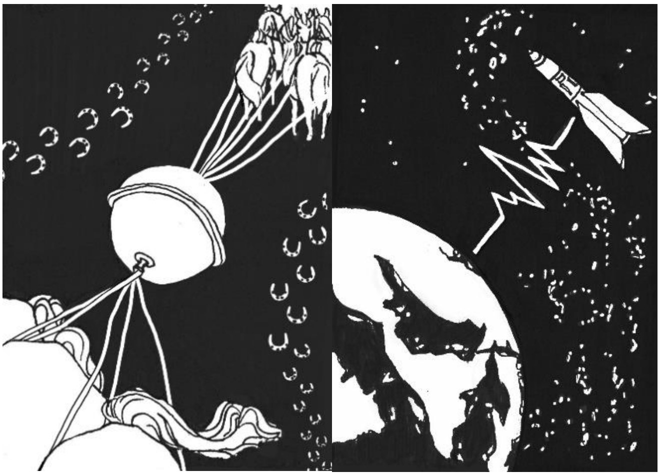


***Fig. 1**: Artistic illustration of physics tasks made by A. Gyenese.*

4. My own experience in teaching

As the above-mentioned activity book is just being under publication at the time of writing this study, I am currently unable to share any experience of how it has been accepted. Instead, I can share the reflections I received from students during my short-term teaching and long-term teaching practices on episodes and computational tasks related to the issues of physical history and historical physics.

When I was a fifth-year university student, I did a short-term (half year) teaching practice in physics at the *ELTE Ágoston Trefort Practicing Secondary School* in Budapest and taught the topic of direct current to third graders. Fortunately, I had many opportunities to mention physical history aspects in this topic, such as exploring the history of the electric incandescent lamp or highlighting the long-standing significance of direct current. As I did not carry out a specific statistical analysis of how good it was for the students to integrate physics-historical and historical-oriented physics questions and tasks in their lessons, I can only rely on a list of qualitative opinions. For example, the students emphasized in connection with my professional and pedagogical skills that I "*tried to bring interesting curricula in addition to the curriculum, such as historical aspects*" and that "*there were a lot of interesting additions like history*". Moreover, a student suggested to me to bring "*even more interesting historical facts*" to my classes in the future whenever it is possible.

Similarly, as a sixth-year undergraduate student, I taught mechanics (kinematics and then dynamics) to a first grader class at the *Deák Square Lutheran High School* in Budapest. During my practice in this school I also integrated numerous history-related tasks and episodes in my physics lessons, like the lives of Aristotle, Galileo and Newton. This was also the time when my first history-related computational tasks were born, mainly with regard to horizontal throwing (World War I “bottle bomb”), circular motion (Kincsem, “The Hungarian Wonder”), and momentum retention (V-2 German missile). After completing ma practice, I asked the students again for feedback on my preparedness and the lessons I had held. However, learning from the example of the previous year's practice, I now wanted to explore the students' opinions with the help of quantitative questions, so in one of the questions I specifically asked, "*What is your opinion about physical history and history-related tasks*?" Students were able to answer on a scale from 1 to 5 by circling the appropriate number (1 - not at all; 2 - rather not; 3 - I can't decide / moderately; 4 - rather yes; 5 - completely). The feedback which was completed by 12 students resulted in an approximately 3,7 average. In my opinion, the result can be considered positive in a group where the teaching of physics with a physical-historical or historical approach (according to the mentor-teacher) has not appeared before.

5. Conclusion, suggestions

Although as a recent graduate student in physics history, I am just getting acquainted with the methodology of teaching physics history, I believe that in the light of my mentioned results, I can make suggestions myself not only for my colleagues, but for university teacher training and in-service physics teachers.

My most important suggestion to my colleagues is that we should have the courage to teach in a slightly different framework than usual. For this, on the one hand, let us dare to innovate, to bring novelty to the teaching of physics. Of course, to the right extent, but we should try to diverge from the previous or current schedule of teaching physics and dare to create an independent structure. We ought to trust ourselves because no one knows the methodology of physics, the possibilities and limitations of teaching it better than practicing physics teachers. On the other hand, let us accept that the textbooks in circulation at any given time serve only as teaching aids. Errors may occur in their structure and descriptions, the recognition of which requires the methodological and professional expertise of the teacher-scientist. Dare to omit or merge some less important parts of the textbook material taking into account the mandatory requirements and the individual needs of the given group. Finally, once we have met the previous two pieces of criteria, there is an opportunity for the interdisciplinary teaching of physics. It means real assignment, devotion, and real sacrifice. Namely, in the framework of interdisciplinary teaching, we can try the aids and ideas made by others - of course with necessary awareness and humility – to be able to add useful advice for ourselves and our colleagues. Apart from that, our most important duty is to create resources for interdisciplinary education as one of the most exciting opportunities for the future school, without regretting time and energy [1].

In connection with the appearance of the history of physics in higher education [19], it is important to mention that there is currently a course about the history of physics at the *Eötvös Loránd University* physics teacher (or doctor of physics) training program, however, this course is mainly theoretical because it is only about the transfer of the most important knowledge of the history of physics. In my opinion, therefore, a change is needed that focuses not only on the transfer of knowledge, rather than the teaching of the methodological possibilities of physics history and physics teaching with a historical approach like [20]. Teachers should be shown how or by what means they can integrate the history of physics through a specific curriculum. In my opinion, this would require physicists who are extremely profound in the history of physics. This proposal also applies to the training of physics teachers. At the same time, I believe that the integration of historical background, which is also essential for the history of physics, would require cooperation with teachers teaching in history teacher training. It would be important to take a compulsory course, which, in cooperation with the Faculty of Arts (History, Philosophy), helps students to immerse in physics history and historical physics, so that educators who do not work with history or philosophy can also apply their methods.

6. Acknowledgements

The project *of writing the exercise book is funded* by the Content Pedagogy Research Program of the Hungarian Academy of Sciences. I am very grateful for T. Tél, the leader of Content Pedagogy Research Program of the Hungarian Academy of Sciences, and P. Tasnádi, who proofread my manuscript. I also say thanks to A. Gyenese for her illustrations which make my exercises book more colored.

References

[1] Szabó R 2021 *Történeti fizika példatár I*. ELTE Fizika Doktori Iskola. Budapest, in Hungarian (ISBN 978-615-6316-02-8)

[2] Hindarto N, Nugroho S E 2018 Using history of physics as a media to introduce and internalize characters values in physics instruction. *Journal of Physics: Conference Series 983*. https://doi.org/10.1088/1742-6596/983/1/012002

[3] Simonyi K 2012 *A Cultural History of Physics*. CRC Press, 1–19 (ISBN 978-1-56881-329-5)

[4] Radnai Gy 1980 Rezgések és hullámok VII. Az elektromágneses hullámok tanításáról. *Fizikai Szemle 30(7)*, 258–266.

[5] Radnóti K 2017 Óráról órára. *Fizikaórák megjegyzésekkel ellátva. Hallgatói segédlet a fizikatanítási gyakorlatokhoz*. Szegedi Tudományegyetem Bölcsészettudományi Kar Neveléstudományi Intézet és MTA – SZTE Természettudomány Tanítása Kutatócsoport. Szeged, in Hungarian, 13–156.
[6] Begoray D, Stinner A 2005 Representing Science Through Historical Drama: Lord Kelvin and the Age of the Eart Debate. *Science & Education 14(3),* 457–471. https://doi.org/10.1007/s11191-005-0780-y
[7] Zemplén G 2011 Mi a haszna a természettudományos tárgyak oktatásában a tudománytörténet és a tudományfilozófia diszciplínáinak? A Történelem és Filozófia a Tudomány Oktatásában (HIPST, avagy TöFiTO) projekt bemutatása. *Iskolakultúra 20(10–11),* 56–61. (ISSN 1215-5233)
[8] Kovács L 1996 A fizikatörténet szerepe a fizikatanításban. *Iskolakultúra 6(5)*, 52–56.
[9] Höttecke D, Henke A, Riess F 2010 Implementing History and Philosophy in Science Teaching: Strategies, Methods, Results and Experiences from the European HIPST Project. *Science & Education 21(9)*, 1–29. https://doi.org/10.1007/s11191-010-9330-3
[10] Müller M G, Mendes A A 2020 *Journal of Physics: Conference Series 1512.* https://doi.org/10.1088/1742-6596/1512/1/012033
[11] Leone M, Rinaudo M 2020 Should the history of physics be rated X? A survey of physics teacher's expectations. *Physics Education 55(3).* https://doi.org/10.1088/1361-6552/ab73d1
[12] Szabó R 2018 Történelmi szimuláció: a távolsági ágyúzás fizikája. *Fizikai Szemle 68(2)*, 60–65.
[13] Szabó R 2019 A Kalocsai Érseki Főgimnázium röntgen-laboratóriuma és első világháborús szerepvállalása. *Fizikai Szemle 69(3)*, 102–107.
[14] Straulino S 2008 Reconstruction of Galileo Galilei's experiment: the inclined plane. *Physics Education 43(3)*, 316–321. https://doi.org/10.1088/0031-9120/43/3/012
[15] Pantano O, Talas S 2010 Physics thematic paths: laboratorial activities and historical scientific instruments. *Physics Education 45(2)*, 140. https://doi.org/10.1088/0031-9120/45/2/002
[16] Szabó R 2018 Csernobil és Paks a tananyagban. *Természet Világa 149(9)*, 394–398.
[17] Radnóti K, Nahalka I, Poór I, Wagner É 2002 *A fizikatanítás pedagógiája*. Nemzeti Tankönyvkiadó. Budapest, in Hungarian, 180–198.
[18] Szabó R 2020 A fizika történeti megközelítésének didaktikai szempontjai a fizikaórán. *Fizikai Szemle 70(10)*, 345–349.
[19] Krans R L 1972 The history of physics in the education of physics teachers. *Physics Education* 7(58) 58–60. https://doi.org/10.1088/0031-9120/7/1/314
[20] Demirci N 2016 Teaching the history of science in physics classrooms – the story of the neutrino. *Physics Education 51(4)*. https://doi.org/10.1088/0031-9120/51/4/043003

Author's address: Róbert Károly Szabó, Eötvös Loránd University, PhD student, Budapest, Hungary Petőfi Sándor Evangélikus Óvoda, Általános Iskola, Gimnázium és Technikum, Kiskőrös, Hungary
e-mail: rszabo.elte@gmail.com

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2022 (51)

VZDELÁVANIE VO FYZIKE

Kovariancia vo fyzike – skaláry, vektory, ...

Aba Teleki

Abstract: A scalar quantity is a physical quantity given by a single number (and its physical dimension) that is the same for all observers. The type of physical quantity (scalar, vector, tensor) is determined by how the quantity behaves when passing from one frame of reference to another (when passing from one observer to another). Physical quantities are in relation to each other by physical laws. Physical laws then have the same form in all frames of reference, which is the content of general covariance.

Key words: scalars, vectors, covariance in physics

Súhrn: Skalárna veličina je fyzikálna veličina daná jedným číslom (a jeho fyzikálnym rozmerom), ktorá je rovnaká pre všetkých pozorovateľov. Typ fyzikálnej veličiny (skalár, vektor, tenzor) je určený tým, ako sa veličina správa pri prechode z jednej referenčnej sústavy do druhej (pri prechode od jedného pozorovateľa k druhému). Fyzikálne veličiny sú vo vzájomnom vzťahu podľa fyzikálnych zákonov. Fyzikálne zákony majú potom vo všetkých vzťažných sústavách rovnakú podobu, čo je obsahom všeobecnej kovariancie.

Kľúčové slová: skaláry, vektory, kovariancia vo fyzike

MESC: M50

Pokračovanie z OMFI 2022/03 (str. 33 - 39).

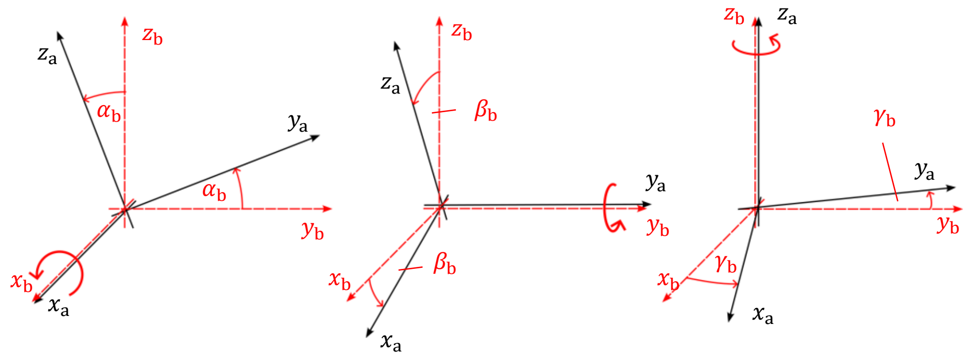
3.2 Vektory – vzájomne pootočení pozorovatelia – $\mathcal{T}_{\mathrm{r}}$

Laicky, *smer* a *pootočenie* úzko súvisia. Pozorovateľ má v bežnom živote určité prirodzené smery, ako *dopredu (dozadu), doprava (doľava), hore (dole)*. Môže sa ale stať, že dvaja rôzni pozorovatelia tieto smery nemajú totožné, lebo sú voči sebe *pootočení*.

Našim cieľom nie je filozoficky analyzovať najzákladnejšie pojmy používané vo fyzike, ale smerovať k významu *kovariancie*. Ak sú dvaja pozorovatelia voči sebe pootočení, existujú veličiny, ktoré vidia iným odlišným spôsobom. Kým doteraz uvažované transformácie dovolili o všetkých veličinách uvažovať ako o skalároch, *smer* sa pri otočení chová odlišne, nezachováva sa. To, čo pre jedného pozorovateľa je *dopredu*, pre iného môže byť *doprava*.

Za základný vzor nového typu veličiny zoberieme *posunutie* (posunutie z bodu A do bodu B), ktoré môžeme označiť $\boldsymbol{r}$. Všetky veličiny, ktoré sa transformujú pri otočení ako posunutie $\boldsymbol{r}$, nazveme vektormi.

Popíšeme pootočenia znova pomocou transformácií medzi vlastnými vzťažnými sústavami pozorovateľov.



***Obr. 1**: Pootočenia $\mathcal{S}_a$ v $\mathcal{S}_b$ popísané vzťahmi (6).*

Pozorovateľ $\mathcal{P}_a$ používa inerciálnu vzťažnú sústavu $\mathcal{S}_a$, kým pozorovateľ $\mathcal{P}_b$ používa inerciálnu vzťažnú sústavu $\mathcal{S}_b$ – tie sa vzájomne nepohybujú. Príslušné súradnicové systémy sú pravouhlé a pravotočivé, majú spoločný začiatok (tiež začiatok odpočtu času), ale sú vzájomne pootočené. Jedno z najjednoduchších pootočení je pootočenie okolo jednej z osí súradnicového systému, napríklad okolo osi x, o uhol α_b (meriame pootočenie v sústave $\mathcal{S}_b$)

$$
\begin{aligned}
&t_a = t_b, \\
&x_a = x_b, \\
&y_a = y_b \cos\alpha_b + z_b \sin\alpha_b\,, \qquad z_a = -y_b \sin\alpha_b + z_b \cos\alpha_b\,.
\end{aligned}
\tag{6a}
$$

Cyklickou zámenou $x \to y \to z \to x$ priestorových súradníc v oboch sústavách dostaneme jednoduché pootočenia okolo ostatných osí. Otočenie okolo osi y je daný vzťahmi

$$
\begin{aligned}
&t_a = t_b, \\
&y_a = y_b. \\
&z_a = z_b \cos\beta_b + x_b \sin\beta_b\,, \qquad x_a = -z_b \sin\beta_b + x_b \cos\beta_b\,,
\end{aligned}
\tag{6b}
$$

Otočenie okolo osi z je daný vzťahmi

$$
\begin{aligned}
&t_a = t_b, \\
&x_a = x_b \cos\gamma_b + y_b \sin\gamma_b\,, \qquad y_a = -x_b \sin\gamma_b + y_b \cos\gamma_b\,, \\
&z_a = z_b.
\end{aligned}
\tag{6c}
$$

Otočenia okolo osí x, y, z označíme postupne T_{rx}, T_{ry}, T_{rz}. Akékoľvek otočenie môžeme zložiť z týchto otočení. Jedno konkrétne otočenie označíme T_r, kým množinu všetkých otočení označíme $\mathcal{T}_r$. Otočenia $\mathcal{T}_r$ zrejme tvoria grupu s jednotkovým prvkom identického zobrazenia T_e. Inverzné prvky $T_{rx}^{-1}, T_{ry}^{-1}, T_{rz}^{-1}$ k otočeniam T_{rx}, T_{ry}, T_{rz} získame z rovníc (6), keď uhly pootočenia (α, β resp. γ) zameníme na opačné ($-\alpha, -\beta$ resp. $-\gamma$). Ak sme všeobecné otočenie realizovali postupnými otáčaniami napr. T_{rx}, T_{ry}, T_{rz}, inverzné pootočenie dostaneme postupnými opačnými pootočeniami realizovanými v prevrátenom poradí, tj. $T_{rz}^{-1}, T_{ry}^{-1}, T_{rx}^{-1}$.

Z linearity transformačných rovníc (6) jasne vyplýva, že pre posunutie z bodu A do bodu B, ktoré môžeme popísať v sústave $\mathcal{S}_b$ zmenou súradníc $\Delta x_b, \Delta y_b, \Delta z_b$, sa transformuje do $\Delta x_a, \Delta y_a, \Delta z_a$ rovnakými transformačnými rovnicami (6), ako samotné súradnice x_b, y_b, z_b, do x_a, y_a, z_a.

Linearita transformácií (6) má za dôsledok niekoľko jasných pravidiel:

1) Ak $\boldsymbol{u}$ sa transformuje ako vektor, a $\boldsymbol{v}$ sa transformuje ako vektor (teda obidva ako posunutie), potom veličina $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ sa tiež transformuje ako vektor (teda ako posunutie).
2) Ak s sa transformuje ako skalár a $\boldsymbol{u}$ sa transformuje ako vektor, potom $\boldsymbol{w} = s\boldsymbol{u}$ sa transformuje ako vektor.

Poznámka: tieto pravidlá musíme doplniť upozornením, že z fyzikálneho hľadiska môžeme hovoriť o súčte dvoch fyzikálnych veličín $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jedine vtedy, ak sa jedná o rovnaké fyzikálne veličiny (posunutie s posunutím, rýchlosť s rýchlosťou, sila so silou, atď.) a ich fyzikálne rozmery sú rovnaké – čo je podmienka nutná. Táto podmienka ale nie je postačujúca. Nezabudnime na to, že napr. práca (W) má rovnaký fyzikálny rozmer ($\mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$), ako moment sily ($\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$), ktorý ale nikdy nie nenazývame *joule*. ■

Nakoľko čas je naďalej skalárnou veličinou (netransformuje sa), okrem posunutia je vektorovou veličinou aj okamžitá rýchlosť $\boldsymbol{v}(t)$

$$\boldsymbol{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}, \tag{7}$$

lebo $\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$ je vektor na základe prvého pravidla, a násobenie skalárom $1/\Delta t$ zachováva vektorový charakter, ako aj limitný prechod $\Delta t \to 0$. Rovnakou argumentáciou je vektorom aj okamžité zrýchlenie $\boldsymbol{a}(t)$.

$$\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}. \tag{8}$$

Všimnime si, že vo veľmi triviálnej podobe práve využívame fyzikálnu kovarianciu. Pravé strany rovníc (7) a (8) sú vektormi, preto aj ľavé strany rovníc musia byť vektormi – vďaka rovnosti sa obidve strany rovností transformujú rovnakým spôsobom.

Mnohé veličiny zostávajú aj naďalej skalárnymi na základe jednoduchých úvah, že otočením vzťažnej sústavy sa ich hodnota nemení napr.:

hmotnosť, elektrický náboj, kinetická energia, potenciálna energia, teplota (termodynamickú teplotu definuje kinetická energia molekúl), atď.

Dôvody v mnohých prípadoch je ľahké pochopiť, ako uvidíme nižšie.

Sily, ktoré spôsobujú pohyb telies podľa Newtonovho pohybového zákona, sú na základe pravidla 2 (a princípu kovariancie) tiež vektormi

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}. \tag{9}$$

Veľmi veľa veličín je definovaných na základe ich silových účinkov. Napr. intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ – hovoríme, že na elektrický náboj q pôsobí prítomné elektrické pole intenzity $\boldsymbol{E}$ silou $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$.

Čisto z matematických vlastností transformácií (6) potom vyplynú ďalšie závery a to konkrétne:

3) Ak veličiny $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ sú vektory, potom ich skalárny súčin $s = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ definuje veličinu, ktorá sa transformuje ako skalárna veličina.
4) Ak veličiny $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ sú vektory, potom ich vektorový súčin $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ definuje veličinu, ktorá sa transformuje ako vektorová veličina.

Tieto tvrdenia na tomto mieste nebudeme dokazovať.

Teraz už veľkou istotou vieme menovať veličiny, ktoré sú skalárnymi veličinami vytvorenými z vektorových: veľkosti všetkých vektorových veličín sú skalárne veličiny (napr. veľkosť rýchlosti $v = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$), práca W (lebo $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$), elektrické napätie U medzi elektródami ($U = \boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{r}$). Preto je kinetická energia $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$ skalárna veličina, a preto je termodynamická teplota T tiež skalárna veličina (je definovaná kinetickou energiou molekúl).

Ak zoberieme do úvahy všetky doteraz spomenuté transformácie (identitu, posunutia a otočenia),obraz je nasledujúci:

1) skalármi sú tie veličiny, ktoré sa vyjadria jedným číslom (a dimenziou) a pri transformáciách nemenia svoju hodnotu: čas, hmotnosť, elektrický náboj, teplota, všetky veľkosti vektorov, všetky skalárne súčiny vektorov, prípadne aj ich kombinácie;
2) vektormi sú veličiny, ktoré sa transformujú ako **posunutie:** posunutie, rýchlosť, zrýchlenie, sila, intenzita elektrického poľa, indukcia magnetického poľa, ľubovoľným skalárom násobený vektor, vektorový súčin dvoch vektorov, atď.

3.2.1 Fyzikálna kovariancia na $\mathcal{T}_e \cup \mathcal{T}_\mathrm{t} \cup \mathcal{T}_\mathrm{r}$

Doteraz sme nespomenuli transformácie, ktoré spájajú vzťažné sústavy, ktoré sa voči sebe pohybujú. A práve vďaka tomuto obmedzeniu, tj. obmedzením sa na transformácie konštantného posunutia a otočenia (bez pohybu), tj. na $\mathcal{T}_e \cup \mathcal{T}_\mathrm{t} \cup \mathcal{T}_\mathrm{r}$, nám umožní pochopiť fyzikálnu kovarianciu z iného, menej známeho pohľadu.

Práca s číslami je menej abstraktná ako s vektormi samotnými, preto zavádzame bázové vektory. Ich číselné násobky potom kombinujeme do rôznych vektorov. Číselné násobky sú súradnicami príslušného vektoru, a je bežné pracovať práve s nimi namiesto vektorov.

Zaveďme pre pozorovateľa $\mathcal{P}_\mathrm{a}$ so vzťažnou sústavou $\mathcal{S}_\mathrm{a}$ (v ktorej máme pravouhlú súradnicovú sústavu), vektory $\boldsymbol{e}_{x\mathrm{a}}, \boldsymbol{e}_{y\mathrm{a}}$ a $\boldsymbol{e}_{z\mathrm{a}}$ jednotkovej dĺžky. Tieto po rade ukazujú v kladných smeroch osí $x_\mathrm{a}, y_\mathrm{a}$ a z_a. Každý vektor $\boldsymbol{V}$ môžeme jednoznačne vyjadriť vo forme (lineárnej) kombinácie jednotkových vektorov $\boldsymbol{e}_{x\mathrm{a}}, \boldsymbol{e}_{y\mathrm{a}}$ a $\boldsymbol{e}_{z\mathrm{a}}$ ako

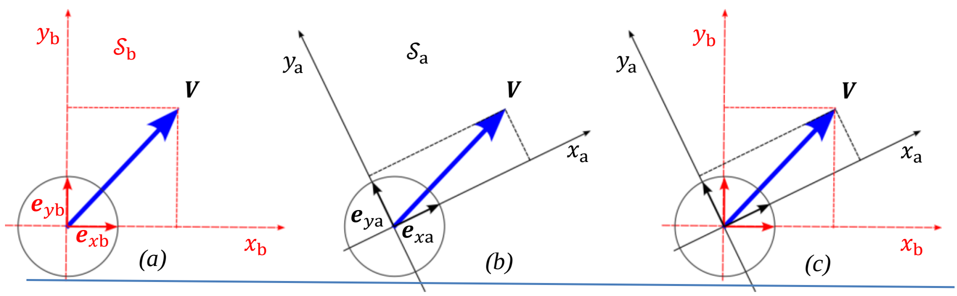
$$\boldsymbol{V} = V_{x\mathrm{a}}\boldsymbol{e}_{x\mathrm{a}} + V_{y\mathrm{a}}\boldsymbol{e}_{y\mathrm{a}} + V_{z\mathrm{a}}\boldsymbol{e}_{z\mathrm{a}}, \qquad (10a)$$

kde $V_{x\mathrm{a}}, V_{y\mathrm{a}}, V_{z\mathrm{a}}$ sú súradnice v báze $\boldsymbol{e}_{x\mathrm{a}}, \boldsymbol{e}_{y\mathrm{a}}$ a $\boldsymbol{e}_{z\mathrm{a}}$.

Rovnako môžeme zaviesť bázu jednotkových vektorov $\boldsymbol{e}_{x\mathrm{b}}, \boldsymbol{e}_{y\mathrm{b}}$ a $\boldsymbol{e}_{z\mathrm{b}}$ pre pozorovateľa $\mathcal{P}_\mathrm{b}$ so vzťažnou sústavou $\mathcal{S}_\mathrm{b}$. V uvedenom poradí ukazujú v kladnom smere osí $x_\mathrm{b}, y_\mathrm{b}, z_\mathrm{b}$. Aj ich pomocou vieme vyjadriť vektor $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{V} = V_{x\mathrm{b}}\boldsymbol{e}_{x\mathrm{b}} + V_{y\mathrm{b}}\boldsymbol{e}_{y\mathrm{b}} + V_{z\mathrm{b}}\boldsymbol{e}_{z\mathrm{b}}, \qquad (10b)$$

kde $V_{x\mathrm{b}}, V_{y\mathrm{b}}, V_{z\mathrm{b}}$ sú súradnice v báze $\boldsymbol{e}_{x\mathrm{b}}, \boldsymbol{e}_{y\mathrm{b}}$ a $\boldsymbol{e}_{z\mathrm{b}}$.



***Obr. 2**: Vektor je len jeden, avšak súradnice závisia od vzťažnej sústavy. (a) znázornenie v $\mathcal{S}_\mathrm{b}$, (b) v $\mathcal{S}_\mathrm{a}$ a spoločné znázornenie na obrázku (c).*

Používame komplikované značenie, aby sme mohli zdôrazniť nasledujúce.

Vektor $\boldsymbol{V}$ je ten istý vo vzťahu (10a) aj (10b).

Nehovoríme o vektore $\boldsymbol{V}_{\mathrm{a}}$ vo vzťažnej sústave $\mathcal{S}_{\mathrm{a}}$ a nehovoríme ani o vektore $\boldsymbol{V}_{\mathrm{b}}$ vo vzťažnej sústave $\mathcal{S}_{\mathrm{b}}$. Existuje len jeden vektor, a to vektor $\boldsymbol{V}$, ktorý nezávisí od žiadnej vzťažnej sústavy. To, čo závisí od vzťažnej sústavy $\mathcal{S}_{\mathrm{a}}$, alebo vzťažnej sústavy $\mathcal{S}_{\mathrm{b}}$, sú súradnice vektoru $\boldsymbol{V}$ v týchto sústavách. Tie definujú jednotkové vektory $\boldsymbol{e}_{x\mathrm{a}}, \boldsymbol{e}_{y\mathrm{a}}$ a $\boldsymbol{e}_{z\mathrm{a}}$ (v sústave $\mathcal{S}_{\mathrm{a}}$) a $\boldsymbol{e}_{x\mathrm{b}}, \boldsymbol{e}_{y\mathrm{b}}$ a $\boldsymbol{e}_{z\mathrm{b}}$ (v sústave $\mathcal{S}_{\mathrm{b}}$).

Práca so súradnicami vektorov dokáže natoľko zmeniť pohľad na fyziku, že tento jav David Hestenes[1] nazýva infekciou matematickým vírom. Podľa jeho prieskumu až 30 % fyzikov a inžinierov si nedokáže predstaviť riešenie fyzikálnych problémov iným spôsobom, než v nejakom súradnicovom systéme. Ilustrujeme to na jednom stredoškolskom príklade.

Malá guľa je vrhnutá pod uhlom $\alpha = 30°$ *v homogénnom gravitačnom poli so začiatočnou rýchlosťou* $v_0 = 50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. *Ako ďaleko doletí guľa na vodorovnom teréne, a po akú dobu letí? Gravitačné zrýchlenie* $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
Klasické riešenie úlohu rieši v pravouhlej súradnicovej sústave.

Súradnicové riešenie
Os y ukazuje proti smeru gravitačného poľa, a os x ukazuje v smere vodorovného pohybu. Pohyb je rovnomerne zrýchlený a v smeroch x a y je nezávislý. Poloha gule v okamihu t (výstrel v čase $t_0 = 0$)
$x(t) = v_0 t \cos\alpha,$
$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$
V okamihu dopadu t_1 je
$y(t_1) = 0$, teda $v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0$, odkiaľ
$t_1 = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = 5{,}1\ \mathrm{s}.$
Guľa doletí do vzdialenosti
$x_1 = x(t_1) = v_0 t_1 \cos\alpha = \frac{2 v_0^2}{g} \sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha) = 221\ \mathrm{m}.$

Úloha sa dá riešiť bez použitia konkrétneho súradnicového systému.

Vektorové riešenie
Gravitačné zrýchlenie homogénneho poľa je konštantný vektor $\boldsymbol{g}$, začiatočná rýchlosť gule je $\boldsymbol{v}_0$. Pohyb v homogénnom poli je rovnomerne zrýchlený pohyb

[1] David Hestenes, americký teoretický fyzik a didaktik, držiteľ Oerstedovej Medaily (2002 – [4]), ktorá sa udeľuje najlepším učiteľom fyziky v USA. Medzi nositeľmi Oerstedovej medaily sú známe osobnosti ako Richard P. Feynman, John A. Wheeler, Edwin F. Taylor, Carl E. Sagan, Carl Wieman a iní. Hestenes je známy ako jeden z hlavných architektov geometrickej algebry, jednotného jazyka pre matematiku a fyziku, a tiež ako zakladateľ situačných modelov, výskumného programu na reformu K–12 (Science, Technology).

a okamžitá poloha $\boldsymbol{r}(t)$ v čase t je daná zložením rovnomerného pohybu ($\boldsymbol{v}_0 t$) a rovnomerne zrýchleného pohybu ($^1/_2\, \boldsymbol{g}t^2$)
$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$.
Jediný fyzikálne významný smer je daný vektorom gravitačného zrýchlenia $\boldsymbol{g}$. Tento smer určuje zvislý smer. Na neho kolmá rovina je vodorovná rovina. Guľa dopadne späť na vodorovnú rovinu v okamihu t_1, keď jej polohový vektor $\boldsymbol{r}(t_1)$ je vodorovný, tj. keď je kolmý na $\boldsymbol{g}$:
$\boldsymbol{r}(t_1).\boldsymbol{g} = 0$.
Po dosadení
$\left(\boldsymbol{v}_0 t_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t_1^2\right)\cdot \boldsymbol{g} = \left(\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{g} + \frac{1}{2}g^2 t_1\right) t_1 = 0.$
Riešením je
$t_1 = -2\frac{\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{g}}{g^2} = -2\frac{v_0 g\cos\beta}{g^2} = -\frac{2v_0}{g}\cos\beta = 5{,}1\ \mathrm{s}$,
kde $\beta = 90° + \alpha = 120°$ je uhol, ktoré zvierajú vektor $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{v}_0$.
Vzdialenosť r_1, do ktorej guľa doletí, je daný polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t_1)$
$r_1 = \sqrt{\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_1} = t_1\sqrt{\left(\boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t_1\right)\cdot\left(\boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t_1\right)} = t_1\sqrt{v_0^2 + \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{g}t_1 + \frac{1}{4}g^2 t_1^2}$
V poslednom výraze využijeme toho, že $\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{g} = -\frac{1}{2}g^2 t_1$, čím dostaneme
$r_1 = t_1\sqrt{v_0^2 - \frac{1}{4}g^2 t_1^2} = -\frac{2v_0}{g}\cos\beta\sqrt{v_0^2(1-\cos^2\beta)} = -\frac{v_0^2}{g}\sin(2\beta) = 221\ \mathrm{m}.$

V riešení nebol využitý žiadny súradnicový systém, dokonca sa nedá poznať ani to, v koľko rozmernom priestore riešime úlohu. Nesnažili sme sa prezentovať príklad, kde vektorový prístup vedie zjavne k jednoduchšiemu riešeniu. Cieľom bolo ukázať, že zavedenie súradnicového systému nie je nevyhnutné. Fyzike vyjadrovanej bez súradnicových systémov sa v celej šírke venuje David Hestenes v [5] – publikácia je venovaná geometrickej algebre.

3.3 Zrkadlenia – $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$ – nie všetko čo má smer a veľkosť je vektor

V skutočnosti je tu ďalšia grupa transformácií, ktorá nepredstavuje pohyb – zrkadlenie.[2] Uvažovať ďalšie možnosti transformácií si vyžiada samotná príroda.

Definujme zrkadlenie $T_{\mathrm{m}x}$ podľa roviny yz predpisom

$$t_{\mathrm{a}} = t_{\mathrm{b}},\ \ x_{\mathrm{a}} = -x_{\mathrm{b}},\ \ y_{\mathrm{a}} = y_{\mathrm{b}},\ \ z_{\mathrm{a}} = z_{\mathrm{b}}, \tag{11a}$$

a postupne zrkadlenia $T_{\mathrm{m}y}$ resp. $T_{\mathrm{m}z}$ podľa rovín zx resp. xy predpismi

[2] Zrkadlenie je mimoriadne dôležité, čo pochopíme, keď zistíme, že otočenie okolo pevnej osi sa dá realizovať dvomi zrkadleniami, kde roviny zrkadlenia sa pretínaju v osi rotácie. Uvedené platí pre dvoj a viacrozmerné priestory tiež.

$$t_{\mathrm{a}} = t_{\mathrm{b}},\ \ x_{\mathrm{a}} = x_{\mathrm{b}},\ \ y_{\mathrm{a}} = -y_{\mathrm{b}},\ \ z_{\mathrm{a}} = z_{\mathrm{b}}, \tag{11b}$$

$$t_{\mathrm{a}} = t_{\mathrm{b}},\ \ x_{\mathrm{a}} = -x_{\mathrm{b}},\ \ y_{\mathrm{a}} = y_{\mathrm{b}},\ \ z_{\mathrm{a}} = -z_{\mathrm{b}}. \tag{11c}$$

Zrkadlenia môžeme definovať mnohými spôsobmi, pre naše účely teraz postačí zadefinovať ešte zobrazenie $T_{\mathrm{ms}} = T_{\mathrm{m}x} \circ T_{\mathrm{m}y} \circ T_{\mathrm{m}z}$ podľa bodu (tu začiatku $O_{\mathrm{a}} \equiv O_{\mathrm{b}}$)

$$t_{\mathrm{a}} = t_{\mathrm{b}},\ \ x_{\mathrm{a}} = -x_{\mathrm{b}},\ \ y_{\mathrm{a}} = -y_{\mathrm{b}},\ \ z_{\mathrm{a}} = -z_{\mathrm{b}}. \tag{11d}$$

Všetky možné zrkadlenia $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$ tvoria (tzv. ortogonálnu) grupu. Do podrobností ale nepotrebujeme zachádzať.

Fyzikálne javy popisujeme fyzikálnymi veličinami, a tie modelujeme matematickými objektmi. Aby bolo modelovanie verné, fyzikálne veličiny a ich matematické modely (ktoré tiež často nazývame len fyzikálnymi veličinami) musia mať rovnaké transformačné vlastnosti.

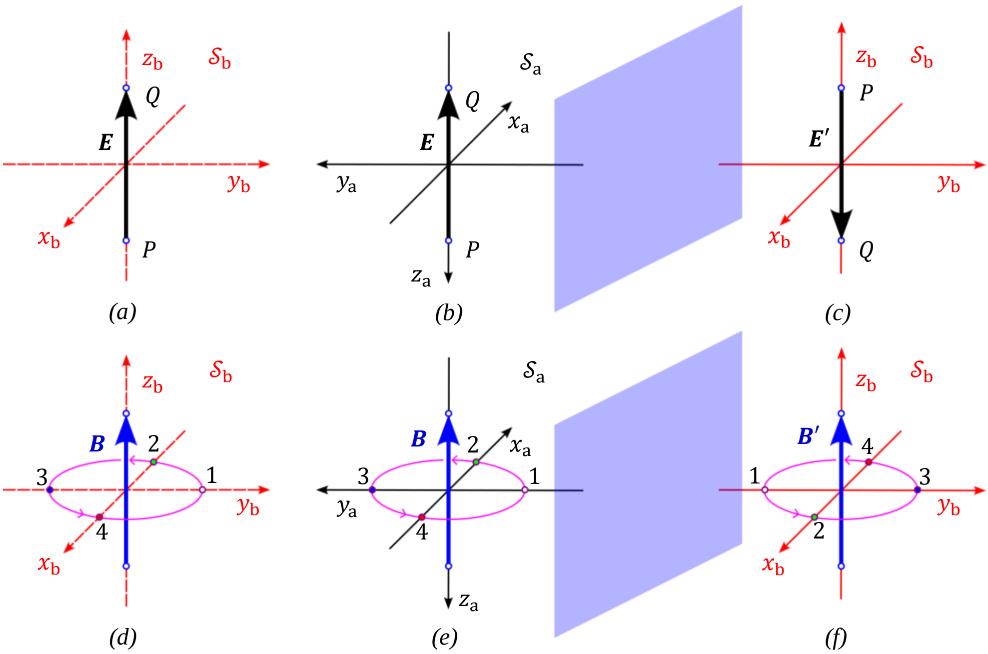
Zavedieme teraz, pre jednoduchšie vyjadrovanie sa, pojem **pasívnej transformácie** a pojem **aktívnej transformácie.**

Pasívna transformácia

Všetko, čo sme doteraz popisovali sa týkalo *pasívnej transformácie*. Pasívna transformácia sa týka vždy jednej a *tej istej* fyzikálnej reality, pre ktorú ale zavedieme viac súradnicových systémov ($\mathcal{S}_{\mathrm{a}}$ a $\mathcal{S}_{\mathrm{b}}$), pozeráme sa na konkrétnu fyzikálnu realitu očami viacerých pozorovateľov (tu dvoch: $\mathcal{P}_{\mathrm{a}}$ a $\mathcal{P}_{\mathrm{b}}$). Popis sa deje pomocou súradnicových systémov, ktoré nie sú skutočné – sú len myslenou sieťou čiar a plôch, ktoré pomáhajú v popise pomocou *súradníc*. Transformáciu medzi týmito umelo zavedenými súradnicami nazývame **pasívnou transformáciou**. Pasívna transformácia nemá vplyv na fyzikálnu realitu, jedine na popis fyzikálnej reality. Fyzikálna realita nemôže závisieť od voľby konkrétneho súradnicového systému.

Aktívna transformácia

Aktívna transformácia sa vždy týka *dvoch rôznych fyzikálnych realít*. Jednu zobrazuje verne na druhú. Napr., kocku, ktorá existuje vo fyzikálnom svete, môžeme skutočne posunúť, a skutočne pootočiť, tj. vieme jej pomocou vytvoriť novú realitu. Zmenu, ktorú vytvárame môžeme chápať ako transformáciu. Jednu realitu vieme zobraziť na druhú. Takúto transformáciu nazývame **aktívnou transformáciou.**[3]



***Obr. 3**: ľavé dvojice obrázkov (a, b resp. d, e) predstavujú ten istý systém v dvoch rôznych vzťažných sústavách (pasívne transformácie). Obrázky vpravo sú iným systémom, ktoré vznikli aktívnou transformáciou (aktívnym zrkadlením): (c) je aktívnym zrkadlením (a), resp. (f) je aktívnym zrkadlením (d).*

Ak matematický model fyzikálnej veličiny nebol zvolený dobre, matematický model fyzikálnej veličiny sa transformuje pri pasívnej transformácii inak, ako samotná fyzikálna veličina pri príslušnej aktívnej transformácii.

O transformačných vlastnostiach rozhoduje samotný fyzikálny jav. Príklad je znázornený na obr. 3.

V hornom rade obrázkov (*a* až *c*) je intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ vytvorená v začiatku bodovými nábojmi v bodoch P (kladný) a Q (záporný). V sústave $\mathcal{S}_\mathrm{b}$ (obr. 3a) ju môžeme popísať pomocou jednotkového vektoru $\boldsymbol{e}_{\mathrm{zb}}$ ako

$$\boldsymbol{E} = E_{zb}\boldsymbol{e}_{\mathrm{zb}} = E\boldsymbol{e}_{\mathrm{zb}} \tag{12a}$$

kde E je veľkosť intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$. V sústave $\mathcal{S}_\mathrm{a}$, ktorú spája so sústavou $\mathcal{S}_\mathrm{b}$ pasívna transformácia (11d) píšeme tú istú intenzitu elektrického poľa (tiež v začiatku) ako

[3] Keby sme chceli použiť povrchnú analógiu, potom pasívnou transformáciou je, keď v danom meste premenujú ulice, kým aktívnou transformáciou je, ak zbúrajú domy, aby rozšírili niektoré ulice.

$$\boldsymbol{E} = E_{za}\boldsymbol{e}_{za} = -E\boldsymbol{e}_{za}, \tag{12b}$$

lebo $E_{za} = -E_{zb}$, súradnice sa líšia, ale vektor $\boldsymbol{E}$ je ten istý, lebo sa jedná o tú istú fyzikálnu realitu (obr. 3b).

Na obr. 3b je však iná fyzikálna realita. Vo vzťažnej sústave $\mathcal{S}_b$ sme vymenili polohu bodových nábojov P a Q, pričom veľkosti nábojov sú rovnaké, ako aj vzdialenosti medzi nimi. Táto výmena predstavuje aktívnu transformáciou, preto príslušný vektor intenzity elektrického poľa sme označili $\boldsymbol{E}'$. Vo vzťažnej sústave $\mathcal{S}_b$ píšeme

$$\boldsymbol{E}' = E'_{zb}\boldsymbol{e}_{zb} = -E'\boldsymbol{e}_{zb} = -E\boldsymbol{e}_{zb}, \tag{12c}$$

kde $E' = E$ je veľkosť vektoru intenzity elektrického poľa v začiatku.

Vidíme, že výsledok aktívnej transformácie je rovnaký, ako výsledok pasívnej transformácie. Obdobný výsledok by sme získali aj v prípade vektoru posunutia $\boldsymbol{r}_{PQ}$ z bodu P do bodu Q, preto intenzita elektrického poľa sa transformuje ako vektor.

Iná je ale situácia v prípade indukcie magnetického poľa – meraného tiež v začiatku súradnicových systémov. Indukcia magnetického poľa (obr. 3d) je vytvorené tokom elektrického prúdu vo vodiči kružnicového tvaru, ktorý leží v rovine xy. Na vodiči sme pre názornosť označili body 1,2,3,4 a elektrický prúd tečie tak, že kladné nosiče nábojov postupne prechádzajú bodmi 1-2-3-4-1. V tomto prípade vznikne v začiatku súradnicového systému magnetické pole s indukciou $\boldsymbol{B}$, ktoré smeruje (podľa Biotovho-Savartovho zákona) v smere, ako ukazuje obr. 3d. Vo vzťažnej sústave $\mathcal{S}_b$ môžeme písať

$$\boldsymbol{B} = B_{zb}\boldsymbol{e}_{zb} = B\boldsymbol{e}_{zb}. \tag{12d}$$

Obr. 3e ukazuje tú istú fyzikálnu situáciu po pasívnej transformácii (11d). Pasívna transformácia samozrejme nemení polohy fyzických bodov vodiča (napr. bodov 1,2,3,4), ani smer obiehania nosičov elektrického prúdu – magnetické pole zostáva to isté, len jeho vyjadrenie v báze vzťažnej sústavy $\mathcal{S}_a$ je iné

$$\boldsymbol{B} = B_{za}\boldsymbol{e}_{za} = -B\boldsymbol{e}_{za}. \tag{12e}$$

Po porovnaní vidíme, že pri pasívnej transformácii sa indukcia magnetického poľa $\boldsymbol{B}$ transformuje ako aj intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ a posunutie $\boldsymbol{r}_{PQ}$, tj. ako vektor, lebo $B_{za} = -B_{zb}$.

Magnetické pole sa chová ale odlišne pri príslušnej aktívnej transformácii, ktorú ukazuje obr. 3f. V tomto prípade zrkadlíme body vodiča, ktorý leží v rovine xy, čím pomocné číslované body sa transformujú nasledovne $1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 1, 4 \to 1$. Kladné nosiče nábojov aj po aktívnej transformácii prebiehajú cez číslované body v poradí 1-2-3-4-1. Zmysel obiehania sa teda nezmenil ani po aktívnej transformácii, preto prúd indukuje rovnaké magnetické pole $\boldsymbol{B}'$ aké pole indukovalo aj pred aktívnou transformáciou, teda $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}.$ Vo vzťažnej sústave $\mathcal{S}_\mathrm{b}$ je po aktívnej transformácii

$$\boldsymbol{B}' = B'_{\mathrm{zb}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{zb}} = B'\boldsymbol{e}_{\mathrm{zb}} = B\boldsymbol{e}_{\mathrm{zb}}. \tag{12e}$$

Indukcia magnetického poľa $\boldsymbol{B}$ sa pri aktívnej transformácii netransformuje ako intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}$, či posunutie $\boldsymbol{r}_{PQ}$ – indukcia $\boldsymbol{B}$ magnetického poľa sa nechová ako vektor.

K rovnakému výsledku by sme sa dopracovali aj v prípade momentu sily $\boldsymbol{M}$, či momentu hybnosti $\boldsymbol{J}$.

V trojrozmernom priestore majú tieto veličiny tri nezávislé zložky, ktorým môžeme pripísať smer aj veľkosť. V mnohých situáciách sa chovajú ako vektory, ale pri zrkadleniach nie. Nie sú to teda vektory! Kvôli ich podobnosti vektorom ich však často nazývajú *pseudovektormi* či *axiálnymi vektormi*. Skutočné vektory sa potom nazývajú aj *polárnym vektorom*. Túto terminológiu ale nebudeme používať, lebo ich budeme popisovať pomocou *tenzorov*.

Situácia, ako sa rozhodnúť o fyzikálnej veličine, či je skalár, alebo vektor, sa zdá byť, v tomto okamihu, rozuzlená pomocou transformačných vlastností.

Skalármi sú hmotnosť, elektrický náboj, čas a veličiny vytvárané z vektorových veličín pomocou skalárneho súčinu (kinetická energia, teplota, práca,...).

Vektormi sú posunutie, rýchlosť, zrýchlenie, hybnosť, intenzita elektrického poľa a veličiny vytvárané ako súčin skaláru a vektorovej veličiny.

Tenzormi sú potom napríklad moment hybnosti, moment sily, indukcia magnetického poľa a veličiny vytvárané z vektorových veličín pomocou vektorového súčinu (matematické detaily sme na tomto mieste neuviedli).

Poznámka: ak veličiny $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ sú vektormi, potom veličina $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ už nie je vektorom kvôli vlastnostiam pri zrkadlení (pri zrkadlení menia súradnice vektorov znamienko, z $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ vyplýva, že súradnice $\boldsymbol{c}$ znamienko nemenia). Veličiny vytvárané z vektorového súčinu dvoch vektorov sú pseudovektory. Problematika pseudovektorov sa vyrieši zavedením tenzorov (konkrétne antisymetrických tenzorov druhého rádu).

Postupným rozširovaním možných pozorovateľov (a tým transformácií, ktorými sa spájajú), sa nám veličiny rozdelili do uvedených tried. Problém nastáva pri ďalšom rozšírení možnej triedy pozorovateľov na tých, ktorí používajú opačný chod času (zrkadlenie času). Zrkadlenie času realizuje zobrazenie $T_{\mathrm{m}t}$

$$t_\mathrm{a} = -t_\mathrm{b}, \;\; x_\mathrm{a} = x_\mathrm{b}, \;\; y_\mathrm{a} = y_\mathrm{b}, \;\; z_\mathrm{a} = z_\mathrm{b}. \tag{13}$$

Mení znamienko času pri pasívnej transformácii, ako aj odstupu času medzi udalosťami P a Q: $\Delta t_{\mathrm{PQa}} = t_{Q\mathrm{a}} - t_{P\mathrm{a}} = -\Delta t_{\mathrm{PQb}} = -(t_{Q\mathrm{b}} - t_{P\mathrm{b}})$. Vďaka tomu, prísne vzaté, čas nie je skalár, ale pre formálnu záchranu (ako v prípade vektorov) sa zavádza pojem *pseudoskalár*. Pseudoskalár sa chová v mnohých prípadoch ako skalár, ale pri zrkadlení mení svoje znamienko (skalárny súčin vektoru a pseudovektoru je pseudoskalár). ■

3.4 Galileiho transformácia

Galileiho transformácia je pravdepodobne dôvodom, prečo pri definícií skalárov a vektorov sa neopiera o transformačné vlastnosti, ale formálnu definíciu „vektor má smer a veľkosť".

Galileiho transformácia (tzv. *boost-y*) spájajú dve vzájomne rovnomerne a priamočiaro sa pohybujúce inerciálne vzťažné sústavy $\mathcal{S}_\mathrm{a}$ a $\mathcal{S}_\mathrm{b}$. Rýchlosť $\mathcal{S}_\mathrm{a}$ voči $\mathcal{S}_\mathrm{b}$ meranej vo vzťažnej sústave $\mathcal{S}_\mathrm{b}$ označíme $\boldsymbol{v} = v_{x\mathrm{b}}\boldsymbol{e}_{x\mathrm{b}} + v_{y\mathrm{b}}\boldsymbol{e}_{y\mathrm{b}} + v_{z\mathrm{b}}\boldsymbol{e}_{z\mathrm{b}}$, pričom príslušné osi vzťažných sústav sú si vzájomne rovnobežné ($x_\mathrm{a} \parallel x_\mathrm{b}, y_\mathrm{a} \parallel y_\mathrm{b}, z_\mathrm{a} \parallel z_\mathrm{b}$)

$$t_\mathrm{a} = t_\mathrm{b}, \tag{14a}$$
$$x_\mathrm{a} = x_\mathrm{b} + v_{x\mathrm{b}} t_\mathrm{b}, \tag{14b}$$
$$y_\mathrm{a} = y_\mathrm{b} + v_{y\mathrm{b}} t_\mathrm{b}, \tag{14c}$$
$$z_\mathrm{a} = z_\mathrm{b} + v_{z\mathrm{b}} t_\mathrm{b}. \tag{14d}$$

Galileiho transformáciou prichádza viac problémov s vektormi a ich skalárnymi súčinmi. Napríklad kinetická energia $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ sa už nechová ako skalár. Jej hodnota závisí od vzťažnej sústavy, v ktorej ju vyjadríme. Koncepcia kovariancie tak vyžaduje zásadnejšie riešenie. Vyžaduje relativistický prístup, z ktorého pohľadu budeme vidieť príčiny problémov Galileiho transformácie.

(*Dokončenie v nasledujúcom čísle.*)

L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s

[1] J. Vachek, M. Bednařík, K. Klobušický, J. Maršák, J. Novák, *Fyzika pre 1. ročník gymnázia*, SPN Bratislava, 1991

[2] O.D. Jefimenko: *Electricity and Magnetism, An Introduction to the theory of Electric and Magnetic Fields*, 2nd edition, Electret Scientific Company, Star City, ISBN: 0-917-1989; (dostupný tiež online: https://www.pdfdrive.com/electricity-and-magnetism-an-introduction-to-the-theory-of-electric-and-magnetic-fields-e156845389.html)

[3] A. Teleki, B. Lacsný, Medzinárodná sústava jednotiek (SI), in: *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, vol 48, num 2, pp 15-23, ISSN 1335-4981, 2019.

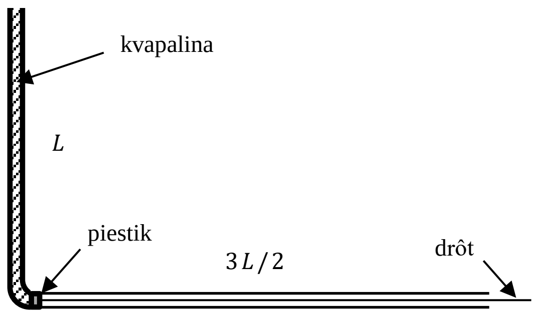
[4] D. Hestenes: Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the mathematical language of physics, *American Journal of Physics* 71, 104 (2003); https://doi.org/10.1119/1.1522700

[5] D. Hestenes: *New Foundations for Classical Mechanics (Second Edition)*, Kluwer Academic Publisher, New York, 1999, e-ISBN 0-306-47122-1.

Adresa autora: Aba Teleki, Schurmannova 27, 949 01 Nitra,
e-mail: JSMFteleki@gmail.com

Texty úloh 1. kola 64. ročníka Fyzikálnej olympiády (šk. r. 2022-2023) kategórie B, C, D, úlohy 5 až 7

Kategória B



Obr. B–4

5. Uvoľnená zátka

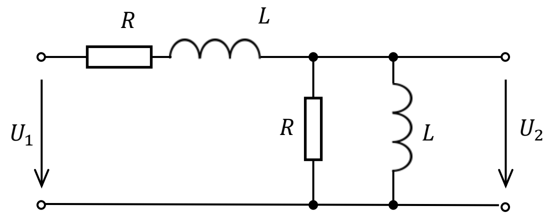
Rúrka s hladkou vnútornou stenou s konštantným vnútorným priemerom je ohnutá do pravého uhla, obr. B–4. Zvislá časť rúrky má dĺžku $L = 20\ \mathrm{cm}$, vodorovná dĺžku $3L/2$. Na začiatku je zvislá časť rúrky naplnená kvapalinou, ktorá je v tomto stave udržiavaná piestikom s hmotnosťou podstatne menšou ako hmotnosť kvapaliny v trubici. O piestik sa opiera tenký drôt, ktorý drží piestik v začiatočnej polohe.

V určitom okamihu sa drôt rýchlo vytiahne, čím sa piestik uvoľní a začne sa pod tlakom kvapaliny v rúrke pohybovať.

Predpokladajte, kvapalina i piestik sa pohybujú v trubici bez trenia.

a) Odvoďte vzťahy pre posunutie x piestika a rýchlosť v piestika ako funkcie času t počas jeho pohybu v rúrke.
b) Určte čas t_1, za ktorý kvapalina vytečie zo zvislej časti rúrky, rýchlosť v_1 piestika v tomto okamihu, a čas t_2, za ktorý dosiahne piestik koniec rúrky. Určte rýchlosť v_2, ktorú bude mať piestik na konci rúrky.
c) Zostrojte graf posunutia x a rýchlosti v piestika počas jeho pohybu vo vodorovnej časti trubice ako funkciu času.
d) Uvedený príklad je idealizovaný. V skutočnosti piestik nenadobudne rýchlosť v_1 a $v_2 < v_1$. Vysvetlite príčinu rozdielu reálneho a idealizované prípadu.

6. RL filter



Obr. B–5

Na obr. B–5 je schéma frekvenčného LR filtra, ktorý slúži na potlačenie určitej časti frekvenčného spektra signálu. Na vstup je privedený signál, napr. zvukovej nahrávky, ktorý obsahuje frekvenčné zložky striedavého napätia vrátane rušivých signálov (šum, rušivé napätia s frek–venciu siete, apod.).

a) Určte amplitúdovú $A_U(\omega) = U_2/U_1$ a fázovú $\varphi_U(\omega) = \varphi_2 - \varphi_1$ prenosovú funkciu filtra ako funkciu uhlovej frekvencie ω a pomeru $p = L/R$.

b) Určte hodnotu p_1 pomeru p, aby potlačenie sieťovej frekvencie $f_1 = 50$ Hz bolo 30 dB (decibelov), tzn. $A_{U\mathrm{dB}} = 20 \log A_U(\omega_1) = -30$ dB.

c) Zostrojte graf prenosových funkcií A_U a φ_U ako funkcií frekvencie f pre hodnotu p_1 určenú v časti b) Na zvislej osi vyneste v prvom prípade prenos $A_{U\mathrm{dB}}$ v decibeloch, v druhom φ_U v radiánoch, a na vodorovnú os v oboch prípadoch frekvenciu f v logaritmickej mierke.
Z grafu určte frekvenciu f_m, pri ktorej je prenos A_U maximálny, hodnotu prenosu v dB a fázový prenos φ_U pri frekvencii f_m. Overte prenos pri frekvencii f_1.

Pre riešenie odporúčame komplexnú symbolickú metódu, s ktorou sa môžete oboznámiť napr. na internete. Pri zostrojení grafu odporúčame použiť semi-logaritmický papier (jedna os logaritmická a jedna lineárna). Pri zostrojení grafu využite vhodný softvér, napr. MS EXCEL.

7. Fotometria

Vnímanie svetla ľudským okom je jedným z najdôležitejším informačným kanálom, ktorým komunikujeme s okolitým i vzdialeným svetom. Na posudzovanie zdrojov a účinkov svetla z pohľadu citlivosti ľudského oka slúži súbor veličín a zákonov – fotometria.

a) Preštudujte si základy fotometrie, zistite čo vyjadrujú veličiny *žiarivý tok*, *svetelný tok*, *svetelná účinnosť*, *svietivosť* a *osvetlenosť* a uveďte ich jednotky.

Pre zdravie zraku je vhodné dbať na správne osvetlenie priestorov, v ktorých vykonávame rôzne činnosti. Pri práci, na ktorú sa treba sústrediť, alebo na čítanie je odporúčaná osvetlenosť (intenzita osvetlenia) 300 – 500 lx.
Pri voľbe osvetľovacieho telesa hľadíme aj na úspornosť.

Osvetlenosť závisí od polohy osvetľovacieho telesa a úspornosť od voľby druhu telesa (obyčajná vákuová žiarovka, halogénová žiarovka, LED žiarovka a pod.).

Úlohy merania:

1. Zmerajte osvetlenosť od rôznych zdrojov svetla v rovnakej vzdialenosti od detektora.
2. Zmerajte závislosť osvetlenia od vzdialenosti od zdroja svetla.
3. Zmerajte uhlovú charakteristiku jasu rôznych zdrojov svetla.
4. Zmerajte závislosť osvetlenosti plochy od uhla dopadu svetla na túto plochu.
5. Zmerajte efektívnosť rôznych zdrojov svetla.

Pomôcky:
Najmenej dva rôzne zdroje svetla – odporúčame vláknovú žiarovku a LED žiarovku na napätie 24 V (možno zakúpiť v predajni s autodielmi), zdroj napájania 24 V, multimeter, vhodný stojan na upevnenie zdroja svetla, detektor osvetlenosti (luxmeter) – odporúča sa aplikácia *luxmeter* pre smartfón, meradlo dĺžky.

Metóda:
Upevnite zdroj svetla do vhodného držiaku (napr. stojan), aby rovnobežné lúče dopadali kolmo na stenu vo vzdialenosti 1 až 2 m. Do miesta maximálnej osvetlenosti umiestnite luxmeter. Pri prvom meraní do držiaka postupne umiestnite rôzne zdroje a pre každý odmerajte osvetlenosť. V druhom meraní vyberte jeden zdroj a postupne ho posúvajte smerom k detektoru. Pre jednotlivé vzdialenosti zmerajte osvetlenosť luxmetra. V treťom meraní otáčajte zdroj okolo zvislej osi tak, aby zdroj zostával na rovnakom mieste. Pre jednotlivé uhly natočenia zmerajte osvetlenosť luxmetrom, ktorý zostáva na rovnakom mieste. Pri štvrtom meraní mieri zdroj svetla na luxmeter. Ten postupne natáčajte voči smeru dopadu svetla a merajte údaj luxmetra. V piatom meraní použite postupne rôzne žiarovky v rovnakej vzdialenosti od luxmetra. Zmerajte prúd žiarovky a napätie na žiarovke, určte elektrický príkon. Potom zmerajte osvetlenosť luxmetrom a určte pomer osvetlenosti a príkonu žiarovky.

Všetky zmerané závislosti vyneste do grafov a priebehy porovnajte s teoretickou závislosťou osvetlenosti v druhom prípade $E \sim 1/r^2$ a v štvrtom prípade $E \sim \cos\alpha$.

Pre jednotlivé zdroje svetla určte uhlovú šírku vyžarovania svetla jednotlivých zdrojov na úrovni poklesu osvetlenosti na 50 % hodnoty pri nulovom uhle. V poslednom prípade posúďte úspornosť jednotlivých zdrojov svetla.

Kategória C

5. Balón s héliom

Výskumný balón je vyrobený z pružného materiálu neprepúšťajúceho plyn. Hmotnosť obalu balóna $m_1 = 400$ kg. Balón naplnili héliom a vybavili meracími prístrojmi. Hmotnosť záťaže $m_2 = 225$ kg.

Pri vypúšťaní bol atmosférický tlak pri zemi $p_0 = 103$ kPa a teplota prostredia i balóna $t_0 = 17$ °C. Po uvoľnení začal balón stúpať a vysielal informáciu o výške. Zastavil sa vo výške $h_1 = 3\,500$ m.

a) Určte tlak vzduchu p_1 vo výslednej výške, ak predpokladáme, že teplota atmosféry je konštantná a rovná teplote t_0.
b) Určte priemer d_1 balóna a hmotnosť m_{He} hélia v balóne.
c) Určte pomer $\eta = V_1/V_0$ objemu V_1 balóna vo výške h_1 a objemu V_0 v mieste štartu.

Predpokladajte, že balón má počas stúpania tvar gule a vplyv napätia v materiáli balóna má na tlak vo vnútri balóna zanedbateľný vplyv. Objem záťaže je podstatne menší ako objem balóna.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty: molárna hmotnosť vzduchu $M_{\mathrm{vz}} = 29{,}0\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ a hélia $M_{\mathrm{He}} = 4{,}0\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, molárna plynová konštanta $R = 8{,}31\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$, tiažové zrýchlenie $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

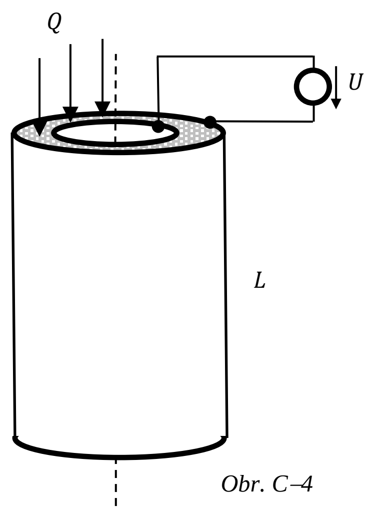
Pomôcka.: Pozrite si na internete stránku
https://sk.wikipedia.org/wiki/Atmosf%C3%A9rick%C3%BD_tlakhttps://sk.wikipedia.org/wiki/Atmosférický_tlak.

6. Prietokový ohrievač

Na obr. C–4 je znázornený jednoduchý prietokový ohrievač vody. Voda prúdi medzi dvomi vodivými koaxiálnymi rúrami s polomermi $r_1 = 20$ mm a $r_2 = 22$ mm, a s dĺžkou $L = 50$ cm.

Rúry sú pripojené na zdroj napätia $U_1 = 120$ V.

a) Určte prúd I, ktorý prechádza zdrojom.
b) Do ohrievača sa privádza voda s teplotou $t_1 = 20$ °C. Určte objemový prietok q_1 vody ohrievačom, aby z neho



Obr. C–4

vytekala voda s teplotou $t_2 = 40\ °\mathrm{C}$ na umývanie.

c) Určte napätie U_2 zdroja, aby pri prietoku q_1 sa voda zohriala na teplotu $t_3 = 90\ °\mathrm{C}$, potrebnú na prípravu čaju alebo kávy.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre dané hodnoty. Uvažujte konduktivitu vody $50\ \mathrm{mS \cdot m^{-1}}$, zvyšné hodnoty veličín vyhľadajte vo fyzikálnych tabuľkách.
Straty tepla vedením do okolia neuvažujte.

7. Valivý odpor

Pri valivom pohybe zvyčajne predpokladáme, že nedochádza k strate mechanickej energie telesa, tzn. valivý pohyb telesa po vodorovnej podložke je rovnomerný. V skutočnosti ale aspoň k malej strate mechanickej energie dochádza, väčšinou premenou na vnútornú energiu telesa a podložky. Valivý odpor kolesa na vodorovnej podložke vyjadruje vzťah

$$F_\mathrm{v} = \frac{\xi}{R} F_\mathrm{N}$$

kde ξ sa nazýva rameno valivého odporu, R je vonkajší polomer kolesa a F_N tlaková sila podložky kolmá na podložku. Pomer ξ/R sa nazýva koeficient valivého odporu.

Úloha:

Úlohou je určiť rameno valivého odporu valca na rôznych podložkách.

Metóda:

Na meranie použite ako zdroj konštantnej sily naklonenú rovinu. Použite dosku s uhlom sklonu $\alpha = 30°$ a dĺžkou aspoň $L \approx 1$ m. Na meranie použite valec s priemerom okolo 10 cm (drevený, sklenený, kovový).

1. Zmerajte hmotnosť m a polomer R valca, dĺžku L a uhol α sklonu naklonenej roviny.
2. Vypočítajte teoretickú hodnotu času t_0 pohybu valca po celej dĺžke naklonenej roviny a rýchlosť v_0 na dolnom konci naklonenej roviny za predpokladu nulového valivého odporu.
3. Zmerajte čas t_1 pohybu valca po naklonenej rovine a vypočítajte rýchlosť v_1 valca na dolnom konci naklonenej roviny. Z rozdielu rýchlostí v_0 a v_1 určte silu $F_{\mathrm{v}1}$ valivého odporu. Rameno valivého odporu ξ_1 valca na danej podložke vyjadrite pomocou časov t_0 a t_1.
4. Na naklonenú rovinu pripevnite tenký textilný pás (tak aby sa pri pohybe valca neposúval) a meranie z bodu 2. opakujte. Určte rameno valivého odporu ξ_2 v tomto prípade.

5. Meranie opakujte s iným druhom materiálu na povrchu naklonenej roviny, napr. pás z gumy, papieru, plastu a pod.

Porovnajte získané hodnoty ramena valivého odporu pre rôzne typy kontaktu materiálov kolesa a podložky.

Merania s každou podložkou niekoľkokrát opakujte a výsledky štatisticky vyhodnoťte.

Predpokladajte, pohyb valca po naklonenej rovine je rovnomerne zrýchlený. Dbajte na to, aby valec neprekĺzaval.

Pozn.: Moment zotrvačnosti plného homogénneho valca $J = \frac{1}{2}\, mR^2$, pre tenkostenný dutý valec $J = mR^2$, *pre hrubostenný dutý valec (s vnútorným polomerom* r*)* $J = \frac{1}{2}\, m(R^2 + r^2)$. *Moment zotrvačnosti sú vyjadrené vzhľadom na os valcov.*

Kategória D

5. Eskalátor

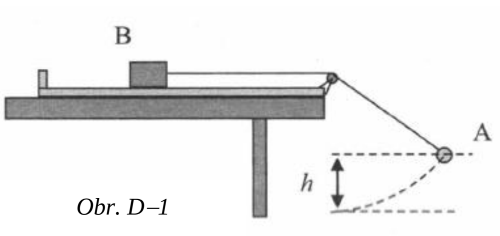
Dvaja kamaráti išli z hlbokého metra po pohyblivých schodoch (eskalátore) smerom nahor. Keď boli v polovici schodov, prehodili svoje tašky na opačný pás, ktorý išiel smerom dole. Obaja sa rozbehli po schodišti, jeden nahor, druhý nadol. Keď dobehli na koniec schodov, prebehli na druhé schody a pokračovali v behu k taškám.

Eskalátor sa pohyboval rýchlosťou u. Na stojacom eskalátore by chlapci bežali smerom nahor rýchlosťou v_1 a smerom nadol rýchlosťou v_2.

a) Nájdite vzťah medzi rýchlosťami v_1, v_2 a u, aby chlapci dobehli k taškám súčasne, jeden zdola, druhý zhora, skôr ako taška dorazí k dolnému koncu eskalátora.
b) Určte vzdialenosť d od dolného konca eskalátora, v ktorej môžu chlapci dostihnúť tašky, ak sú splnené podmienky podľa časti a). Riešte všeobecne.
c) Riešte časť b) pre hodnoty $L = 30$ m,

   i. $v_1 = v_2 = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, u = 1{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,
   ii. $v_1 = v_2 = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, u = 1{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,
   iii. $v_1 = 1{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, v_2 = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, u = 0{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,
   iv. $v_1 = 1{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, v_2 = 1{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, u = 0{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

6. Hranol na stole



Obr. D–1

Na vodorovnom povrchu stola je položený hranol B s hmotnosťou $M = 250$ g. Cez pevnú kladku je hranol spojený pevným vláknom so závažím A. Časť vlákna medzi kladkou a závažím má dĺžku $L = 50$ cm. Závažie vychýlime zo zvislej polohy do výšky $h = 20$ cm a uvoľníme, obr. D–1.

a) Prekreslite obr. D–1 so závažím v najvyššej a v najnižšej polohe svojej trajektórie a na obrázku zakreslite sily, ktoré pôsobia na telesá A a B v oboch polohách závažia, ak predpokladáme, že teleso B sa nepohybuje. Jednotlivé sily opíšte.
b) Určte maximálnu hodnotu m_{max} závažia, aby sa pri jeho pohybe na vlákne teleso B na stole neprešmyklo.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre dané hodnoty. Faktor trenia medzi telesom B a stolom $f = 0{,}20$. Kladka je veľmi malá a jej účinok neuvažujte.

7. Meranie hustoty

Jednou z charakteristický hodnôt látky je jej hustota. Existuje viacero metód merania hustoty.

V prípade sypkých materiálov možno hovoriť o dvoch hodnotách, jednak o hustote vlastných zrniek materiálu, jednak o hustote nasypaného materiálu, ktorá sa nazýva objemová hmotnosť.

V prípade tuhého telesa jednoduchého tvaru možno určiť hmotnosť a z rozmerov vypočítať objem. Z hmotnosti a objemu potom určíme hustotu.

V prípade tuhého telesa nepravidelného alebo zložitého tvaru, prípadne malých rozmerov, objem telesa možno zmerať ponorením do kvapaliny v odmernom valci. Ak sa však teleso do odmerného valca nezmestí, možno využiť meranie vztlakovej sily po ponorení telesa do kvapaliny.

Úlohy:

Overte rôzne metódy merania hustoty rôznych materiálov.

1. Zmerajte objemovú hmotnosť piesku a hustotu jednotlivých zrniek.
2. Niekoľkými spôsobmi určte hustotu telesa pravidelného tvaru (guľky, valca, kocky).

Metóda merania:

1. V prvom prípade použite suchý piesok. Pre určenie objemovej hmotnosti určte hmotnosť vážením a objem nasypaním do odmerného valca.
   Pre určenie hustoty zrniek piesku prilejte k piesku v odmernom valci toľko vody, aby bol všetok piesok pod hladinou vody, a tá bola tesne nad povrchém piesku. Tým sa vyplnia vzduchové medzery medzi zrnkami vodou. Po opätovnom zvážení určíte objem pridanej vody a ten odpočítate od objemu suchého piesku.
2. V druhom prípade zvoľte tuhé teleso jednoduchého tvaru a s hustotou väčšou ako hustota vody, z materiálu, ktorý sa vo vode nerozúšťa.
   Pri prvej metóde zistite jeho hmotnosť vážením, potom zmerajte jeho rozmery a vypočítajte objem.
   Pri druhej metóde určte objem telesa ponorením do vody v odmernom valci.
   Pri tretej metóde použite silomer. Teleso zaveste na tenké vlákno. Určte silu F_1, ktorou pôsobí teleso na silomer, potom teleso zavesené na silomeri ponorte do vody. Určte silu F_2, ktorou pôsobí ponorené teleso na silomer v tomto prípade. Sila F_2 je zmenšená voči F_1 o vztlakovú silu kvapaliny, odkiaľ určite objem telesa.
   Pozn.: Okrem silomera možno použiť laboratórne váhy so zasením telesa na rameno namiesto misky.

Meranie urobte s viacerými telesami. Na základe výsledkov určte s pomocou fyzikálnych tabuliek, o aký materiál ide. Výsledky získané pre dané teleso rôznymi metódami porovnajte a rozdiely zdôvodnite. Posúďte presnosť jednotlivých metód merania a uveďte, ktoré meranie je najväčím zdrojom chyby.

Autori návrhov úloh:	Ľubomír Konrád (B2,3,5,C2,3,5,6,D1,2,4,5,6), Ivo Čáp (B4,6,7,C7,D7), Kamil Bystrický (A4,C4,D3), Aba Teleki (B1,C1)
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Ľubomír Mucha, Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

INFORMÁCIE

SVOČ 2023

Společnost učitelů matematiky Jednoty českých matematiků a fyziků (SUMA JČMF), Slovenská matematická spoločnosť a Jednota slovenských matematikov a fyzikov (SMS a JSMF) vyhlašují dvacátý ročník **Soutěže vysokoškoláků ve vědecké odborné činnosti v didaktice matematiky**.

Propozice:

1) Soutěže se může zúčastnit každý student (nebo kolektiv studentů) bakalářského nebo magisterského studia a CŽV kterékoli fakulty, resp. vysoké školy v ČR a SR.
2) Soutěž se uskuteční ve formě česko-slovenské Studentské konference SVOČ 2023, kterou ve dnech 9. - 10. 6. 2023 v Nitře uspořádá Katedra matematiky Fakulty prírodných vied a informatiky Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre ve spolupráci se SMS a JSMF a SUMA JČMF. Odborné poroty vyberou nejlepší práce, které budou oceněny.
3) V roce 2023 je SVOČ vyhlášena v těchto soutěžních kategoriích:
   K1 Seminární práce;
   K2 Bakalářské práce z didaktiky matematiky (K2a – MŠ a 1. stupeň ZŠ, K2b – 2. a 3. stupeň);
   K3 Diplomové práce z didaktiky matematiky (K3a – MŠ a 1. stupeň ZŠ, K3b – 2. a 3. stupeň);
   K4 Závěrečné práce vzniklé v rámci CŽV.

   Studenti se do soutěže přihlašují prostřednictvím svých fakult. Do soutěže je možné přihlásit pouze práce s datem obhajoby spadajícím do období od srpna 2022 do července 2023. Každá fakulta může vyslat do každé kategorie nejvýše 3 práce. Fakulty mohou výběr prací zajistit prostřednictvím fakultních soutěží SVOČ. Termíny a organizace fakultních soutěží nebo jiný způsob výběru prací závisí na jednotlivých fakultách. Řídící výbor SVOČ může omezit celkový počet přijatých prací. Některá (nebo obě) z dvojic kategorií 2a, 2b; 3a, 3b mohou být v případě malého počtu přihlášených prací spojeny do jedné kategorie. Toto rozhodnutí je v pravomoci Řídícího výboru SVOČ.

   Práce, které soutěží ve SVOČ z didaktiky matematiky, musí mít nejen matematický, ale i didaktický rozměr. Pro práce bez didaktického rozměru je určena SVOČ z matematiky.

V případě nedostatku finančních prostředků si SMS, JSMF a SUMA JČMF vyhrazuje právo na uspořádání soutěže v omezené formě. Minimální variantou je internetová přehlídka s jednou prací z každé fakulty, která se do soutěže přihlásí.

Organizátoři věří, že budou moci všechny účastníky přivítat v Nitře. Jsou však v případě, že to nebude možné, připraveni zorganizovat SVOČ 2023 hybridní nebo plně distanční formou. O definitivní formě konference budou účastníci informováni, jak to bude nejdříve možné.

Přihlášení prací bude probíhat online. Otevření přihlašovací stránky SVOČ 2023 bude oznámeno všem fakultám e-mailovou zprávou.

Fakulty zašlou nejpozději do 30. 4. 2023 na e-mailovou adresu, která bude uvedena na webové stránce https://www.semt.cz/svoc/ v elektronické verzi:

a) Jeden exemplář každé soutěžní práce;
b) Posudek vedoucího práce nebo jiného vědecko-pedagogického pracovníka fakulty, která práci přihlašuje.

4) Práce může být napsána v češtině nebo slovenštině, případně angličtině, němčině, francouzštině nebo ruštině.

   K práci musí být přiložen abstrakt (v rozsahu maximálně 15 řádků) ve dvou jazycích, z nichž jedním je jazyk práce a druhým čeština/slovenština u prací předkládaných v cizím jazyce, jeden světový jazyk u prací předkládaných v češtině/slovenštině. V abstraktu musí být mimo jiné přesně vymezen didaktický přínos autora.

5) Soutěžní práce budou hodnoceny podle následujících kritérií:
   a) původnost výsledků a přínos práce pro didaktiku matematiky a pedagogickou praxi;
   b) zařazení práce do domácího, případně světového kontextu;
   c) celkové zpracování práce;
   d) přednes referátu o práci na celostátní studentské konferenci.

SMS, JSMF a SUMA JČMF ustanovily pro SVOČ 2023 Řídící výbor SVOČ (dále ŘV) v tomto složení:

Doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD., KM FPVaI UKF v Nitre
RNDr. Lucia Csachová, PhD., KM PdF KU v Ružomberku
Doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc., zástupce JČMF; ÚMS PřF MU Brno
Prof. RNDr. Vladimír Janiš, CSc., KM FPV UMB Banská Bystrica
Doc. RNDr. Antonín Jančařík, PhD., KMDM PedF UK Praha
RNDr. Petra Konečná, PhD., PřF Ostravské univerzity
Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc., KMDM PedF UK Praha (předsedkyně ŘV)
PhDr. Jiří Přibyl, Ph.D., KM PřF UJEP Ústí nad Labem
Doc. RNDr. Libuše Samková, Ph.D., KMA PF JU České Budějovice
Doc. RNDr. Iveta Scholtzová, PhD., KME PdF PU Prešov
Doc. PaedDr. Mária Slavíčková, PhD., FMFI UK Bratislava
RNDr. Petra Surynková, Ph.D., KDM MFF UK Praha
Doc. RNDr. Dušan Šveda, CSc., zástupce SMS JSMF, ÚMV PF UPJŠ Košice
Prof. PaedDr. Katarína Žilková, PhD., zástupce JSMF, PdF UK Bratislava

ŘV zajišťuje posouzení prací, jmenuje poroty pro jednotlivé kategorie a vyhlašuje výsledky na základě doporučení porot.
Proti rozhodnutí ŘV je možné se odvolat k SUMA JČMF nebo SMS, JSMF. Jejich společné rozhodnutí v této věci je konečné.

Adresa předsedkyně řídícího výboru SVOČ	Kontakty na organizačný výbor KM FPVaI UKF v Nitre
Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc. UK – PedF, KMDM Magdalény Rettigové 4 116 39 Praha 1 Tel.: +420 221900251 Mobil: +420 603578360 e-mail:jarmila.novotna@pedf.cuni.cz	doc. PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD. doc. PaedDr. Janka Medová, PhD. Tr. A. Hlinku 1 949 04 Nitra Tel.: +421 37 6408 698 +421 37 6408 703 e-mail: gpavlovicova@ukf.sk jmedova@ukf.sk

Soňa Čeretková[4]

[4] Doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD. , KM FPVaI UKF v Nitre, e-mail: sceretkova@ukf.sk

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
4/2022 ročník 51

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková, Ivo Kluvanec
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 550 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: december 2022

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal “Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences”
OMFI 4/2022 Volume 51
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

CONTENTS