OBZORY

1/2022 (51)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2022 ročník 51

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 1/2022 Volume 51

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Znám, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2022 (51)

Vážení čitatelia Obzorov matematiky, fyziky a informatiky, milí priaznivci matematiky, fyziky a informatiky!

Náš časopis dovŕšil päťdesiat rokov svojej existencie a začíname písať nových päťdesiat rokov. A hneď začíname smutnými správami.

Dňa 30. novembra 2021 nás navždy opustil prof. RNDr. Lev Bukovský, DrSc., významný slovenský matematik svetového formátu, ktorý sa zaoberal teóriou množín, topológiou a matematickou analýzou. Svoje pôsobenie začal v Prahe na Matematicko-fyzikálnej fakulte Karlovej univerzity. V roku 1965 prišiel do Košíc na Prírodovedeckú fakultu UPJŠ. Svojim pôsobením na fakulte výrazne prispel k zvýšeniu jej prestíže. Popri svojich úspechoch v matematike bol aktívny aj pri organizovaní akademického života. Prof. Bukovský bol prorektorom, neskôr rektorom UPJŠ. Jedno obdobie bol predsedom Akreditačnej komisie. Matematická časť tohto čísla OMFI je venovaná takmer výlučne spomienkam na pána profesora.

Keď som premýšľal nad tým, aké udalosti by som mal ešte spomenúť v úvodníku, dostal som ďalšiu smutnú správu. Do matematického neba odišiel dňa 17. marca 2022 prof. RNDr. Jaroslav Kurzweil, DrSc., významný český matematik svetového formátu, priekopník teórie zovšeobecnených integrálov. Pojem Kurzweilov integrál je medzi odborníkmi všeobecne známy. Význam prof. Kurzweila v celosvetovom meradle najlepšie vystihuje aspoň zopár ocenení – bol zakladajúcim členom Učenej spoločnosti Českej republiky, bol čestným zahraničným členom Edinburgskej kráľovskej spoločnosti a čestným členom Belgickej kráľovskej akadémie vied. Okrem toho bol nositeľom celého radu štátnych vyznamenaní ako aj vyznamenaní udelených Akadémiou vied Českej republiky. Z významných funkcií, ktoré zastával, spomeňme aspoň niektoré. Bol prvým ponovembrovým riaditeľom Matematického ústavu AV ČR, v rokoch 1990 až 2000 bol predsedom Akreditačnej komisie ČR, v rokoch 1996-2002 bol predsedom Jednoty českých matematikov a fyzikov.

Čo je dôležité, obaja spomenutí profesori – Bukovský aj Kurzweil – boli nielen významnými matematikmi, ale mali v sebe veľkú dávku ľudskosti.

Česť ich pamiatke!

Martin Kalina

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2022 (51)

VZDELÁVANIE V MATEMATIKE A INFORMATIKE

Spomienky na profesora Leva Bukovského

Miro Pollák

Abstract [Memories of Professor Lev Bukovsky]: Memories of a mathematics student in the years 1976 – 1981 at the UPJŠ Faculty of Science in Košice to study and especially to Professor Lev Bukovský. Memories of Professor Lev Bukovsky's approach to students, to teaching, to social changes after November 1989, to the ideas of civil society and especially to freedom of thought and behavior.

Key words: mathematicians, Lev Bukovský, memoirs

Súhrn: Spomienky študenta matematiky v rokoch 1976 – 1981 na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach na štúdium a zvlášť na profesora Leva Bukovského. Spomienky na prístup profesora Leva Bukovského ku študentom, k výuke, ku spoločenským zmenám po Novembri 1989, k ideám občianskej spoločnosti a zvlášť ku slobode myslenia a správania.

Kľúčové slová: matematici, Lev Bukovský, spomienky

MESC: A30, A40

V dávnejšej minulosti študent na otázku o svojom štúdiu vedel odpovedať celkom presne – povedal meno svojho profesora. Meno profesora najlepšie vystihovalo kvalitu jeho štúdia, pretože meno profesora garantovalo úroveň a kvalitu štúdia.

V neďalekej minulosti študent na otázku o svojom ukončenom vysokoškolskom štúdiu vedel odpovedať tiež presne – povedal na akej škole ukončil svoje štúdium. Už meno školy samo o sebe ne/garantovalo úroveň a kvalitu štúdia.

Dnes vie študent pomenovať akurát odbor svojho štúdia. A niekedy ani nevie, pretože ho práve mení a nie je jasné či študuje ten, z ktorého odchádza, alebo jeden z tých odborov, ktoré práve skúša, pričom nie je jasné, v ktorom bude pokračovať. Mená profesorov nepozná a ani nemôže poznať, škola sa mení a preto ani mená škôl nie sú pre študenta dôležité. Naviac, dnes už študenti bežne končia na úplne inej škole ako je tá, na ktorej štúdium začínali.

Mal som šťastie. Študoval som u profesora Leva Bukovského.

Profesor Lev Bukovský vedel u študentov udržať a prehĺbiť záujem o matematiku. Samozrejme, platilo to pre tých študentov, ktorí neboli znechutení a odradení od štúdia matematiky svojimi predchádzajúcimi učiteľmi na predchádzajúcich školách nižšieho stupňa. Veľmi dobre vieme, že väčšinu ľudí, ktorí o sebe vyhlasujú, že nemajú radi matematiku, odradili práve učitelia matematiky, ktorí ju tiež nemali radi.

Spomínam si na názorné vysvetlenie myšlienky o pojme mohutnosti množín. Bežný učiteľ môže napísať na tabuľu definíciu, kedy majú dve množiny rovnakú mohutnosť – ak existuje vzájomne jednoznačné zobrazenie všetkých prvkov jednej množiny na všetky prvky druhej množiny. Profesor Lev Bukovský radšej porozprával príklad správania sa dvoch malých detí, ktoré nevedia počítať, ale vedia si spravodlivo rozdeliť darované vrecko cukríkov. Použijú pri tom jednoduchý systém delenia cukríkov opakovaným spôsobom: tebe jeden, mne jeden, … až do rozdelenia všetkých cukríkov. Ak sa náhodou jeden cukrík zvýši, jedno dieťa bude teraz šťastnejšie a nabudúce bude mať väčšie šťastie druhé. Deti po rozdelení nevedia koľko majú cukríkov, ale vedia, že ich majú rovnako. Po takomto úvode môže prísť definícia a ďalšie rozprávanie o mohutnosti. Na príklade cukríkov vieme, že mohutnosť konečnej množiny sa rovná nášmu chápaniu počtu prvkov množiny. Aké jasné, aké ľahké. Načo je nám potom pojem mohutnosti? Odpoveď sa dá tušiť – lebo existujú aj nekonečné množiny a tam už situácia taká ľahká nie je.

V predchádzajúcej spomienke budem pokračovať. Z definície mohutností množín vyplýva, že časť množiny môže mať rovnakú mohutnosť ako celá množina. Platí to pre nekonečné množiny a nie pre množiny konečné. Ďalšou dôležitou vlastnos-

Oslavy 30. výročia Novembra ’89.
Zľava: Miroslav Pollák, prof. Lev Bukovský, doc. Zuzana Bukovská, Vladislav Chlipala.
Autorka fotografie: Veronika Janušková

ťou nekonečných množín je skutočnosť, že dve nekonečné množiny môžu mať rôznu mohutnosť a teda, že existujú rôzne nekonečna. Príklad s cukríkmi navodzuje dojem, že mohutnosť množín je jednoduchý a prirodzený pojem a tým pádom aj celá teória množín je prirodzená a ľahko stráviteľná. Profesor Lev Bukovský nás upozornil, že to až také samozrejmé nie je, a že napríklad vo Francúzsku sa učí matematika *„algebraickym"* prístupom a nie *„množinovým"*, ako u nás už na základnej škole. Bez zložitého zdôraznenia toho, že tieto *„čudné"* vlastnosti nekonečných množín sú naozaj veľmi vážne a môžu mať vážne dôsledky, spomeniem zážitok so spolužiakom, a teda tiež žiakom profesora Leva Bukovského. Násir Jahidy bol veľmi bystrý študent z Afganistanu. Tento chytrý Tadžik s rodným jazykom perzským rozprával viacerými jazykmi (arabsky, anglicky, rusky, paštu...), a preto nás až tak veľmi neprekvapilo, keď sa slovensky naučil za pol roka. Náš jazyk bol pre neho ľahký s malou slovnou zásobou (jeho rodným bola perština a pôvod jeho rodiny siahal mnoho storočí dozadu od príchodu Cyrila a Metoda na územie dnešného Slovenska – to len pre naše stredoeurópske porovnanie). Tadžik Násir sa jednu noc, asi o druhej v noci, zobudil a chcel sa prechádzať a rozprávať. Pre neho také normálne, keď bolo o čom. O dôležitých veciach sa rozprával, a buď sa pritom prechádzal alebo sedel a popíjal čaj. V tú noc bola dôležitou vecou jeho ohrozená viera, jeho problém s vierou. V Koráne je vraj napísané, že časť je menej ako celok. Takže, téma bola jasná: čo s mohutnosťami nekonečných množín? Čo s teóriou množín, čo s matematikou? Násir rozmýšľal o ukončení štúdia matematiky. Našťastie zopár rozhovorov, prechádzok a veľa čaju nad týmto pokušením zvíťazilo. Viem, že sa o svojom veľkom metafyzickom a priam *„bytostnom"* probléme rozprával aj s profesorom Levom Bukovským. Násir štúdium matematiky u profesora Bukovského dokončil.

Predchádzajúca príhoda je dôkazom toho, že matematika je o nekonečne. Ďalším príkladom rozhovoru s Násirom bol dôsledok cvičenia z matematickej analýzy v druhom ročníku. Preberali sme určité integrály a ich praktické využitia. Dopad jedného konkrétneho príkladu si vynútil neobvykle väčšiu dávku čaju. Nekonečne veľká plocha vytvorí rotáciou okolo svojej osi objem telesa s konečnou veľkosťou[1]. Ako je to možné? Z nekonečna konečno. Tento príklad už nie je z teórie množín. Napriek tomu je tak poeticky, že ďalej potvrdzuje rajón nekonečna v prospech matematiky. Úvahy a rozjímania nášho študentského obdobia pokračovali ďalej. S Násirom[2] sme špekulovali, či poézia je časťou matematiky, alebo matematika je špeciálnou formou

[1]Majme funkciu $f(x) = 1/x$ definovanú na intervale $[1, \infty)$. Veľkosť plochy, ktorá je ohraničená funkciou f a x-ovou osou na danom intervale, je nekonečne veľká: $S = \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$. Objem telesa, ktorý vznikne rotáciou tejto plochy okolo osi x, je konečný: $V = \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi$.

[2]Násir Jahidy sa po štúdiu matematiky v Košiciach vrátil v roku 1981 do Afganistanu. Za bližšie nezistených okolností onedlho na to zahynul.

Venované profesorovi Levovi Bukovskému
Zdroj: Guldan, F., Pollák, M.: Viac/menej ne/vážne, OZ Krásny Spiš, Levoča, 2020

poézie. Nie všetko sme rozlúštili a nie na všetko sme našli odpoveď. Aj také bolo naše štúdium matematiky u profesora Bukovského. A ešte o inom.

Ak je matematika o nekonečne, tak je aj o slobode. Najkratším dôkazom by bol nepriamy dôkaz na jeden krok. Ako ináč? Ak by matematika nebola o slobode, tak by nemohla byť ani o nekonečne. Veď skutočná sloboda sa nedá vtesnať do ohraničenej škatule hoci aj hocičoho. A naviac, prečo by sme v období tzv. rozvinutého socializmu v Československu v druhej polovici sedemdesiatych rokov išli študovať práve matematiku? Táto podobnosť nie je náhodná. Matematika v nás posilňovala slobodu myslenia, a tým udržiavala a rozširovala slobodu ducha. Nebola ideologická. Ak sme so spolužiakom Vladom Medviďom[3] na prvom cvičení v semestri neuznali tvrdenie prednášajúcej, že marxistická politická ekonómia je vedou (a že má svoj predmet, metódy a jazyk, ako nám tvrdila), tak nás nechala celý semester sedieť vzadu a robiť si svoje veci tak, aby sme sa navzájom nerušili. Na štátniciach z marxizmu-leninizmu (také niečo bolo povinné pre všetky študijné odbory na všetkých vysokých školách – toto je pozdrav pre všetkých milovníkov starých poriadkov, ktorí protestujú proti dnešnej neslobode) mi prešlo tvrdenie, že Marx otočil Heglove zákony dialektiky z nôh na hlavu. Matematici v komisii sa tvárili, že nepočujú a profesor Lev Bukovský sa pozeral pri okne na ulicu. Marxistka – nadbytočná členka skúšobnej komisie sa uspokojila zníženou známkou zo svojho predmetu. Nikto nič nenamietal a vlk ostal sýty a ovca celá.

Nie náhodou sa v Novembri ’89 zapojil profesor Lev Bukovský do zmien, ktorých príležitosť sa v živote človeka neopakuje. Jeho duch slobody sa prejavil v škole, v meste Košice aj na Slovensku. Bol aktívnym pri napĺňaní programu týždňa zmie-

[3] Vladimír Medviď sa profesionálne dlhodobo venuje matematike na univerzite v Žiline.

renia v košickom „*Bielom dome*“. Neskôr pri organizovaní viacerých besied pravicového klubu v Košiciach (v tom čase sme všetci mali ľavice plný krk práve tak, ako máme dnes plný krk ľavice, pravice, stredu a extrému spolu zmiešané v jednej populistickej arogantnej parlamentnej kope). O demokratickom duchu profesora Leva Bukovského svedčí jeho nasadenie v roku 1992, keď sa stal hlavnou tvárou „*Košickej výzvy*“. Vedel, že sloboda nie je raz a navždy získanou konštantou, ktorá sa už nikdy nezmení a potrvá naveky. Vedel, že každý deň je o slobode a zároveň aj o neslobode. Záleží na nás, na ktorú stranu sa svojim postojom a správaním prikloníme. Podľa toho bude vyzerať zajtrajší deň – viac alebo menej slobodne alebo neslobodne.

V pripravovanej knihe o „*Košickej výzve 92*“ profesor Lev Bukovský píše: „*Po Nežnej revolúcii išlo v Československu všetko pekne a hladko. Napriek nezmyselným debatám v Národnom zhromaždení o federácii alebo inom usporiadaní Československa, zdalo sa mi, že politický vývoj ide až veľmi pozitívne. Čiastočne som poznal západnú ekonomiku. Bol som viackrát na konferenciách na Západe, obyčajne s minimálnou finančnou podporou a poznal som, že najlacnejšou potravou pre našinca sú banány, niekde dokonca šunka. Preto prechodu na trhovú ekonomiku a uvoľneniu cien v januári 1991 som sa veľmi obával. Na moje prekvapenie to išlo zase hladko. Mne sa to nezdalo. Učili ma a mal som aj skúsenosť, že „cesta do neba tŕnistá je. Bol som presvedčený, že tie tŕne niekde rastú a my ich zatiaľ nevidíme.*

Potom sa to zosypalo. Prišli parlamentné voľby v júni 1992 a občania Slovenska si zvolili ľahšiu cestu do raja a naleteli populistom a de facto podvodníkom. Voľby sa konali v piatok a sobotu 5. a 6. júna 1992. Po oficiálnom vyhlásení výsledkov volieb víťazi vystúpili v nedeľu 7. júna 1992 v televízii. To vystúpenie bol šok. Čakal som, že traja čelní predstavitelia HZDS sa budú tešiť z výsledku a budú sľubovať očakávaný raj. Namiesto toho chrlili vyhrážky, nenávisť a zlosť. Zabudli sme na sľuby z Novembra 1989 a nastúpili sme cestu do neznáma. Radosť zo slobody a úspešne nastúpenej cesty k demokracii a trhovej ekonomike naraz zmizla. Vtedy som si uvedomil, že cesta do neba začína byť tŕnistá a je potrebné tie tŕne nejako odstraňovať. Ako sa dodnes ukazuje, tie tŕne sú nezničiteľné, ale je potrebné ich odstraňovať aspoň tak intenzívne, aby ciele nášho snaženia, to znamená demokracia a sloboda, boli zachované a naďalej rozvíjané.“

Profesor Lev Bukovský 11. novembra 2019 končí svoju úvahu takto: „*V roku 1998 občania Slovenska vytrhli ten najväčší tŕňový ker a otočili smerovanie Slovenska. Ale nové tŕne rastú aj naďalej a je potrebné ich odstraňovať. Vďaka novinárom sa nám to čiastočne darí. Ale obávam sa, že ani najväčší pesimista nepredpokladal taký rozklad právneho štátu, aký vychádza na povrch posledný čas. Narástli nové tŕne, mierne inej povahy ako tie Mečiarove, a občania Slovenska ich musia v parlamentných voľbách 2020 jednoznačne odstrániť. A potom bdieť, lebo tŕne porastú vždy.*“

Profesor Lev Bukovský je pre mňa matematikom Novembra ’89. V spomienkach na neho pokračujem takto[4]: *„Sedeli sme s pánom profesorom okolo okrúhleho stola v jeho pracovni, rozprávali sa a popíjali čaj. Mali sme seminár z Dejín matematiky. Boli sme v poslednom ročníku jednoodborového štúdia matematiky na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ (ročník 1976 – 1981). Čaj nám urobil profesor matematiky Lev Bukovský. Kontroloval džbán čaju a priebeh debaty. Plný džbán a plnú debatu. Dolieval čaj aj debatu. Debatu o histórii matematiky, o histórii myslenia, o histórii civilizácie. Tak si pamätám na závany slobody ducha začiatkom osemdesiatych rokov minulého storočia. V tej miestnosti odznievali najmä otázky a často aj odpovede. Po štyroch rokoch štúdia sme vedeli, že otázky sú dôležitejšie.*

Viem, že si nebudete dlho pamätať rôzne definície a vzorce. Viem, že v živote budete pracovať v rôznych profesiách a iba málokto z vás bude profesionálnym matematikom. Napriek tomu, vo vás ostane to podstatné, čo vás táto škola, toto štúdium naučilo. Spôsob myslenia, spôsob uvažovania. Tento spôsob vám ostane navždy, nech už budete kdekoľvek a v akejkoľvek funkcii. Môžete sa na to spoľahnúť. Je to vaša sila.“

Aj takéto múdrosti sme, ako študenti profesora Leva Bukovského, nasávali v piatom ročníku pred štartom do nášho pracovného života. Spomínam si na jeho odpoveď na otázku, kto je najlepší súčasný matematik na svete. *„To je matematik, ktorý sa vie o svojom najväčšom nevyriešenom probléme porozprávať s náhodným človekom na ulici.“* Táto jeho odpoveď je stále platná a vždy si na ňu spomeniem, keď sa nejaký odborník začne vyhovárať na nedostatok času, kvôli ktorému nemôže vysvetliť podstatu veci, podstatu problému, na ktorý sa ho pýta moderátor v televízii. Skutočný odborník vie odpovedať aj krátko a vie zrozumiteľne odpovedať aj laikovi.

Lev Bukovský bol človek slobodný duchom. Túto vnútornú slobodu si strážil a vedel ustrážiť. Jeho slobodu strážila matematika a jeho matematiku rozvíjala sloboda. Vedel o tom veľmi dobre. Preto neváhal s príležitosťou, ktorú nám ponúkol November ’89. Táto šanca bola pre neho šancou rozšíriť vytrénovanú slobodu zo svojho vnútra smerom von, smerom k ľuďom a nechať ich nadýchnuť sa slobody a nasiaknuť ňou. Lev Bukovský bol človek Novembra. Bol ním z princípu, z princípu podstaty Novembra, podstaty slobody. Jeho jemnocit zacítil ohrozenie slobody hneď po druhých slobodných voľbách v roku 1992. Okamžitou reakciou bola účasť na tvorbe Košickej výzvy, ktorá toto ohrozenie krátko a jasne pomenovala. Lev Bukovský bol najznámejšou tvárou Košickej výzvy, ktorej odkaz stále platí. O slobodu treba stále usilovať, sloboda nie je samozrejmosťou, sloboda ľahko odchádza a ťažko prichádza. Tak si spomínam na Leva Bukovského – aktívneho ctiteľa slobody.

[4]Táto záverečná časť vyšla v printovej podobe v denníku SME 2. decembra 2021.

Venované profesorovi Levovi Bukovskému
Zdroj: Guldan, F., Pollák, M.: Viac/menej ne/vážne, OZ Krásny Spiš, Levoča, 2020

Lev Bukovský mal na stene vo svojej pracovni nápis *„Len volovi je všetko jasné.“* Pochybovať, pýtať sa, byť zvedavý, byť zdravo skeptický, nebáť sa hľadať a nachádzať, mať odvahu pokračovať a vytrvať – a to všetko slobodne.

Slobodne myslieť a konať.

To je odkaz Leva Bukovského. A som rád, že môžem byť jedným z nositeľov odkazu Leva Bukovského – matematika Novembra.

Lev, ďakujem Ti. A ďakujem aj za to, že sa môžem považovať za matematika, za žiaka profesora Leva Bukovského.

Adresa autora:

Námestie Majstra Pavla 30,054 01 Levoča, e-mail: `miropollak123@gmail.com`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2022 (51)

Odišiel prof. RNDr. Lev Bukovský, DrSc.

Anatolij Dvurečenskij, Karol Nemoga

Abstract [Professor Lev Bukovsky passed away]: In the age of 82, Prof. Lev Bukovský, a prominent Slovak mathematician, professor and a former chancellor of the Pavol Jozef Šafárik University in Košice, passed away on Nov. 30, 2021 (1939 – 2021).

Key words: mathematicians, Lev Bukovský, memoirs

Súhrn: Vo veku 82 rokov zomrel posledného novembra 2021 významný slovenský matematik, profesor a bývalý rektor Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach Lev Bukovský (1939 – 2021).

Kľúčové slová: matematici, Lev Bukovský, spomienky, teória množín, alef, matematická logika, topológia, reálne funkcie, reálna priamka

MESC: A30, A40

Lev Bukovský sa narodil 9. septembra 1939 v malej obci Podkriváň pri Detve. Už na základnej škole v Podkriváni sa prejavil jeho matematický talent, keď učiteľke biológie, ktorá veľmi neovládala matematiku a pritom ju musela učiť, pomáhal s vysvetľovaním látky spolužiakom, ktorú sa doma dopredu naučil. Na strednú školu začal chodiť v Hnúšti a po roku prešiel na Jedenásťročnú strednú školu do Lučenca. Jeho otec bol po roku 1948 politickým väzňom a preto bola malá nádej, že po maturite v 1956 sa dostane na vysokú školu. No pomohlo mu, že sa stal víťazom celoslovenského kola matematickej olympiády, takže začal študovať matematiku-fyziku na Prírodovedeckej fakulte UK v Bratislave. V tých časoch sa muselo začať študovať túto kombináciu a až od tretieho ročníka sa delilo na budúcich matematikov, fyzikov a učiteľov kombinácie M – F. Mladý Lev Bukovský študoval matematickú analýzu a štúdium ukončil v r. 1961. Patril do vynikajúceho ročníka, jeho spolužiakmi boli význační matematici aj fyzici: prof. RNDr. A. Pázman, DrSc., doc. RNDr. S. Pulmannová, DrSc., prof. RNDr. J. Pišút, DrSc., RNDr. K. Karovič, DrSc., prof. RNDr. Peter Lukáč, DrSc., prof. RNDr. V. Martišovič, DrSc., doc. RNDr. S. Takács, DrSc., doc. RNDr. Z. Bukovská, CSc. (manželka), RNDr. V. Jodas, CSc., RNDr. E. Majerníková, DrSc., RNDr. B. Žák, CSc., a tiež známy meteorológ RNDr. J. Iľko, CSc., a iní. V mladosti sa venoval aj súťažne atletickej chôdzi.

Koncom štvrtého ročníka sa L. Bukovský zúčastnil celoštátneho kola ŠVOČ v Prahe. Doc. L. Rieger posudzoval jeho prácu a nečakane mu ponúkol miesto v novozaloženom Oddelení matematickej logiky v MU ČSAV, čo mladý Lev Bukovský prijal. V r. 1961 začal teda pracovať v Prahe, no čoskoro bol povolaný na 26 mesačnú vojenskú prezenčnú službu. V r. 1963 sa oženil so spolužiačkou Zuzkou Bartošovou a problémy s bytom začali byť akútne. Vtedy akad. V. Hajko zakladal v Košiciach Prírodovedeckú fakultu UPJŠ a kolega Igor Kluvánek, ktorý tam už pôsobil, ho pozval na novú fakultu, takže v r. 1965 odchádza z Prahy na PF UPJŠ. S manželkou vychoval tri dcéry Barboru, Luciu a Žofiu.

Prof. Bukovský je odchovanec Pražskej školy teórie množín (Petr Vopěnka) a topológie (Zdeněk Frolík). Jeho vedecké bádanie bolo zamerané na matematickú teóriu nekonečna (teória množín a matematická logika) s dôrazom na aplikácie v iných matematických disciplínach (topológia, teória miery, teória reálnych funkcií, trigonometrické rady). Prvé výsledky z teórie množín sú už takmer päťdesiat rokov uvádzané v monografiách a učebniciach po celom svete a dnes patria k matematickému folklóru, ktorý sa patrí vedieť. V Košiciach vytvoril vlastnú školu.

Lev Bukovský sa zaoberal aj matematickou analýzou, topológiou, s hlbokou znalosťou a výsledkami v teórii množín, matematickej logike a teórii modelov. Jedna zo známych viet, ktorá popisuje mocnenie „*alefov*“ (ľudovo povedané, presnejšie základná veta o umocňovaní nekonečných kardinálnych čísel), sa volá *Hausdorfova-*

Seminár z teórie množín, PF UPJŠ, 1985

Tarského-Bukovského veta. Málokto z československých matematikov sa ocitol v takej dobrej spoločnosti. Druhý autor tohto príspevku, K. N., študoval matematiku začiatkom 70. rokov na MFF KU v Prahe. Tu sa K. N. na prednáške z teórie množín v treťom ročníku dozvedel od B. Balcara o tomto už známom, či dokonca slávnom mladom slovenskom matematikovi (1974). Neskôr sa mu dostala do rúk jeho kniha *Štruktúra reálnej osi* (VEDA, Bratislava, 1979). V tejto knihe môžeme vidieť znovu hĺbku znalostí Leva Bukovského, ktorý dokázal vidieť veci, ktoré aj štandardnému absolventovi matematiky na univerzite ostávajú skryté. Toto mu umožnil aj jeho pobyt a ašpirantúra na Matematickom ústave ČSAV v Prahe, kde bol členom seminára Petra Vopěnku, ktorý bol po roku 1968 na Matematicko-fyzikálnej fakulte Univerzity Karlovej. Na MÚ ČSAV získal v roku 1966 vedeckú hodnosť CSc. a potom na MFF UK najvyššiu vedeckú hodnosť DrSc. v roku 1983. Docentúru získal na PF UPJŠ v Košiciach v 1968 a profesorom bol menovaný tiež v Košiciach v roku 1984.

Logická škola v Prahe bola založená už spomínaným Ladislavom Riegerom, ale stavala aj na ďalších slávnych osobnostiach univerzity, akými boli Karel Petr, Bohumil Bydžovský, Vojtěch Jarník a Vladimír Kořínek. S poslednými dvomi sa mal možnosť stretnúť aj Lev Bukovský. Pražská logická škola, ku ktorej patril aj Lev Bukovský a mnoho ďalších žiakov Petra Vopěnku alebo aj Petra Hájka a Bohuslava Balcara, bola jednou z najlepších na svete. Keď sa taký talentovaný študent ako Lev Bukovský dostal do tejto skupiny, umožnilo mu to byť hneď na svetovej špičke v oblasti. Samozrejme, nemôžeme nespomenúť aj jeho bratislavských učiteľov, ktorí mu dávali základné vedomosti. On sám vo svojom životopise (*Životopis prof. RNDr. Leva Bukovského jeho vlastnými očami*) spomína Michala Greguša, Tibora Šaláta, Tibora Neubruna a Milana Kolibiara.

Po pobyte v Prahe sa v roku 1965 vrátil na Slovensko a začal svoje pôsobenie na univerzite Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach. Venoval sa ďalej rozvoju teórie množín, ale aj matematickej logike a topológii. Chápal, čo je väčšine klasických matematikov skryté, a to je štruktúra nekonečien, ktoré sme do matematiky adoptovali so všetkými dôsledkami, aby sme zaplatili pohodlie axiomatického systému, ktorý nám dáva množinu prirodzených čísel alebo reálnych čísel ako existujúcu nekonečnú množinu, s ktorou môžeme pracovať. Občas sa však dostaneme na hranicu poznania, kde nám riešenie môžu poskytnúť iba ľudia, ako bol Lev Bukovský. Práce v matematickej logike alebo teórii množín nemajú veľa citácií, ale ohlas na práce Leva Bukovského bol svetový. Nakoniec jeho kniha „*The Structure of the Real Line*“, doplnená, prepracovaná a zmodernizovaná, vyšla v roku 2011 vo vydavateľstve Birkhäuser, Basel v spolupráci s PWN, Warsaw s venovaním manželke a tiež matematičke Zuzane.

Ako aj sám prof. Bukovský povedal v jednom zo svojich rozhovorov: *„V Prahe bolo mnoho odborníkov a títo mali dobré kontakty so svetom. Od nich som získaval* *a prinášal do Košíc informácie, ktoré boli potrebné pre naše bádanie. Môžem sa však pochváliť, že to nebolo jednosmerné. Do Prahy som zase odnášal výsledky bádania mojich košických spolupracovníkov, ktoré Prahu aj svet zaujímali. To bola tá košická škola teórie množín.“*

Lev Bukovský vždy chápal, že pre rozvoj spoločnosti je veľmi dôležité, aby sme venovali pozornosť talentom, nadanej mládeži bez ohľadu na to, či je to v Bratislave, alebo malej dedinke Podkriváň na Slovensku. On sám vychoval rad žiakov, spomenieme našich kolegov Petra Eliáša a Miroslava Repického z košickej pobočky Matematického ústavu SAV. Krátky čas pôsobil prof. Bukovský aj v tejto pobočke MÚ SAV v Košiciach.

Profesor Bukovský mal veľkú autoritu a popularitu aj medzi stredoškolskými učiteľmi a učiteľmi základných škôl. To vyplývalo z jeho prednášok a účastiach na matematických konferenciách Jednoty slovenských matematikov a fyzikov v Jasnej pod Chopkom, ktoré boli vynikajúcim fórom na výmenu skúseností a získavanie znalostí. Boli to podujatia, ktoré učiteľov nabíjali nielen znalosťami, ale aj energiou až nadšením pre matematiku. Profesor Bukovský zastával aj mnohé vysoké funkcie, ako je napríklad prorektor a neskôr rektor UPJŠ v Košiciach alebo predseda Akreditačnej komisie. Bol členom Učenej spoločnosti Slovenska, riadnym členom Európskej akadémie vied a umení v Salzburgu, dostal veľa vyznamenaní, ako je Krištáľové krídlo, Veľká cena sv. Gorazda a mnoho ďalších. Podstatné ale je, že bol vynikajúcim vedcom, skvelým učiteľom a dobrým človekom, angažovaným v rozvoji vzdelanosti a spoločnosti. Bol vždy veľmi priateľský a ochotný podeliť sa s ostatnými o svoje vedomosti pri mnohých prednáškach po celom Slovensku. Strácame v ňom vynikajúceho vedca a staršieho priateľa.

Requiescat In Pace

Adresy autorov:

Matematický ústav SAV, Štefánikova 49, 814 73 Bratislava

e-mail: `dvurecen@mat.savba.sk`, `nemoga@mat.savba.sk`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2022 (51)

Ďakujeme, niečo sme sa naučili

Peter Eliaš, Miroslav Repický, Jaroslav Šupina

Abstract [Thank you, we have learned something]: Students and colleagues of professor Lev Bukovský remember more than forty years of the Seminar on Set Theory and Topology.

Súhrn: Žiaci a spolupracovníci profesora Leva Bukovského spomínajú na viac ako štyridsať rokov Seminára z teórie množín a topológie.

Viac ako štyridsať rokov viedol profesor Lev Bukovský seminár orientovaný na výskum a vedeckú výchovu v oblasti teórie množín a topológie na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach. Do Košíc prišiel v auguste 1965 z Matematického ústavu Československej akadémie vied v Prahe. Nadšenie a tvorivú pracovnú atmosféru seminára z teórie množín vedeného profesorom Petrom Vopěnkom sa pokúsil preniesť aj na svoje nové pôsobisko. Určitú predstavu o začiatkoch seminára si môžeme vytvoriť z jeho vlastných slov [1]:

Hneď v prvých rokoch môjho pôsobenia v Košiciach som sa snažil zorganizovať seminár z teórie množín. Vznikli však problémy. Problematika bola pre študentov veľmi abstraktná a šikovnejší študenti už boli obsadení. ... Začiatkom sedemdesiatych rokov som, čo sa týka seminára, zvolil iný postup. ... Mojej prvej ašpirantke Eve Fridrichovej-Butkovičovej som dal menej abstraktný problém týkajúci sa určitého usporiadania ultrafiltrov na množine prirodzených čísel. ... Eva bola veľmi úspešná a dosiahla netriviálne výsledky. Pribudli ďalší ašpiranti, prišiel Martin Gavalec, Roman Frič, Peter Vojtáš. Tak vznikol seminár.

Začiatok kontinuálneho a pravidelného seminára z teórie množín je úzko spätý so vznikom detašovaného pracoviska Matematického ústavu Slovenskej akadémie vied v Košiciach pod vedením profesora Jána Jakubíka v roku 1978. Viacerí pravidelní účastníci seminára (Eva Butkovičová, Eva Copláková-Hartová, Roman Frič, Peter Vojtáš) boli práve zamestnancami tohto ústavu. Spolupráca s Matematickým ústavom SAV ďaleko presahovala činnosť tohto seminára a profesorovi Bukovskému (vtedy ešte docentovi) sa podarilo vyhradiť dve pracovne v budove Prírodovedeckej fakulty

Pražský seminár z teórie množín po 34 rokoch. (Bohuslav Balcar, Petr Štěpánek, Petr Hájek, Petr Vopěnka, Antonín Sochor, profesor Bukovský, Thomas Jech, Dagmar Harmancová, Pavla Jechová, Kamila Bendová, Anna Sochorová)

pre spolupracovníkov z MÚ SAV. Vždy ráno okolo ôsmej, sotva čo si vyzliekol kabát, sa pán profesor zastavil u svojich doktorandov a opýtal sa, či nemajú niečo nové. Ak áno, vždy si našiel čas, aby si to vypočul.

M. R.: *Keď som sa ako študent piateho ročníka v roku 1982 pridal k semináru, ten už pracoval na plné obrátky. Jeho kľúčovými členmi v tom čase boli Peter Vojtáš a dve ašpirantky profesora Bukovského, Eva Butkovičová a Eva Copláková. Častým a aktívnym účastníkom bol aj Roman Frič. Asi po roku sa pridal Jaroslav Skřivánek z VŠT v Košiciach a trochu neskôr úspešný riešiteľ študentskej súťaže Ladislav Spišiak. V roku 1985 prišiel do Košíc asi na dva semestre Klaas Pieter Hart z Technickej univerzity v Delfte v Holandsku.*

Na seminári sa preberali rôzne témy z kombinatorickej topológie, nekonečnej kombinatoriky, matematickej logiky, boolovských modelov, forcingu, konvergencie, kardinálnych invariantov reálnej priamky, deskriptívnej teórie množín, kardinálnej aritmetiky a axiomatiky teórie množín. Seminár sa dlhé roky konal v pracovni pána profesora vždy vo štvrtok v rovnakom čase od desiatej do dvanástej a tomu sa prispôsoboval aj rozvrh výučby.

M. R.: *Polovica dlhého stola v pracovni bola stále zaplnená hromadou ešte nezatriedených separátov a rukopisov, od ktorých sme boli všetci dosť závislí, keďže možnosti knižníc v Košiciach boli obmedzené. Seminár často končil výmenou informácií rôzneho druhu: kto kde pôsobí a čím sa zaoberá, príhody a zážitky z konferencií, veselé aj menej veselé, pikantnosti zo života významných matematikov, historické a geografické súvislosti a podobne.*

Vďaka kontaktom profesora Bukovského seminár spolupracoval s viacerými domácimi a zahraničnými pracoviskami formou pracovných pobytov a pozvaných prednášok na seminároch a konferenciách. Zvlášť dobrá spolupráca bola s českými a poľskými kolegami. Tradičná bola účasť na Zimnej škole z abstraktnej analýzy (Srní, Poděbrady, Hejnice) a na konferenciách v Poľsku. Výsledky „poľskej školy" teórie množín a topológie boli často na programe seminára.

Začiatkom 80-tych rokov bol profesor Bukovský poverený vybudovaním Katedry informatiky na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ, čo ho značne vyťažovalo. Keď sa situácia s riadením katedry trochu ustálila, opäť sa mohol naplno venovať výskumu. Koncom 80-tych rokov začal skúmať vlastnosti Dirichletových množín a s nimi súvisiacu kvázinormálnu konvergenciu a zaviedol koncept topologického priestoru nerozlišujúceho kvázinormálnu konvergenciu od bodovej konvergencie. Táto problematika zaujala mladého matematika Ireneusza Recława z Gdańska, ktorý prijal pozvanie profesora Bukovského na krátky pobyt v Košiciach. Výskum na základe tejto spolupráce si získal značnú odozvu na viacerých pracoviskách v zahraničí a neskôr pokračoval aj vo vedeckej výchove jeho doktorandov (Jozef Haleš a Jaroslav Šupina).

Súbežne sa profesor Bukovský začal intenzívnejšie zaoberať problematikou teórie množín súvisiacej s trigonometrickými radmi. Viackrát sa priznal, že jeho starou láskou je Fourierova analýza a teória trigonometrických radov. V roku 1994 prijala jeho pozvanie do Košíc Natalia Kholshchevnikova z Moskvy, ktorá sa v tom čase zúčastňovala pražskej Zimnej školy z abstraktnej analýzy. Na základe tejto spolupráce vznikla spoločná publikácia a téme sa venoval aj ďalší doktorand (Peter Eliaš). Zloženie seminára a aj jeho zameranie sa postupne menilo a nakoniec sa to prejavilo aj v názve – niekedy po roku 2000 sa „*Seminár z teórie množín*" premenoval na „*Seminár z teórie množín a topológie*".

P. E.: *Na seminári sme rozoberali vlastné výsledky alebo niekto dostal za úlohu naštudovať nejaký článok a predniesť ho ostatným. Pán profesor študentov nabádal, aby aj výsledky iných autorov prezentovali vlastnými slovami, preformulované tak, aby sa s nimi študent vedel stotožniť: „Mňa nezaujíma, čo tvrdí autor, mňa zaujíma, čo tvrdíš ty!"*

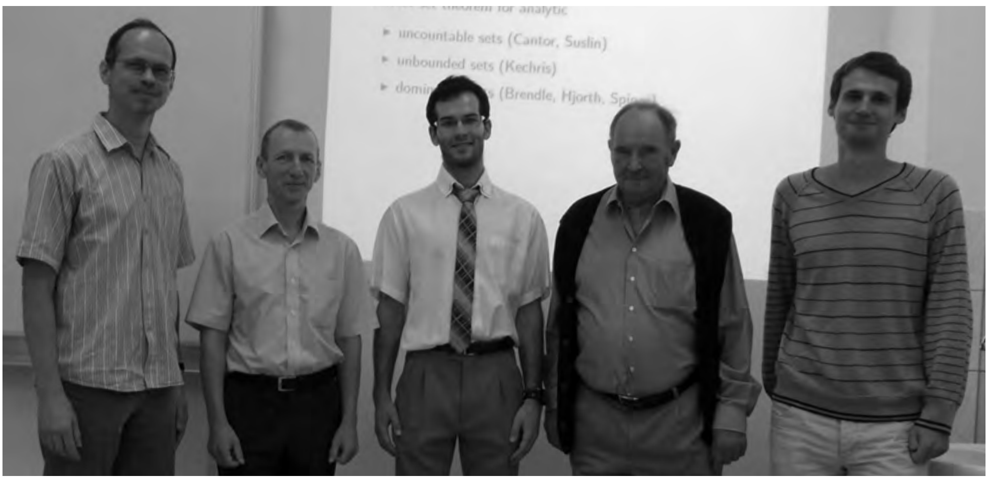
Profesor Bukovský chcel, aby všetci na seminári rozumeli prednášanej téme. Často sme sa zastavili pri nejakom detaile, až kým si ho každý nevyjasnil. Tým, že každý na seminári problematike rozumel, sme mohli byť aktívnejší a v konečnom dôsledku postupovať rýchlejšie.

P. E.: *Po skončení referátu spravidla nasledovala dlhá diskusia, niekedy dlhšia než samotný referát. Pán profesor neraz zvolal: „Počkaj, dokázal si viac!" Všetci sme sa spoločne snažili nájsť silnejšiu alebo všeobecnejšiu formuláciu dokázaného výsledku,* *uvedomiť si všetky jeho dôsledky, nájsť súvislosti, overiť nevyhnutnosť všetkých predpokladov, nájsť miesto v dôkaze, kde presne boli predpoklady použité, zistiť, čo by platilo, keby predpoklady boli iné. Toto bola pre nás veľká škola.*

Profesor Bukovský vedel prilákať študentov so záujmom o poznávanie hlbokých súvislostí a strhnúť ich k štúdiu náročnej problematiky. Na prednáškach prezentoval netriviálne výsledky tak, že im študenti rozumeli. Dôležitá bola presná a dôsledná argumentácia, ktorú vyžadoval aj od študentov. Tí, ktorí si vybrali tému záverečnej práce u pána profesora, očakávali jeho vysoké nároky, tie však mohli byť niekedy ešte vyššie.

J. Š.: *Po výbere témy bakalárskej práce u profesora Bukovského bolo ďalším krokom nájsť vhodnú študijnú literatúru. Keď som o ňu žiadal, jedna z prvých otázok bola: „Aké jazyky?“ Prekvapený otázkou som sa zmohol len na strohú odpoveď: „Slovenčina, angličtina.“ Podal mi knihu a komentoval: „Aha, tak s angličtinou si snáď vystačíme. Nech sa páči.“ Vtedy som ešte netušil, že po slovenských, českých a anglických knihách počas bakalárskeho a magisterského štúdia prídu na doktorandskom štúdiu na rad i ruský preklad Bourbakiho topológie, francúzske originály Kuratowského topológie a Sierpińského článkov, poľský originál Sikorského teórie funkcií a mnohé iné.*

Keď sa študentom podarilo prehrýzť ťažkou študijnou literatúrou, preniknúť do hĺbky problematiky a oceniť eleganciu niektorých dôkazov, mali o to väčší rešpekt pred autormi týchto kníh a článkov.



Po úspešnej obhajobe Michala Deča, doktoranda Miroslava Repického, v roku 2015 (Peter Eliaš, Miroslav Repický, Michal Dečo, profesor Bukovský, Jaroslav Šupina).

J. Š.: *Na bakalárskom štúdiu som z teórie množín absolvoval iba úvodný kurz spojený s kurzom logiky. Bolo jasné, že si budem musieť doplniť vzdelanie v tejto oblasti. Profesor Bukovský mi odporučil štandardnú učebnicu teórie množín od Bohuslava Balcara a Petra Štěpánka. O niekoľko mesiacov neskôr, keď som vošiel do jeho pracovne, bol tam s ním aj jeden starší pán. Pán profesor ma uviedol: „Bohoušku, toto je môj študent.“ Skamenel som zoči-voči autorovi rešpektovanej knihy.*

Dlhšie matematické diskusie na seminároch boli občas prerušované krátkymi neformálnymi rozhovormi o rôznych témach. V nich sa sprítomnili zážitky pána profesora zo štúdií v Bratislave a pôsobenia v Prahe a jeho skúsenosti s bývalým režimom. Dozvedeli sme sa niečo o jeho práci so stredoškolskou mládežou, o jeho postojoch v úlohe rektora alebo člena akreditačnej komisie.

J. Š: *Takto som sa dozvedel o návšteve agentov štátnej bezpečnosti v pracovni pána profesora, aby ho informovali, že nasledujúci pobyt zahraničného matematika v Košiciach bude monitorovaný a je zbytočné klásť odpor. Aj o tom, ako telefonická rezervácia stola v reštaurácii pre seba a zahraničnú návštevu znamenala obsadenie susedného stola agentmi štátnej bezpečnosti. Alebo o tom, ako sa láska britského matematika k československej matematičke prejavila jeho obdivom Československa, čo ho zachránilo pri vypočúvaní. Nikdy by som si neuvedomil, aké ťažké bolo po páde komunizmu v divokých 90-tych rokoch nastaviť kormidlo smerovania univerzity a vôbec celej akademickej sféry na Slovensku.*

Pán profesor nám často rozprával o svojich cestách, o konferenciách, ktorých sa zúčastnil, a o svojich dojmoch zo stretnutí s matematikmi z rôznych častí sveta.

P. E.: *Vždy, keď som bol na nejakej konferencii s pánom profesorom, nemohol som prehliadnuť úctu, vzájomný rešpekt a silné priateľstvo, ktoré vládlo medzi ním a viacerými jeho zahraničnými kolegami. Bolo zjavné, že toto priateľstvo pretrváva dlhé roky, napriek tomu, že mali možnosť stretnúť sa azda len raz za pár rokov. Bolo by asi nespravodlivé kohokoľvek menovať, voči tým, ktorých by som opomenul.*

J. Š.: *Pán profesor bol často prítomný na mojich zahraničných cestách, aj keď tam osobne nebol. Napríklad, pri raňajkách v hoteli, kde sa koná medzinárodná konferencia, si prisadne ku mne starší pán a pýta sa, odkiaľ som. „Zo Slovenska, z Košíc,“ odpovedám. Usmeje sa a pridáva: „To je tam, kde pôsobí Bukovský. Poznáte?“ Následne si vypočujem niekoľko jeho milých spomienok na spoločné zážitky. Rozhovor končí slovami: „Prosím, pošlite moje pozdravy Bukovskému.“*

Jednou z najvýznamnejších udalostí, ktorá súvisí s naším pôsobením v seminári, bola medzinárodná konferencia v Košiciach v roku 2019 pri príležitosti osemdesiatych narodenín pána profesora. Impulz prišiel nečakane.

J. Š.: *V roku 2017 v konferenčnom centre v Będlewe v Poľsku sa počas jednej diskusie obrátili na mňa zahraniční kolegovia s otázkou: „Koľko rokov má profesor Bukovský?“ Po návrate do Košíc som okamžite navrhol členom seminára organizáciu výročnej konferencie. Súhlasne reagovali aj kolegovia na univerzite. Výsledok ďaleko presiahol naše pôvodné očakávania: takmer 70 účastníkov, z toho 50 zahraničných zo 14 krajín, 35 príspevkov a 6 pozvaných prednášok a mnoho nových a zaujímavých matematických výsledkov.*

Ďakujeme, niečo sme sa naučili. Seminár bol vždy pre profesora Bukovského dôležitým spôsobom vzájomnej výmeny poznatkov a udržiavania kontaktov s okolitým matematickým svetom. Keď to bolo možné, nikdy nevynechal možnosť sa ho zúčastniť. Takto to bolo aj poslednýkrát 23. novembra 2021. Na konci seminára sa nezabudol opýtať, ako sa nám darí. Presne o týždeň nás všetkých zastihla smutná správa, že už medzi nás viac na seminár nepríde. Pre profesora Bukovského bolo typické, že keď

Doktorandka ďalšej generácie, Viera Gavalová, r. Šottová, blahoželá pánovi profesorovi k osemdesiatym narodeninám na výročnej konferencii v roku 2019.

niekto vystúpil na jeho seminári s príspevkom, na konci výkladu sa mu pán profesor poďakoval slovami: „*Ďakujem, niečo som sa naučil!*“ Chceli by sme vyjadriť nádej, že v seminári, ktorý založil, budeme pokračovať a odkaz jeho košickej školy teórie množín budeme ďalej rozvíjať.

Literatúra – References

[1] T. Lengyelfalusy, Š. Tkačik: *Životopis prof. RNDr. Leva Bukovského, DrSc., jeho vlastnými očami*, Osobnosti slovenskej matematiky, Katolícka univerzita v Ružomberku.

Adresy autorov:

Matematický ústav, Slovenská akadémia vied, Grešákova 6, 040 01 Košice
e-mail: `elias@saske.sk`, `repicky@saske.sk`

Prírodovedecká fakulta, Univerzita P. J. Šafárika v Košiciach, Jesenná 5, 040 01 Košice
e-mail: `jaroslav.supina@upjs.sk`

Už len bez pána profesora. Spomienková prechádzka súčasných i minulých účastníkov seminára (Jaroslav Šupina, Ladislav Spišiak, Peter Eliaš, Stanislav Krajči, Michal Dečo, Jozef Haleš, Miroslav Repický) a ich rodinných príslušníkov spolu s docentkou Zuzanou Bukovskou v decembri 2021.

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2022 (51)

Lev Bukovský

Žofia Krescanková (Bukovská)

Abstract [Lev Bukovský]: Humility is a state of mind or rather a feeling, when a person is able to realize their own imperfection and dependancy on others. They are aware of dependancy on morals and manners. The opposite of humility is pride. True humility means truthfulness, acceptance of reality, respect for ourselves and others, effort not to compare, not to judge or assess.

Key words: Lev Bukovský, father, humility, decency

Súhrn: Pokora je stav mysle, či pocit, keď si osoba uvedomuje svoju vlastnú nedokonalosť, či závislosť na niekom. Človek si uvedomuje závislosť na tzv. vyšších mravných požiadavkách. Opakom pokory je pýcha. Pravá pokora je pravdivosť, uznanie skutočnosti, rešpektovanie jedinečnosti seba aj iných, snaha neporovnávať, nehodnotiť, neposudzovať.

Kľúčové slová: Lev Bukovský, otec, pokora, slušnosť

MESC: A30, A40

Profesor Lev Bukovský, matematik, vedec, učiteľ, rektor… pre mňa a pre nás, náš otec. Tata, ako sme ho familiárne volali. Všetci, jeho dcéry aj jeho vnúčatá aj jeho pravnúčatá. Vychoval tri dcéry, ako správny kráľ. Tri dievčatá, Barboru, Luciu, Žofiu.

Ako správny matematik, sme načasované presne po troch rokoch, skoro s presnosťou na mesiac. Dožil sa ôsmich vnúčat a štyroch pravnúčat. Nám dcéram sa šťastné manželstvo, žiaľ, nepodarilo na prvýkrát. Pri mojej druhej svadbe sedel s mojim manželom pri poháriku a povedal: *„Vieš Palko, mne to akosi nevychádza, mám tri dcéry a ty si môj piaty zať.“*

Nie je jednoduché vyrastať v rodine s tak „veľkým“ človekom ako bol on. Ako vyštudovaná psychologička som sa často na veci pozerala „psychologicky“. Stávalo sa, že nejakému nášmu vtipu alebo činu z bežného života nerozumel. Keď sme s mojimi blízkymi rozoberali naše „celebrity“ – kto, s kým, kedy, potichu sedel, počúval a zvyčajne povedal mojimi deťmi obľúbenú vetu: *„No, vy máte ale známosti.“* Netušil, o čom sa bavíme. Časom som pochopila, že títo ľudia to majú naskladané ináč, že žijú vo svojom svete a riešia veľké veci, a veci bežného života idú akosi popri nich. Vravieva som mu: *„Nič si z toho nerob. Vieš Tati, Pán Boh niekde dal a niekde vzal.“*

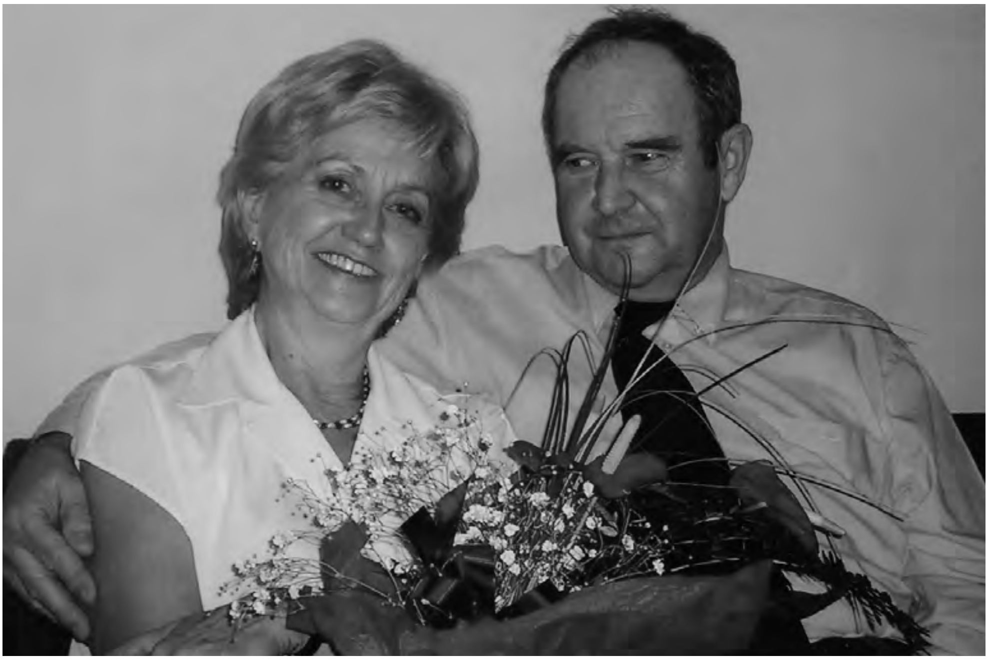
Tata a jeho ženy: mama, tri dcéry a prvorodená vnučka, ktorá mu bola ako dcéra (2004).

Veľakrát sme debatovali na tému, že v živote to nie vždy funguje tak, ako v matematike, že dva a dva sú štyri. Som matka štyroch detí a tam sa nedá určiť vzorec alebo rovnica, ktorou budem vychovávať všetky deti rovnako. Pousmial sa a hlboko sa zamyslel nad tým, čo mu vravím. Bol veľmi emocionálny a citlivý. Rozcitlivel sa pri príhovore, pri gratulácii, pri prípitku. V bežnom živote, ako otec, prejavoval však city a emócie málo. Keď ale prišlo na lámanie chleba, vždy stál pri nás, zastal sa nás a vyriešil situáciu tak, aby nám pomohol. Samozrejme, že sme tomu ako deti nerozumeli, ale… teraz ako veľké a ako matky tomu rozumieme.

Pre mňa bol vzorom ako človek. Nad nikým sa nepovyšoval a pred nikým sa neponižoval. Toľko pokory a úcty, koľko som videla u neho smerom k ľuďom, som asi nevidela u nikoho. Nikdy som nepočula, že by sa rozprával s niekým neúctivo, žeby niekoho ponižoval a správal sa nadradene. Či to bol kolega, nadriadený alebo podriadený, či predavačka v obchode. Bol veľmi galantný. K našej mame, k nám a v neposlednom rade k svojej mame. Vzťah k jeho mame bol pre mňa tiež obdivuhodný. V čase, keď neboli mobily a pevná linka bola drahá a nie vždy dostupná, písal svojej mame do Podkriváňa, kde jeho rodičia žili, pravidelne listy. Každý týždeň jej písal, čo sa stalo, čo máme nového. Bolo to milé a zase som tu vnímala tú lásku, úctu a pokoru.

Miloval našu mamu, miloval ju oddane a bezhranične. Ja, ako dcéra som niekedy aj žiarlila, keď som vnímala, ako sa na ňu pozerá, ako ju s láskou sleduje, ako robí všetko pre to, aby bola šťastná. Myslím, že by jej zniesol aj modré z neba.

To, že vedel hrať na klavíri, harmonike, flaute, že poznal hviezdy, športoval, poznal prírodu, huby, zvieratá, rastliny, že ovládal svetové jazyky, dejiny aj zemepis, bolo pre mňa fascinujúce. Ako deti nás to všetko učil poznávať. Nechápala som, ako sa do takej „malej“ hlavy môže dostať toľko informácií. Keď „nerobil“ matematiku,



Otcova iskierka v očiach, keď sa pozeral na mamu (2003).

tak nás zobral do lesa, na lyže, k vode, hral nám na nejakom hudobnom nástroji, rozprával nám rôzne príbehy, porozprával svoje obľúbené židovské vtipy, hral s nami karty. Obľúbený bol americký žolík. Rodičia nás viedli intelektuálne, ale viedli nás aj k pestovaniu zdravého tela. Ja otcovi paradoxne vďačím za to, že mám vzťah k športovaniu (nie až tak k matematike a k množinám), že viem plávať, lyžovať, bicyklovať a akýkoľvek šport mi nie je cudzí.

Otec bol veľmi disciplinovaný a dôsledný. Ak sme sa mali stretnúť o štvrtej, tak bolo 16:00 a on bol na mieste stretnutia. Všetko muselo mať hlavu a pätu a všetko muselo byť jasne dané. Ak sme niekde cestovali, museli sme mať všetko dopredu rozpísané, kam ideme, kedy vyrážame, kade pôjdeme, čo si zoberieme so sebou. Povestná bola aj jeho „bodka". Ak otec niečo povedal a dodal „a bodka", už sa nemohlo ani pípnuť. Ako deti sme to nenávideli, ale ako rodičia sme to používali rovnako, len u našich detí to nemalo taký účinok.

Otec bol manuálne veľmi zručný. Mnohé technické problémy v domácnosti riešil sám. Vodára, elektrikára sme volali len v krajnej núdzi. Keď sa niečo pokazilo, pohotovo vymyslel čo, ako a kde, a opravil to. Miloval prácu s drevom. Na našej chate, ktorú sám postavil s pomocou mamy, rodiny a kamarátov, vyrobil zariadenie z dreva vlastnými rukami a vlastným rozumom. Zháňal drevo, šablóny na ornamenty a lupienkovou pílou vyrezával tie ornamenty na garnižiach a poličkách. Knižnicu vo

So svojou veľkou rodinou.

svojej pracovni vyrobil sám. Rád robil to, čo si vyžadovalo kreativitu, nad čím bolo treba rozmýšľať. Práve preto rád varil. Keď varil, išiel na to doslova vedecky. Starostlivo zvažoval, aby chute v jednotlivých chodoch boli rôzne a dopĺňali sa. Dôsledne si potom do počítača zapisoval, čo sa malo urobiť ináč. Nikdy v živote nevysával, neutieral prach, neumyl ani jedno okno. Tam sa nedalo tvoriť, vymýšľať.

Nedá mi nespomenúť otcove fantastické kuchárske špeciality. Ako stroganov, mäsová zmes bolognese na „točené“ a „čína“. Na tú sme sa vždy neskutočne tešili, či mama, my dcéry alebo vnúčatá, pravnúčatá. Myslím, že sa jeho „čína“ tradovala široko-ďaleko aj medzi známymi. Vždy urobil minimálne tri chody a vždy sme sa najedli viac ako dosýta. Ale ten neporiadok, ktorý po jeho varení zostal! Lenže to nebolo už pre neho podstatné ani prioritné. Úloha bola daná: uvariť obed. A to splnil.

Jednoznačne, v prvom rade otcovi vďačím za to, že som slušný človek, nesprávam sa povýšenecky, mám v sebe pokoru, ktorá mi je prirodzená, vážim si prácu každého človeka a vážim si každého človeka. Myslím, že s tým by súhlasili aj moje sestry aj naše deti.

Ďakujeme…

Adresa autora:

Želiarska 18, 040 13 Košice   e-mail: `zofia.krescanko@gmail.com`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2022 (51)

Lev medzi kardinálmi

Pavol Zlatoš

Abstract [Lev among the Cardinals]: Lev Bukovský was a prominent Slovak mathematician who contributed remarkably to the study of the arithmetic of infinite cardinal number and to the popularization of the consequences of set theory in other branches of mathematics.

Key words: Lev Bukovský, Set Theory, cardinal numbers, real line

Súhrn: Lev Bukovský bol prominentný slovenský matematik, ktorý významne prispel k štúdiu aritmetiky nekonečných kardinálnych čísel a k popularizácii dôsledkov teórie množín v iných oblastiach matematiky.

Kľúčové slová: Lev Bukovský, teória množín, kardinálne čísla, reálna os

MESC: A30, A40

Už som si nie celkom istý, kedy a kde som sa po prvý raz stretol s Levom Bukovským. Marí sa mi, že to bolo začiatkom 80. rokov v Prahe v rámci Vopěnkovho seminára. Ale jeho povesť ho predchádzala. Bukyho meno bolo v seminári pojmom. Napokon v rámci tohto seminára robil v 60. rokoch ašpirantúru (dnes sa tomu hovorí postgraduálne štúdium), tu sa zrodili práce, ktorými sa už v mladom veku zapísal do análov teórie množín.

Každý, kto čo len trochu pričuchol k teórii množín, vie, že v kardinálnej aritmetike sa popri jednoduchých základných identitách a nerovnostiach, analogických základným vlastnostiam sčítania, násobenia a umocňovania prirodzených čísel, toho veľa dokázať nedá. Dokonca aj takú zdanlivú banalitu, ako porovnateľnosť ľubovoľných dvoch nekonečných kardinálov, t. j. $\alpha \le \beta$ alebo $\beta \le \alpha$, nevieme zaručiť bez axiómy výberu. Z nej potom pre nekonečné kardinálne čísla α, β vyplývajú rovnosti

$$\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = \max(\alpha, \beta),$$

ktoré pravidlám konečnej aritmetiky odporujú. Ale, aj keď prijmeme Zermelovu-Fraenkelovu teóriu množín s axiómou výberu ZFC (ako je v súčasnej matematike zvykom), bude to aspoň na prvý pohľad všetko. Väčšina výsledkov hovorí o konzistencii tej či onej hypotézy. Až po prijatí ďalších princípov, napr. *zovšeobecnenej hypotézy kontinua*, možno toho dokázať podstatne viac. O to cennejšie sú preto nie príliš početné výsledky, ktoré predsa len odhaľujú skryté zákonitosti umocňovania nekonečných kardinálnych čísel, platné bez dodatočných hypotéz. Práve takéto zákonitosti objavil a dokázal Lev Bukovský, čím sa zaradil bok po boku takých velikánov ako Felix Hausdorff a Alfred Tarski.

Naznačme si aspoň stručne, v čom tieto výsledky spočívajú. Kvôli tomu bude potrebné zaviesť niekoľko pojmov a označení. Kardinálne číslo (mohutnosť) množiny A budeme značiť card A. Súčet systému kardinálnych čísel $(\alpha_i;\, i \in I)$ definujeme ako kardinálne číslo

$$\sum_{i \in I} \alpha_i = \operatorname{card}\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big),$$

kde $(A_i;\, i \in I)$ je systém po dvoch disjunktných množín, z ktorých každá má mohutnosť card $A_i = \alpha_i$. Keďže každá neprázdna trieda kardinálnych čísel má najmenší prvok a ku každej množine kardinálov existuje kardinál väčší ako všetky prvky tejto množiny, má každá neprázdna množina K kardinálnych čísel svoje supremum – totiž najmenšie číslo $\alpha = \sup K$ také, že $\beta \leq \alpha$ pre každé $\beta \in K$. Špeciálne, existuje najmenšie kardinálne číslo väčšie ako dané nekonečné kardinálne číslo α, ktoré značíme α^+ a nazývame *nasledovníkom* kardinálu α. Kardinálne číslo, ktoré nie je nasledovníkom žiadneho kardinálneho čísla, sa nazýva *limitné*. *Kofinalitou* nekonečného kardinálu α nazývame najmenšie kardinálne číslo $\kappa = \operatorname{cf} \alpha$, pre ktoré existuje mno-

Logic Colloqium, Praha, august 1998;
zľava doprava: Petr Vopěnka, Pavol Zlatoš, Lev Bukovský.

žina K mohutnosti $\operatorname{card} K = \kappa$ kardinálnych čísel $\beta < \alpha$ taká, že $\alpha = \sup K$. Zrejme $\operatorname{cf}\alpha$ je vždy nekonečné kardinálne číslo a platí $\operatorname{cf}\alpha \leq \alpha$. Nekonečný kardinál α sa nazýva *regulárny*, ak $\operatorname{cf}\alpha = \alpha$; ak $\operatorname{cf}\alpha < \alpha$, hovoríme, že α je *singulárny* kardinál. Ľahko nahliadneme, že každý nasledovník α^+ je regulárne kardinálne číslo. Otázka, či existujú aj limitné regulárne kardinálne čísla (tzv. *slabo nedosiahnuteľné kardinály*), sa však nedá rozhodnúť v axiomatickom systéme ZFC. Jednako však možno v teórii ZFC dokázať nasledujúcu vetu:

Veta
Pre ľubovoľné nekonečné kardinálne čísla α, β platí:

(a) *Ak $\alpha \leq \beta$, tak $\alpha^\beta = 2^\beta$.*

(b) (Felix Hausdorff) *Ak $\alpha = \gamma^+$, tak $\alpha^\beta = \alpha \cdot \gamma^\beta = \max\bigl(\alpha, \gamma^\beta\bigr)$.*

(c) (Alfred Tarski) *Ak α je limitné kardinálne číslo a $\beta < \operatorname{cf}\alpha$, tak $\alpha^\beta = \sum_{\gamma<\alpha} \gamma^\beta$.*

(d) (Lev Bukovský) *Ak $\operatorname{cf}\alpha \leq \beta < \alpha$, tak môžu nastať dva prípady:*

1. *Existuje $\gamma < \alpha$ také, že pre každé δ, $\gamma \leq \delta < \alpha$, platí $\gamma^\beta = \delta^\beta$; potom $\alpha^\beta = \gamma^\beta$.*
2. *Pre každé $\gamma < \alpha$ existuje δ, $\gamma < \delta < \alpha$, také, že $\gamma^\beta < \delta^\beta$; potom $\alpha^\beta = \kappa^{\operatorname{cf}\kappa}$, kde $\kappa = \sum_{\gamma<\alpha} \gamma^\beta$.*

Tieto výsledky umožňujú induktívny výpočet kardinálnych mocnín, presnejšie, na ich základe možno výpočet mocniny α^β pre pevne zvolené β previesť na výpočet mocnín κ^β pre nekonečné kardinály $\kappa < \alpha$ a hodnoty funkcie $\gimel(\alpha) = \alpha^{\operatorname{cf}\alpha}$ ($\gimel$ – *gimel* – je tretie písmeno hebrejskej abecedy).

Dôsledok
Nech α, β sú ľubovoľné nekonečné kardinálne čísla. Potom platí:

(a) *Ak existuje kardinál $\kappa < \alpha$ taký, že $\kappa^\beta \geq \alpha$, tak $\alpha^\beta = \kappa^\beta$; špeciálne, ak $\alpha \leq \beta$, tak $\alpha^\beta = 2^\beta$.*

(b) *Ak pre každý kardinál $\kappa < \alpha$ je $\kappa^\beta < \alpha$, tak*

$$\alpha^\beta = \begin{cases} \alpha\,, & \text{ak } \beta < \operatorname{cf}\alpha\,,\\ \alpha^{\operatorname{cf}\alpha}\,, & \text{ak } \operatorname{cf}\alpha \leq \beta < \alpha\,. \end{cases}$$

Hodnota $\gimel(\alpha) = \alpha^{\operatorname{cf}\alpha}$ splýva pre regulárne kardinálne číslo α s mocninou 2^α. Chovanie funkcie gimel na singulárnych kardináloch však závisí od dodatočných axióm teórie množín. A práve k objasneniu toho, čo možno o vzťahu kardinálnych funkcií 2^α a $\gimel(\alpha)$ dokázať iba zo základných axióm ZFC, opäť významnou mierou prispel Lev Bukovský. Podrobnejšie sa o celej problematike možno dočítať v učebnici-monografii Bohuslava Balcara a Petra Štěpánka *Teorie množin* (Academia, Praha 1986, 1. vyd., 2000, 2. vyd.).

Lev Bukovský sa popri teórii množín venoval aj matematickej analýze a topológii. Svoju erudíciu a široký záber zúročil okrem iného v pozoruhodnej monografii *Štruktúra reálnej osi* (Veda, Bratislava 1979), v ktorej nádherne prepojil výsledky teórie množín so štruktúrou zdanlivo tak dôverne známeho matematického objektu, ako je obor reálnych čísel. Ide o ojedinelé a v istom zmysle aj znepokojivé dielo. Väčšina matematikov totiž považuje štuktúru reálnej osi za dôverne známu a dobre preskúmanú. Niekoho možno vyruší existencia nemerateľných množín, ale to je asi tak všetko. V knihe je však pomerne zrozumiteľne vyložené, že túto štruktúru do detailov nielen nepoznáme, ale úplne ani poznať nemôžeme. Odpovede na viacero prirodzene sformulovaných otázok totiž závisia od dodatočných axióm teórie množín. Napríklad, ak nahradíme axiómu výberu *axiómou determinovanosti*, budú všetky množiny reálnych čísel merateľné. Buky takto originálnym spôsobom prispel k osvete a profesionálnej sebareflexii v rámci česko-slovenskej – a po preklade knihy do angličtiny – i svetovej matematickej komunity. Sám som sa z tejto jeho knihy hodne naučil.

Didaktickým skvostom je Bukyho elementárnym spôsobom poňatá učebnica teórie množín *Množiny a všeličo okolo nich* (Alfa, Bratislava 1985). Je napísaná tak, že ju môže čítať šikovný gymnazista, a pritom pokrýva nielen základný materiál univerzitného kurzu tejto teórie, no dáva nahliadnuť aj do jej pokročilejších partií spôsobom,

V relácii Pod lampou v STV, marec 2006; zľava doprava: Štefan Hríb, Pavol Brunovský, Martin Mojžiš, Pavol Zlatoš, Lev Bukovský; zdroj: archív RTVS.

Dni Kurta Gödela, Brno, január 2020; zľava doprava: Vítězslav Švejdar, Lev Bukovský, Pavol Zlatoš, Martin Vopeňka, Zuzana Bukovská, Alena Vencovská, Kateřina Trlifajová.

ktorý neodrádza čitateľa technickou náročnosťou, lež práve naopak, podnecuje jeho záujem a zvedavosť. Keď som prednášal základný kurz teórie množín, bola pre mňa táto Leova kniha veľkou inšpiráciou.

V roku 2006 som sa spolu s Pavlom Brunovským a Levom Bukovským, dvoma dnes už zvečnelými legendami slovenskej matematiky, a Martinom Mojžišom zúčastnil besedy o matematike v televíznej relácii Štefana Hríba *Pod lampou*. Keďže som tentokrát v konflikte záujmov, pokušeniu hodnotiť naše účinkovanie radšej odolám. Vari postačí, ak dodám, že účasť v tejto vyberanej spoločnosti si považujem za česť.

V januári 2020 sa v Brne konala Konferencia *Dni Kurta Gödela*. V jej rámci bola udelená cena Společnosti Kurta Gödela in memoriam Petrovi Vopěnkovi, Bukyho i môjmu veľkému učiteľovi a priateľovi. Cenu prevzal Petrov syn Martin Vopěnka. Lev bol jedným z rečníkov v rámci programu, ktorý som uvádzal. V tej povznesenej, sviatočnej atmosfére sme strávili nádherné dva dni s Leom, jeho manželkou Zuzkou a viacerými ďalšími Vopěnkovými žiakmi či pamätníkmi. Vtedy som ešte netušil, že sa vidíme naposledy.

Levov odchod je veľkou stratou nielen pre slovenskú a česko-slovenskú matematickú komunitu, ale i pre celú slovenskú akademickú obec. Stratili sme v ňom nielen prominentného matematika a skvelého učiteľa, ale tiež angažovaného intelektuála a akademického funcionára, no predovšetkým dobrého priateľa a milého a charakterného človeka.

Adresa autora:

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: `zlatos@fmph.uniba.sk`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2022 (51)

Sound and Noise. Sound Propagation in Closed and Open Space

Sós Katalin, Füredi Ákos, Nánai László

Abstract: Launched in 2014, our series of articles, *Physical Processes in Nature* [1-6], aims to provide tangible, concrete help to educators in integrated science education. In this series, we deal with phenomena affecting the sciences of physics, biology and geography and their explanations, thus helping the teaching work of a unified science approach for pedagogical colleagues. In the first article of the series, we summarized the physical characteristics of soil physics [1], the second the physical and chemical characteristics of water [2], the third the oceans and seas [3], the fourth the lakes [4], the fifth the rivers [5], and the sixth the depth characteristics of the deep waters [6]. In this article, we deal with sound as a physical phenomenon, covering its physiological effects, noise pollution, and its reduction potential.

Keywords: sound, noise

Súhrn: Naša séria článkov *Fyzikálne procesy v prírode* [1-6], ktorá bola zahájená v roku 2014, má za cieľ poskytnúť hmatateľnú a konkrétnu pomoc pedagógom v integrovanom prírodovednom vzdelávaní. V tomto seriáli sa zaoberáme javmi ovplyvňujúcimi fyziku, biológiu a geografiu, a ich vysvetľovaním napomáhame učiteľskej práci jednotného prírodovedného prístupu kolegov pedagógov. V prvom článku série sme zhrnuli fyzikálne charakteristiky fyziky pôdy [1] , v druhom fyzikálne a chemické vlastnosti vody [2], v treťom oceány a moria [3], vo štvrtom jazerá [4], v piatom rieky [5] a v šiestom charakteristiky podzemných vôd [6]. V predkladanom článku sa zaoberáme zvukom ako fyzikálnym javom, pokrývajúcim jeho fyziologické účinky, hlukové znečistenie a jeho redukčný potenciál.

Kľúčové slová: zvuk, hluk

MESC: M50

Sound is a longitudinal mechanical wave in the physical sense, and a feeling in the biological sense, which creates changes first in our auditory organs and then in our nervous system. In connection with the sound experience, we are talking about musical sound, noises (brake hearing), and noises (explosion). Noise is the sound effects that have an undesirable physiological and psychological effect on an individual, its perception strongly depends on the person's sensitivity, age, current state, and so on. [7]

For humans, sound at a frequency of 20–16000 Hz is audible, below 20 Hz we speak of infrasound, above 16000 Hz ultrasound. Infrasound occurs in nature e.g., during earthquakes, volcanic eruptions. Infrasound affects drivers, air travelers, and is even created by the blades of fans and wind turbines, which emit sound at this frequency. Since the natural frequency of many of our organs is in this frequency range, in the case of high intensity and especially long-term exposure, these organs can be damaged, which causes e.g., malaise or panic may develop. The frequency of ultrasound is too high to vibrate our organs, so it has no detrimental effect on us. Its use is significant in structural testing, in medical diagnostics, which is made possible by the fact that ultrasound suffers a significant reflection at the interface of media of different acoustic hardness. By acoustic hardness Z we mean the product of the density ρ of the medium and the velocity c of the sound in the medium: $Z = \rho\, c$. In the case of perpendicular incidence, the reflectivity R can be calculated according to the following equation:

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2, \tag{1}$$

where Z_1 resp., Z_2 is the acoustic hardness of the first resp., the second medium. The time elapsed from the emission of short-duration ultrasound pulses to the return of the reflected sound is proportional to the distance between the reflecting surfaces - so by measuring the durations, the location of the examined body tissues can also be determined. The very important industrial and medical significance of ultrasound is also contributed by the fact that it can be well bundled, has a high permeability and does not destroy the material.

Different phonological quantities have been introduced to measure and quantify sound effects.

The sound intensity I gives the sound energy flowing through a unit surface in a direction perpendicular to the surface during a unit time: $I = E/(At)$, where E is the sound energy, A is the surface area, and t is the duration of sound.

Sound pressure p is the difference between the instantaneous pressure and the static pressure.

Power of the sound source P is the sound energy emitted by the sound source in all directions in the unit of time $P = E/t$.

The value of the sound intensity spans a very large interval, since at 1 kHz frequency, the intensity of loud speech is $10^{-4}\ \mathrm{W/m^2}$, the stimulus threshold is only $10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$. Therefore, the more practical sound intensity level L_I has been introduced, which compares the intensities of two sound sources: $L_I = 10$, where I_0 is the stimulus threshold for the 1 kHz frequency sound. The unit of sound intensity level is decibels (dB).

Sound pressures can also be compared, this is given by the sound pressure level L_{p}, also in dB:

$$L_{\mathrm{p}} = 20\log_{10}\left(\frac{p}{p_0}\right), \tag{2}$$

where p_0 is the stimulus threshold for sound at a frequency of 1 kHz in sound pressure, which is 20 μPa.

Loudness level H is the sound pressure level of a 1 kHz sound that produces the same sound sensation as that sound. H is thus used to give a subjective effect on the sound effect. Its unit of measurement is phon. Man is sensitive to sounds of different frequencies in different ways, the phonoscale can reproduce this difference in sensitivity. [8,9]

The comparative quantities listed above are based on Weber-Fechner's law of psychophysics, according to which sensory strength is proportional to the logarithm of stimulus strength. However, the experience is better reflected in Stevens's law, which states that sensory strength is proportional to the fractional power of stimulus strength. Using this law, the concept of loudness N was introduced, which can also be given using the loudness level: $N = 2^{(H-40)/10}$. Its unit is the *son*. The ham scale is the most suitable for giving the perceived loudness, and it has the great advantage that in the case of several sound sources, the loudness values given in this way are added together. [10]

The intensity of sound effects is not constant over time, so the time average of the intensity levels must be given for accurate specification. This is called the equivalent intensity level L_{eqv}, which for the period $t_2 - t_1$:

$$L_{\mathrm{eqv}} = 10\log_{10}\left[\frac{1}{t_1-t_2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{I(t)}{I_0}\,\mathrm{d}t\right]. \tag{3}$$

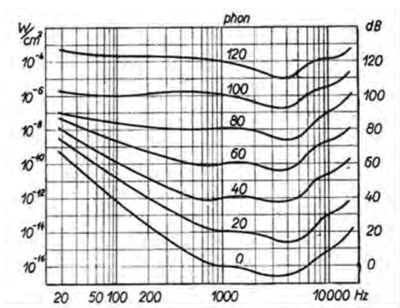


Fig.1: *Curves of the same loudness. [11]*

Finding the sound pressure levels at which sounds of different frequencies are heard with the same loudness is a difficult problem, as the subjectivity of sound sensitivity and the dependence of hearing ability on the individual must also be considered. The first such endeavors are linked to the names of Harvey Fletcher and Wilden A. Munson. Through their experiments, we can talk about curves of the same loudness, which we call Fletcher-Munson curves.

This graph shows the points with the same loudness (same phon value) and the curves connecting them in terms of frequency, sound intensity level, and intensity. The curves show a sharp frequency dependence, and it can also be seen that the human ear is most sensitive to sounds between about 2000 Hz and 5000 Hz. [12] In practice, we may encounter different weighting methods that consider different frequencies to different degrees.

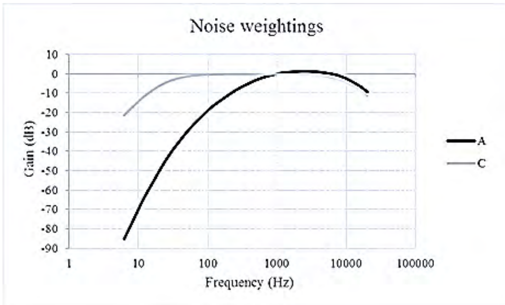


Fig.2: *Attenuation of different noise weighting methods. [13]*

The A-weighted sound intensity levels are approximately taken the highest-level value between 1000 Hz and 4000 Hz, the C-filter is used more at higher sound pressure levels (above about 100 dB), because then the sensitivity of the human ear does not change as much as a function of frequency as at low pressure levels. [12,14]

The human ear is divided into 3 major parts: outer, middle, and inner ears. The outer ear consists of the ear canal and the auditory canal. The main task of both parts was to deliver the sound wave to the middle ear, to protect the deeper parts of the body and to amplify the sound. The gain here is strongly frequency dependent.

The pressure in the sound wave fluctuates, this fluctuation causes the eardrum to vibrate. This vibration is passed on to the oval window in the inner ear by 3 tiny bones located behind the eardrum, the hammer, anvil, and stirrup, respectively. The actual organ of hearing, the snail, is located in the inner ear. The screw contains channels separated by membranes. There is fluid in the channels, which is forced by the vibrations coming to the oval window, depending on the intensity and frequency of the sound, to make different movements. One of the most important parts of the snail in terms of hearing is the Corti organ, which plays an important role in nerve remodeling through the movement of fluid in the snail. [16]

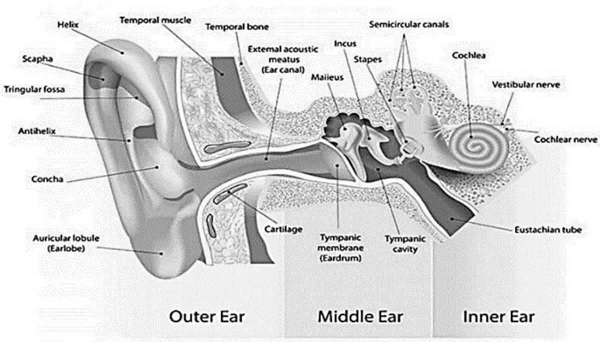


Fig.3: *Anatomy of the ear. [15]*

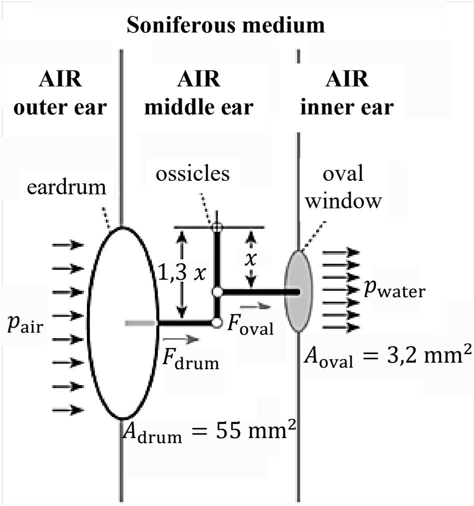


Fig.4: *Amplification processes in the ear. [17]*

The sound that reaches our ears suffers from a significant decrease in intensity, partly because it passes from a medium of low acoustic hardness (air) to a medium of high hardness (fluid network of the inner ear). Calculated with an air-water interface, the reflectivity is 0,9988, i.e., only 0,0012th of the sound intensity reaches the middle ear. This loss must be compensated for by our ears. The first step in this is at the earlobe, which due to its individual shape and topography takes approx. capable of five times the intensity gain. The following reinforcement is observed with the hammer-anvil-clamp bone system as with a one-sided hoist. The force arm at the center of the eardrum is 1,3 times the force arm at the center of the oval window, so based on the equations for lifters, the force and pressure on the oval window is 1,3 times that on the eardrum. In addition, the surface ratio of the eardrum to the oval window must be considered: due to the 17th part of the surface, the oval window is exposed to 17 times more pressure than the eardrum. Together, these two effects represent a 21-fold increase in pressure, which corresponds to a 440-fold increase in intensity due to the square ratio. [10] Together with the amplification in the cochlea, this already gives a 2200-fold increase in the incoming sound intensity, strongly compensating for the loss due to significant reflection.

There are also attenuation streams in our ears to protect against excessive sounds. In this case we can narrow the tympanic membrane with the help of a muscle and another muscle pulls the shackle away from the oval window. The sudden change in altitude and the resulting change in air pressure must also be monitored for our ears, as the eardrum can only function as intended if the pressure is the same on both sides, i.e., in the outer and middle ears. If the external pressure changes, it is also necessary to change the pressure on the other side of the eardrum through the Eustache-horn, which connects the middle ear to pharyngeal cavity. This equation is achieved by swallowing.

The sound that reaches our ears becomes noise when various physiological and psychological changes take place through the biomechanical process in triggers. The effect of noise on humans can be divided into two groups. One group includes cases where the hearing organ is directly damaged (and, for example, the hearing threshold is shifted or raised because of the damage). Noise can develop into a single sound pulse or also a continuous noise load. If the noise level does not exceed the limit value by 12 dB, the damage is only temporary, intermittent, but if it exceeds this value, permanent hearing damage occurs. [18]

The other group included psychological and other effects on the body, which are also temporary or permanent during exposure to noise, but their consequences may be present over a longer period. These may include vegetative complaints and such a narrowing of blood vessels and increased blood pressure, dilated pupils, or decreased saliva productions. In a noisy environment, our ability to concentrate decreases, we become more irritable, and the quality of sleep also deteriorates. Noise and the noisy environment are one of the biggest concerns in our modern world, and as some studies show that almost a quarter of the population in EU Member States is exposed to higher levels of noise (more than 65 dB), noise protection plays a very important role in our health. [12]

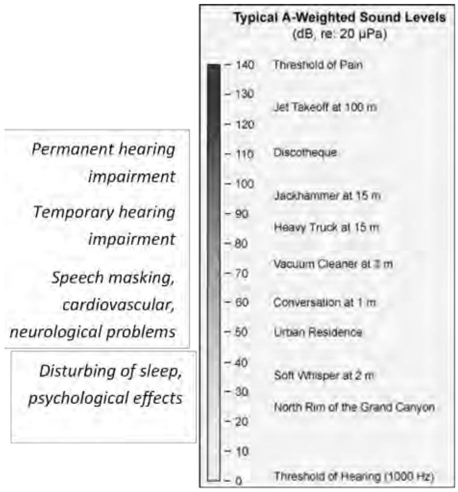


Fig.5: *Sound level values in dB and effects of noise sources. [19]*

The table shown in Fig.5 summarizes which sound source gives a strong sound effect and what value causes harmful biological effects in humans.

Much of the impact on human noise comes from traffic. Traffic noise is caused by certain parts of the vehicles (engine, body, exhaust, radiator, fan). The driving noise is mainly determined by the engine speed and the weight of the vehicles. But we can also talk about rolling and braking noise, and of course the amount of traffic (intersection, roundabout, type of vehicles, etc.) is also decisive. The type and condition of the pavements (smoothness, subdivision, flexibility, quality of the road surface, etc.) as well as the surrounding buildings from which the sound may be reflected must be taken into account.

The geometrical characteristic of the noise source is also important for the propagation of noise. In the case of traffic noise, we can encounter mainly point sources and line sources. We can talk about a point source for small engines, machines, some vehicles, or a building if it is far enough away. The simplest model of a point source is the so-called breathing sphere, which periodically changes its radius, resulting in spherical waves. The intensity of the waves is then $I_P = P/(4\pi r^2)$, where P is the power of the source, r is the distance from the source. Based on the quadratic dependence of the sound intensity-sound pressure, this means that the sound pressure is inversely proportional to the distance:

$$I_P = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{p^2}{\rho c} \to p \sim \frac{1}{r}. \quad (4)$$

A line source is a high-traffic road or a longer pipeline. In the case of linear loudspeakers, sound waves can be collected on the mantle of a cylinder, then the intensity depends on the distance: $I_{\mathrm{P}} = P/(2\pi r l)$, where P is the power of the source, r is the distance from the source, l is the length of the source. The distance dependence of the sound pressure in this case:

$$I_P = \frac{P}{2\pi r l} = \frac{p^2}{\rho c} \to p \sim \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (5)$$

The shape of the source determines e.g., the degree of sound absorption: in the case of point sources, the intensity level is reduced by 6 dB by doubling the distance, and by 3 dB in the case of an infinite line-like source. [8]

These correlations do not take into account the absorption effect of air, this is well shown by comparing the theoretical sound pressure-distance relationship with the measurement. We also performed such measurements ourselves with a PeakTech 5055 digital sound pressure level meter in the fall of 2020. The instrument was used in Hold Max mode, which gives the highest sound intensity level during the measurement (1 minute in our case). The location of the investigations in Békés county was a part of the section of road 47 connecting Csorvás and Telekgerendás, far enough away from the noise of the city. The area is almost completely flat, there is no vegetation that would be significant in sound absorption and sound distribution. According to our obtained sound pressure function, $(p/\mathrm{Pa}) \sim (r/\mathrm{m})^{-1{,}878}$, i.e., the busy road section cannot be considered as a purely point source or a purely line source, and the obtained function shows well the significant sound-absorbing effect of air.

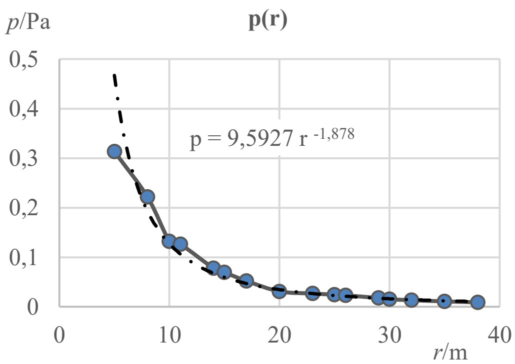


Fig.6: *Distance dependence of sound pressure.*

The amount that gives how much the sound intensity level decreases per meter in a given medium is called the attenuation factor. (The absorption factor, which gives the relative intensity reduction per unit distance, is also applied). This attenuation factor depends on the frequency of the sound: sounds with a higher frequency are better absorbed. [8,12]

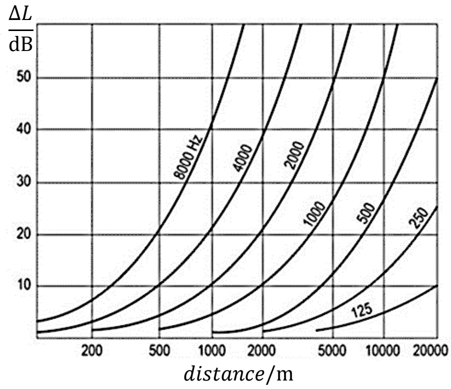


Fig.7: *Sound attenuation of air at different frequencies and at different distances. [20]*

Among the meteorological conditions, wind, temperature, humidity, and air pressure conditions must be taken into account. In the direction of the wind, the amount of sound propagation is greater, and in the case of propagation against the wind it is smaller. In general, as the height increases, so does the wind speed, and thus its modifying effect. In terms of temperature, it is important to know that the speed of sound propagation is higher in warmer air. This affects the sound propagation in such a way that if the sound arrives at a medium boundary with a different temperature, it will break according to the laws of refraction. [8,12]
The effect of humidity on the sound absorption of air is as follows: Above 2 kHz, with increasing humidity, the absorption first increases and then decreases.

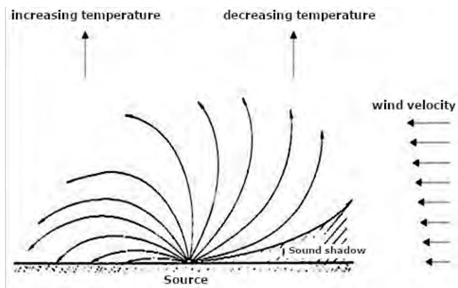


Fig.8: *The effect of meteorological conditions on noise propagation. [14]*

It may pass through vegetation as the noise propagates. In this case, additional attenuation occurs due to scattering, sound absorption and reflection on the trees and bushes that make up the vegetation. The attenuation varies for different frequencies, and obviously depends on the type and density of the vegetation and the length of the path through it. [8]

Noise propagation is influenced by the soil in the direction of propagation, its quality and other characteristics. For example, in the case of concrete, due to its hardness, we experience a small weakening, in the case of grass pasture, in the case of porous sand, a large weakening. The amount of attenuation depends on the height and distance between of the noise source and the detector The frequency of the sound is also an important factor. The phenomenon is due to the sound reflection and sound absorption observed on the earth's surface, the extent of which can vary over a wide range. [21]

The sound, when it reaches the boundary of two media (wall), is either reflected or penetrated. When sound enters the surface, part of it is lost and spread. This is to be understood as the conversion of some of its energy into heat. The remaining part reaches the other side of the wall, where a fragment is also reflected and the rest exit from the

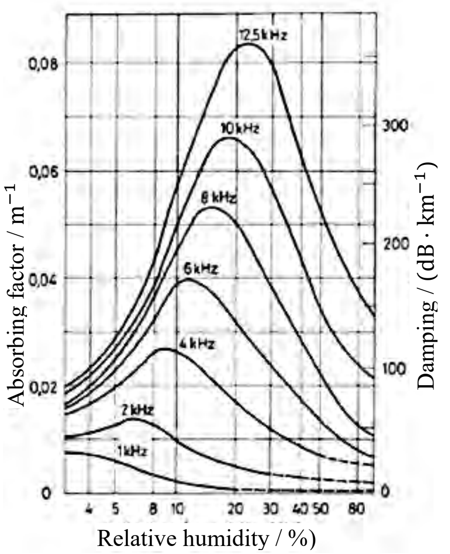


Fig.9: *Sound absorption of air as a function of humidity. [8]*

wall. The events described are characterized by various factors. [11] The reflection factor α is the ratio of the intensity of the sound I_{back} reflected from the wall to the intensity of the sound I_{in} coming to the wall: $\alpha = I_{\text{back}}/I_{\text{in}}$. The loss factor β is the ratio of the intensity of sound I_{ab} absorbed inside the wall to the sound intensity I_{in}: $\beta = I_{\text{ab}}/I_{\text{in}}$. The quotient of the sound intensity I_{trans} passing through a wall and leaving it on the other side is called the transmission factor γ: $\gamma = \mathrm{I}_{\text{trans}}/I_{\text{in}}$.

The following relationship holds to these three quantities: $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

From the incoming side, the sound is either reflected or lost. Based on this, we can talk about sound absorption, which thus gives the unbounded part of the incoming sound. The absorption coefficient δ is as follows: $\delta = \beta + \gamma$.

Membrane-coated porous materials and perforated sheets are good sound absorbers. In contrast, solid, very smooth materials are good reflectors. Examples are metal, concrete and tiles.

We can talk about noise shielding when the sound does not pass through the wall, so it is either reflected or lost in the wall. As a typical amount of this, sound insulation R can be introduced. This can be given by the sound intensity entering and passing through the wall [8,21]:

$$R = 10 \log_{10} \left(\frac{I_{\text{in}}}{I_{\text{trans}}} \right). \tag{6}$$

Less studied, but of great importance, the propagation of noise within the dwelling is of great importance. In the spring of 2021, we recorded such a noise map by measuring the sound pressure level distribution of an unfurnished family house under renovation. During the measurement, we examined the appearance of sound generated by a loudspeaker in one of the rooms of a house located far from the city center in other parts of the house. The speaker emitted sound at a frequency of 3500 Hz. Going on a 0.5 m - 0.5 m measuring grid, we measured the 1-minute maximum sound pressure level experienced there, directing the microphone of the decibel meter to the noise source. Based on the data, we recorded the noise distribution map of the house using the Surfer surface mapping program.

A number has been assigned to each comment on the result. The speaker (1) was set diagonally in the lower left corner of the figure. Immediately in front the source was measured 83 dB. According to the figure, near the speaker, in the middle of the room, a local maximum (2) was formed in terms of the sound intensity level, which is approx. 77 dB. This is due to reflections from the walls of the room. This room opens onto a corridor, it is nice to see how the sound is present in the more distant parts of the corridor (3) due to the deflection and reflection, and then it penetrates the other rooms connected to the room. There is practically a "noise corridor" (4) in the corridor. The noise map also shows that 54-56 dB can be detected in some places in the upper left room (5) because the sound from the sound source reaches one wall of the room and is reflected almost regularly in other corners of the room according to the reflection law. In all rooms, it can be observed that the sound pressure level increases locally along some of their walls. This is caused by the presence of windows, i.e., noise from the outside (6). Sound propagation in a closed medium is a complex process due multiple reflections and the location of the walls and of the walls' composition. The walls of the house, which is the site of the study, are mostly made of concrete masonry blocks and bricks. During the measurement, the wall surfaces were about half covered with plaster, and there was no tile covering. The floor was paved with concrete everywhere without tiles. Based on these, as there are many solid, high-hardness concrete elements, significant reflection is expected, although the presence of plaster will certainly reduce the extent of this.

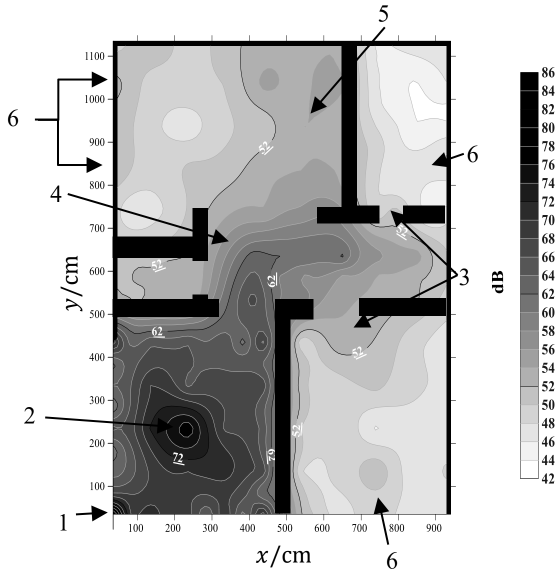


Fig.10: *Noise distribution map of a private house.*

As many studies have shown, one of the most significant but not serious health effects of today is noise exposure. However, it is not impossible to defend against it, it only requires good traffic management, good vehicle and road planning, and architectural technology that is also attentive to noise effects. We hope that the engineers and physicists of the future will take this into account in their design and construction work.

L i t e r a t u r e - R e f e r e n c e

[1] Sós Katalin, Nánai, László, Physical Processes in Nature – The Soil, *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, volume 43, number 4, pages 37-43, ISSN 1335-4981, 2014.
[2] Sós Katalin, Nánai, László, The Physical Processes in Nature – The Water, *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, volume 45, number 1, pages 43-49, ISSN 1335-4981, 2016.
[3] Sós Katalin, Bartyik Tamás, Nánai, László, Physical processes in Nature – Water 2. (Oceans, Seas), *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, volume 46, number 1, pages 37-48, ISSN 1335-4981, 2017.
[4] Sós Katalin, Bartyik Tamás, Nánai, László, Physical Processes in Nature – The Water 3. Physics of Lakes, *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, volume 47, number 3, pages 25-34, ISSN 1335-4981, 2018.
[5] Sós Katalin, Bartyik Tamás, Nánai, László, Physical Processes in Nature – The Water 4. Physics of Rivers, *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, volume 49, number 2, pages 35-43, ISSN 1335-4981, 2020.
[6] Sós Katalin, Bartyik Tamás, Nánai, László, Groundwater Physics, *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, volume 49, number 4, pages 39-49, ISSN 1335-4981, 2020.
[7] Ágoston Budó: Experimental Physics I., Textbook Publisher, Szeged, 1992
[8] Barótfi I .: Environmental technology. Farmer Publisher, 2000.
[9] János Erostyák, József Litz (ed.): Basics of Physics, National Textbook Publisher, Budapest, 2003
[10] Gy. Rontó - I Tarján: Basics of biophysics. Semmelweis Publishing House, Bp. 1999.
[11] http://fenyi.solarobs.csfk.mta.hu/oktatas/Akusztika/Akusztika_1_felev_2015.pdf
[12] Dr. Kiss Ádám, Dr. Tasnádi Péter: Environmental Physics, Typotex Publishing House, Budapest, 2012
[13] https://www.nti-audio.com/en/support/know-how/frequency-weightings-for-sound-level-measurements
[14] https://www.noisemeters.com/help/faq/frequency-weighting/
[15] https://beltonetristate.com/ear-anatomy-and-hearing-loss/
[16] Tarján I.: Fizika orvosok és biológusok számára. Medicina Könyvkiadó, Budapest, 1968.
[17] https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_524_Biofizika/ch04s03.html
[18] Hatta L.: A környezeti zaj hatása az emberre. OMIKK, Budapest, 2000.
[19] http://blog.drewsday.com/2010/12/loudness-and-sound-pressure-levels.html
[20] https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/kornyezettechnika-eloszo/ch07s03.html
[21] Walz G.: Zaj- és rezgésvédelem. Complex Kiadó JÜT Kft., Budapest, 2008.

Author's addresses: Sós K., Department of General and Environmental Physics JGYPK
University of Szeged, Hungary, H-6725 Boldogasszony sgt. 6.
e-mail: soska@jgypk.u-szeged.hu
Bratyik T., Department of General and Environmental Physics JGYPK
University of Szeged, Hungary, H-6725 Boldogasszony sgt. 6.
Nánai L., Department of General and Environmental Physics JGYPK
University of Szeged, Hungary, H-6725 Boldogasszony sgt. 6.
e-mail: nanai@physx.u-szeged.hu

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2022 (51)

Inovatívne formy a prístupy vo výučbe lekárskej biofyziky na LF UK v Bratislave v čase pandémie a po nej

Eva Kráľová, Michal Trnka, Martin Kopáni

Abstract: [Innovative Forms and Approaches in the Teaching of Medical Biophysics at the Faculty of Medicine, Comenius University in Bratislava During and After the Pandemic] The authors present innovative forms and approaches of the Institute of Medical Physics, Biophysics, Informatics and Telemedicine FM CU in Bratislava in the teaching of medical biophysics for medical students for the last five years. Based on the previous content of full-time teaching, theoretical and practical teaching has been modernized and enriched with the physical principles of the latest diagnostic and therapeutic methods used in medical practice. Recently, teaching has been significantly developed using information applications available at Comenius University and e-learning has been fully content-wise ensured.

Key words: medical biophysics, e-learning

Súhrn: Autori v príspevku uvádzajú inovatívne formy a prístupy Ústav lekárskej fyziky, biofyziky, informatiky a telemedicíny LFUK v Bratislave vo výučbe lekárskej biofyziky pre študentov medicíny za posledných päť rokov. Na základe predchádzajúceho zamerania prezenčnej výučby bola teoretická i praktická výučba zmodernizovaná a obohatená o fyzikálne princípy najnovších diagnostických a terapeutických metód využívaných v lekárskej praxi. V poslednom období sa podstatne rozvinula výučba s využitím informačných aplikácií dostupných na Univerzite Komenského a bol v plnom rozsahu obsahovo zabezpečený e-learning.

Kľúčové slová: lekárska biofyzika, e-learning

MESC: M50

Pandémia v predchádzajúcich takmer dvoch akademických rokoch tvrdo zasiahla vysokoškolské vzdelávanie. S novými výzvami sa musela vysporiadať aj výučba prírodovedných predmetov, u ktorých je kontaktná výučba nevyhnutná pre realizáciu experimentov na praktických cvičeniach.

Na našom pracovisku dlhodobo realizujeme teoretickú a experimentálnu výučbu lekárskej biofyziky, ktorá v koncentrovanej podobe predstavuje nevyhnutnú bázu potrebnú pre ďalšie štúdium medicíny a lekársku prax.

V minulosti sa predmet informatika vyučoval na biofyzikálnych pracoviskách lekárskych fakúlt. V podmienkach masívneho využívania informačných a komunikačných technológií (IKT) na všetkých stupňoch škôl, výučba informatiky na lekárskych fakultách postupne zanikla a pretavila sa vo forme e-learningu do ďalších odborných teoretických i klinických predmetov. Tak to je aj na našom pracovisku, kde sa vo veľkom rozsahu využíva elektronická podpora výučby všetkých vyučovaných povinných a povinne voliteľných predmetov, najmä však lekárskej biofyziky [1, 2].

Vedecko-pedagogický tím Ústavu lekárskej fyziky, biofyziky, informatiky a telemedicíny (ÚLFBFIaTM) v rokoch 2016-2021 vypracoval banku cca 5 000 testových otázok z lekárskej biofyziky v slovenskom a anglickom jazyku. Tieto sú rozdelené do 48 tematických celkov, ktoré zahŕňajú otázky z prednášok i praktickej výučby. Od akad. r. 2016/2017 testovanie vedomostí študentov realizujeme v prostredí MS Moodle.

Výučbový portál LFUK, ktorý vznikol na základe projektu MEFANET (MEdical FAculties Educational NETwork) je zameraný na rozvoj výučby lekárskych a nelekárskych zdravotníckych odborov pomocou moderných informačných a komunikačných technológií. Portál LF UK poskytuje priestor na uloženie a prezentovanie širokého spektra výučbových materiálov vytvorených pracovníkmi LF UK. Patria sem materiály rôzneho rozsahu od jednoduchých podkladov k prednáškam (handouty, prezentácie) až po komplexné pedagogické diela, ktoré môžu byť aj oficiálne uznané na LFUK. Problematika lekárskej biofyziky je na portáli reprezentovaná 30 PowerPointovými prezentáciami v slovenskom a anglickom jazyku, ktoré pokrývajú potreby výučby predmetu.

Na komunikáciu so študentmi **e-mailom,** na pridávanie študentov do teamov v **MS Teams**, na nastavovanie oprávnení pre výučbové materiály (**MS Stream, MS Forms,** ...) využívame univerzitné mailové adresy všetkých učiteľov a zapísaných študentov.

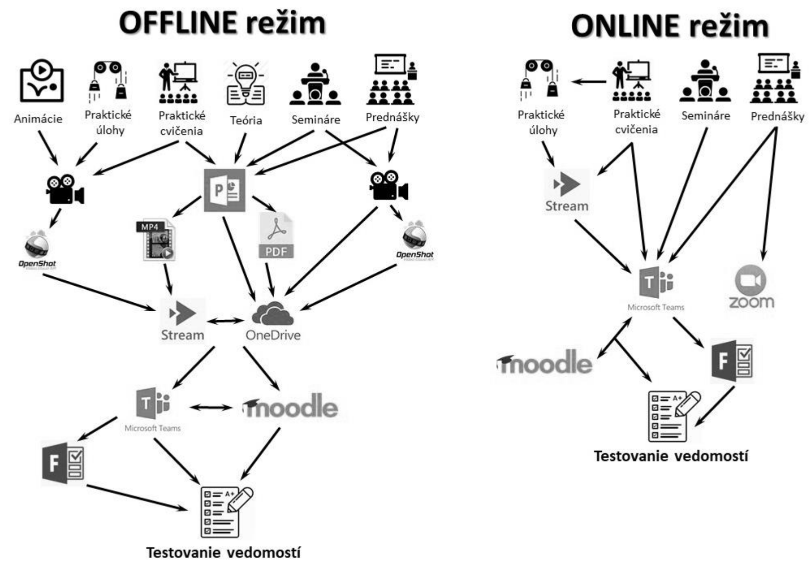
Naši učitelia majú k dispozícii všetky metodické pokyny, príručky, video-návody, tutoriály a ďalšie návody na tvorbu výučbového obsahu prostredníctvom nástrojom MS Teams, MS Forms a Learning Management System (LMS) Moodle na webovej adrese Univerzity Komenského [3, 4].

Vďaka dlhodobej spolupráci s Ústavom simulačného a virtuálneho medicínskeho vzdelávania LF UK a efektívnemu zdieľaniu prístrojového vybavenia pre potreby praktických cvičení z lekárskej biofyziky (ultrazvukové vyšetrovacie prístroje), finančnej podpore viacerých projektov KEGA riešených na našom pracovisku a s technickou podporou Výpočtového strediska LF UK sa nám v priebehu niekoľkých rokov podarilo skompletizovať základnú a nadstavbovú časť študijných materiálov na výučbu lekárskej biofyziky využiteľných v on-line, hybridnej alebo elektronicky podporovanej klasickej forme výučby [5].

Bol vypracovaný štruktúrovaný systém tzv. protokolov z experimentálnych praktických cvičení obsahujúci protokoly zo 16 experimentov v slovenskom a anglickom jazyku, ktorý sme využívali aj počas dištančnej výučby.

Komentované PowerPointové prezentácie prednášok v slovenskom a anglickom jazyku v celkovom rozsahu 30 hodín boli konvertované do videoformátu a nahraté službou video streaming – Microsoft Stream do MS Teams. Pre potreby praktických cvičení vzniklo 15 komentovaných prezentácií vysvetľujúcich biofyzikálne základy a súvislosti experimentov v trvaní 5 hodín a 20 videozáznamov s detailnými postupmi ich realizácie, ktoré boli vyhotovené v aplikácii na spracovanie a ozvučenie videí OpenShot (2,6 hodiny).

V predchádzajúcom „kovidovom" období boli tieto študijné materiály poskytnuté všetkým študentom 1. ročníka lekárskeho štúdia v prostredí MS Teams. V tejto aplikácii sa realizovali pozvánky študentov na stretnutia s vyučujúcimi na prednášky, praktické cvičenia a skúšky, priebežné testovanie v Moodle hromadnými mailami s príslušnými inštrukciami. Z vybraných stretnutí (napr. skúšky) boli vyhotovené videá a cez službu SharePoint nahraté do úložiska MS Stream, a takým spôsobom archivované (obr. 1).



Obr. 1: *Výučbový systém využívaný na LF UK v Bratislave (upravené podľa [6]).*

Naše pracovisko promptne zareagovalo na výzvu Vedenia LF UK o uskutočnení dodatočnej výučby v rámci aktivity "Letná škola", ktorá má byť kompenzáciou negatívnych dopadov epidémie Covid-19 na výučbu. Študenti by sa počas tejto Letnej školy mali venovať praktickým úlohám/zručnostiam, ktoré sa nedali v rámci dištančnej výučby uskutočniť. Študentom 1. ročníka LF UK bol zaslaný hromadný mail s informáciou, že v rezervačnom systéme Bookio sme v druhej polovici júna 2021 vypísali 4 termíny po 3 výučbové hodiny na dodatočné praktické cvičenia z lekárskej biofyziky s celkovou kapacitou 80 študentov. Vybrali sme obľúbené praktické cvičenia s priamou aplikáciou v lekárskej praxi, ako napr. ultrazvuková diagnostika (USG prístroj a meranie rýchlosti toku krvi Dopplerovou metódou), elektrokardiografia (vyhotovenie a základy vyhodnotenia záznamu EKG), biofyzikálne princípy merania tlaku krvi, meranie zrakovej ostrosti, termometria, fyzikálne princípy ochrany pred rádioaktívnym žiarením a základy merania jeho intenzity, meranie intenzity elektromagnetického žiarenia. Napriek faktu, že účastníci už absolvovali skúšku z biofyziky v zimnom skúškovom období, celkovo sa prihlásilo 30 účastníkov. Ich záujem o preberané témy bol nefalšovaný a potvrdilo sa, že výučba takého predmetu ako je lekárska biofyzika, je málo predstaviteľná bez priamej účasti študentov na praktických cvičeniach a vyžaduje si okrem osobných kontaktov so spolužiakmi a vyučujúcimi, aj nadobudnutie manuálnych experimentálnych zručností (obr. 2).

Obr. 2: *Študenti Letnej školy na Ústave lekárskej fyziky, biofyziky, informatiky a telemedicíny LF UK*

Poďakovanie

Tento text vznikol s podporou projektu KEGA 023UK-4/2021

L i t e r a t ú r a

[1] Michal Trnka, "Theoretical background for the creation of multimedia models and animations for the university teaching of medical biophysics". *ICERI 18 Proceedings. Valencia: IATED Academy*, 2018, pp. 9613-9616. ISBN 978-84-09-05948-5.

[2] Michal Trnka, Eva Kralova, "News in didactic technologies used in the teaching of Medical Biophysics in the conditions of COVID19 pandemy". *ICERI 20 Proceedings. Valencia: IATED Academy, 2020, p. 5806, ISBN* 978-84-09-24232-0.

[3] Katarína Pišútová, "Ako na online vzdelávanie *(How to learn online),"* 2020. [Internet]. Bratislava (SK): Comenius University. Available from: https://uniba.sk/fileadmin/ruk/cit/e-learning/S14-01-Ako_na_online_vzdelavanie.pdf [Last updated 5 May 2021].

[4] Centrum informačných technológií UK v Bratislave, "Prieskumy o dištančnej výučbe na UK (Surveys on distance learning in the UK)." [Internet]. Bratislava (SK): Comenius University. Available from https://uniba.sk/elearning/. [Last updated 5 May 2021].

[5] Eva Kralova, "Motivation of medical students to study physical, chemical and biological sciences – survey results". *EDULEARN 17, 9th annual International Conference on Education and New Learning Technologies. Conference proceedings* [electronic source*]. Valencia: IATED Academy, 2017*, pp. 9220-9223. ISBN 978-84-697-3777-4.

[6] Michal Trnka, Eva Kralova, "Didactic technologies and resources used at the Faculty of Medicine Comenius University in Bratislava". *EDULEARN 21, 13th annual International Conference on Education and New Learning Technologies. Conference proceedings* [electronic source*]. Valencia: IATED Academy, 2021*, pp. 9039-9242. ISBN 978-84-09-31267-2.

Adresa autora: Eva Kráľová, Ústav lekárskej fyziky, biofyziky, informatiky a telemedicíny LF UK v Bratislave, Sasinkova 2, 813 72 Bratislava,
e-mail: eva.kralova@fmed.uniba.sk
Michal Trnka, Ústav lekárskej fyziky, biofyziky, informatiky a telemedicíny LF UK v Bratislave, Sasinkova 2, 813 72 Bratislava,
e-mail: michal.trnka@fmed.uniba.sk
Martin Kopáni, Ústav lekárskej fyziky, biofyziky, informatiky a telemedicíny LF UK v Bratislave, Sasinkova 2, 813 72 Bratislava,
e-mail: martin.kopani@fmed.uniba.sk

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2022 (51)

Buckinghamov Π-teorém, rozmerová analýza, fyzikálne podobné systémy

Aba Teleki

Abstract: Dimensional analysis is a method for reducing complex physical problems to their simplest form before quantitative analysis or experimental research. Buckingham's Π-theorem describes a formal method of expressing these simplest forms. Dimensional analysis is well applicable in many ways in research-based education. One of the forms is experimentation for students in order to find qualitative and quantitative connections between physical quantities through natural phenomena in order to discover valid physical relationships.

Key words: dimensional analysis, homogeneity, physical equations, Buckingham's Π-theorem

Súhrn: Rozmerová analýza je metóda na redukciu zložitých fyzikálnych problémov na ich najjednoduchšiu formu pred kvantitatívnou analýzou alebo experimentálnym skúmaním. Buckinghamova Π-teorém popisuje formálnu metódu, ako vyjadriť tieto najjednoduchšie formy. Dimenzionálna analýza je v mnohých ohľadoch dobre použiteľná vo vzdelávaní založenom na výskume. Jednou formou je experimentovanie, aby žiaci našli kvalitatívne aj kvantitatívne súvislosti medzi fyzikálnymi veličinami prostredníctvom prírodných javov, cieľom objaviť platné fyzikálne vzťahy.

Kľúčové slová: rozmerová analýza, homogenita, fyzikálne rovnice, Buckinghamov Π-teoréem

MESC: M50

1. Úvod

Žiaci sa s pojmom *fyzikálny rozmer* stretnú ešte na základnej škole. Pri riešení fyzikálnych úloh robia rozmerovú skúšku, inými slovami, kontrolujú, či pri riešení sa nepomýlili a nenarušili homogenitu fyzikálnych vzorcov. Rozmerová analýza, pokročilejšia forma rozmerovej skúšky dovolí bádať, a nachádzať vzťahy medzi fyzikálnymi veličinami, ktoré popisujú fyzikálne javy. Je mimoriadne vhodná metóda, aby sa žiaci vzdelávali metódou založenom na výskume, kde oni skúmajú prírodné javy a objavujú nie len kvalitatívnu, ale aj ich kvantitatívnu formu.

Homogenita fyzikálnych vzorcov, vzťahov medzi fyzikálnymi veličinami, dovoľujú robiť veľmi podstatné závery o týchto vzťahoch, čo sa rozpoznalo relatívne skoro. Tento nástroj fyziky dnes poznáme ako *rozmerová analýza,* či *dimenzionálna analýza* a jeho historické začiatky nie sú príliš prebádané.[1] Myšlienka rozmerov a homogenity pochádza pravdepodobne z geometrie z dôb Descarta a Newtona. Rozpoznalo sa, že dĺžka úsečky sa nedá sčítať s plochou, či s objemom. Dôležitá úloha homogenity pramení v geometrickej podobnosti. Vieme napríklad, že ak trojuholník $\Delta\mathrm{ABC}$ je podobný trojuholníku $\Delta\mathrm{A'B'C'}$, dĺžky príslušných strán sú v tom istom pomere

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k \tag{1}$$

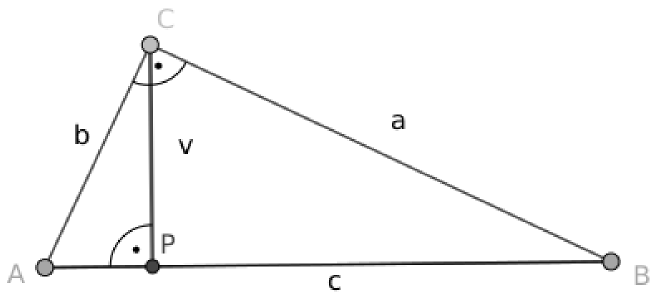
a pomer plôch týchto trojuholníkov je v pomere

$$\frac{S'}{S} = k^2. \tag{2}$$

Stupeň homogenity obvodu trojuholníka je iný, ako stupeň homogenity jeho plochy.

Obdobné platí pre trojrozmerné vzájomne podobné objekty. Ak ich zodpovedajúce lineárne rozmery sú v pomere k, potom ich objemy sú v pomere k^3.

V homogenite spočíva jeden z jednoduchých dôkazov Pytagorovej vety: stačí zostrojiť výšku v nad preponou c, ako ukazuje obr. 1.



Obr. 1: *Pravouhlé trojuholníky $\Delta ABC \sim \Delta BCP \sim \Delta CAP$, sú podobné, preto pre ich plochy (indexujeme preponou príslušných trojuholníkov) S_c, S_a a S_b platí $S_c = S_0 c^2$, $S_a = S_0 a^2$, $S_b = S_0 b^2$, kde S_0 je plocha podobného trojuholníka s dĺžkou prepony 1. Z konštrukcie výšky v je zrejmé, že trojuholník ΔABC je zložený z trojuholníkov ΔBCP a ΔCAP, teda $S_c = S_a + S_b$. Využitím homogenity dostaneme slávnu Pytagorovu vetu*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Dôležitú úlohu homogenity fyzikálnych rovníc zhrnul francúzsky matematik a fyzik J. B. Joseph Fourier v koncepcii, ktorá sa dnes uplatňuje v medzinárodnej sústave fyzikálnych jednotiek SI. Fourier svoje úvahy obmedzil na jednotku dĺžky [2], ale sú platné všeobecne a v modernejšom ponímaní môžeme vyjadriť nasledovne:

1) Odvodená fyzikálna jednotka je vyjadrená základnými jednotkami jednoznačne;
2) Fyzikálne vzorce vyjadrujú vzťah medzi fyzikálnymi veličinami a tieto vzorce nezávisia na fyzikálnych jednotkách, ktorými sú fyzikálne veličiny vyjadrené;
3) Ak vo fyzikálnych vzorcoch fyzikálne veličiny nahradíme ich hodnotami (vyjadrených v príslušných jednotkách), rovnosť je stále splnená;
4) Uvedené vlastnosti vyžadujú, aby rovnica bola homogénna pre všetky základné fyzikálne jednotky – tj. ak fyzikálna jednotka j je prítomná, je prítomná v podobe j^D, kde exponent D je číslo.

Bod 3) tvrdí nasledujúce. Nech fyzikálna veličina

$$f = x\, j_1^D j, \tag{3}$$

kde f je fyzikálna veličina (napríklad plocha), x je bezrozmerné číslo (napr. 7,1), j_1 je jedna jednotka (napríklad jednotka dĺžky, *meter*) a D je dimenzia (exponent pre plochu $D = 2$, teda j_1^D predstavuje *meter štvorcový*, m^2), kým j je súbor ostatných jednotiek (pokiaľ fyzikálna veličina ich obsahuje – tu je prázdna množina). Preškálujme jednotku j_1 na j_1' (meter vyjadríme v napr. centimetroch), kde

$$k_1 = \frac{j_1'}{j_1} \tag{4}$$

je bezrozmerné číslo (napr. $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}} = 0{,}01$). Následne fyzikálna veličina vyjadrená v nových jednotkách

$$f = x' {j_1'}^D j = x' k_1^D\, j_1^D j = x\, j_1^D j \tag{5}$$

V našom príklade plochy $S = 7{,}1 \times 10^4\ \mathrm{cm}^2 = 7{,}1\ \mathrm{m}^2$. Inými slovami, ak veličiny vyjadríme v správnych jednotkách na oboch stranách, číselná hodnota obidvoch strán je rovnaká (aj keď táto hodnota sa mení v závislosti od použitých jednotiek). Pomer pravej a ľavej strany je však (3) aj (5) je bezrozmerné číslo rovné 1.

Fourier správne rozpoznal úlohu fyzikálnych rozmerov, aj požiadavku homogenity kladenú na fyzikálne rovnice. Napriek tomu, nevie sa o tom, že by bol rozvíjal metódy rozmerovej analýzy. Pravdepodobne poznal o 6 desaťročí staršiu prácu Lagrangeovho študenta Francoisa Davieta de Foncenex publikovanú v roku 1761, kde sa uvádza rozmerový argument pri skladaní síl v mechanike. de Foncenexov argument sa následne objavuje aj u francúzskeho fyzika S. D. Poissona [3], a myšlienka homogenity v geometrii u francúzskeho matematika A.-M. Legendra [4].

O moderné rozvíjanie rozmerovej analýzy sa zaslúžil škótsky fyzik J.C Maxwell, ktorý bol presvedčený, že základnými fyzikálnymi veličinami sú vzdialenosť, čas a hmotnosť – všetky ostatné veličiny sú odvodené.

Vlastnosť 3 vyjadrená vzťahmi (4) a (5) sú príčinou, že v rozmerovej analýze používame pre základné fyzikálne rozmery špeciálne symboly.

základná veličina	základná jednotka (značka)	symboly fyzikálneho rozmeru
čas	sekunda (s)	T
dĺžka	meter (m)	L
hmotnosť	kilogram (kg)	M
elektrický prúd	ampér (A)	I
termodynamická teplota	kelvin (K)	Θ
látkové množstvo	mól (mol)	N
svietivosť	kandela (cd)	J

Tab. 1: *Základné fyzikálne jednotky a značenie príslušných fyzikálnych rozmerov podľa Medzinárodného úradu pre miery a váhy (International Bureau of Weights and Measure (BIPM)).[4]*
Na všetkých sedem základných veličín sa pozerá, ako na fyzikálne veličiny s vlastnou dimenziou (fyzikálnym rozmerom).

Jedným z prvých známych použití rozmerových úvah pre získanie fyzikálneho vzťahu urobil lord Rayleigh, pri odvádzaní rozptylu svetla na molekulách a malých čiastočkách (pomenovaný po ňom).[6] Jeho metóde dal zovšeobecnenú matematickú formu na vybraných príkladoch francúzsky matematik Joseph Bertrand [7], neskôr francúzsky fyzik Aimé Vaschy sformuloval koncepciu matematického dôkazu Buckinghamovho Π-teorému (matematickú vetu Francúzi nazývajú Vaschyho-Buckinghamov teorém)[8]. Matematickú stránku *Buckinghemovho* Π*-teorému* objavil a dokázal aj A.K. Federman [9], a tiež fyzik D. *Riabouchinsky ruského pôvodu, tiež nezávisle od Buckinghamu [10]. Edgar Buckingham sa zaslúžil o jasnú formuláciu problematiky pre fyzikálne systémy neobmedzujúc sa len na špeciálne oblasti (napr. mechaniku).[11] Názov teorému (*Π*-teorém) vznikol z jeho označenia bezrozmerných fyzikálnych veličín vo svojom článku symbolom* $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$.

2. Buckinghamov Π-teorém

Rozmerovú skúšku pozdvihne na novú úroveň Buckinghamov Π-teorém, ktorý hovorí, že každá zmysluplná fyzikálna rovnica n fyzikálnych veličín $Q_1, \ldots, Q_n$ je možné napísať rovnocenným spôsobom, ako rovnicu s $k = n - m$ bezrozmerných veličín, kde m je maximálny počet rozmerovo nezávislých veličín Q. Tento počet v jednoduchých prípadoch sa rovná počtu základných fyzikálnych rozmerov, ktoré potrebujeme k vyjadreniu spomínaných n fyzikálnych veličín (ale nie vždy).

Uvažujme napríklad rovnicu pre kruhovú frekvenciu kmitov (ω) závažia hmotnosti m na ideálnej pružine s tuhosťou k

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{6}$$

kde ľavá strana má konštantnú hodnotu pre konkrétne závažie a konkrétnu pružinu, ale výraz nie je bezrozmerný, preto závisí jej hodnota na voľbe fyzikálnych jednotiek. Rovnicu môžeme písať aj v tvare

$$\sqrt{\frac{m\omega^2}{k}} = 1, \tag{7}$$

kde fyzikálne rozmery (dimenzie podľa tab. 1)

$$\begin{aligned} [m] &= \mathrm{M}, \\ [\omega] &= \mathrm{T}^{-1}, \\ [k] &= \mathrm{M\,T}^{-2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Počet fyzikálnych veličín vstupujúcich do fyzikálnej rovnice (7) je $n = 3$, kým počet základných fyzikálnych dimenzií je 2. Počet bezrozmerných premenných, ktorými podľa Buckinghamovho Π-teorému môžeme popísať uvažovaný fyzikálny systém rovnocenným spôsobom, je $k = n - m = 1$. Túto bezrozmernú premennú π_1 môžeme zvoliť v tvare, ako je uvedené na ľavej strane (7), ale nakoľko je bezrozmerná veličina, môžeme ľubovoľným spôsobom umocniť a zvoliť príhodnejší tvar, napr.

$$\pi_1 = m\omega^2 k^{-1}. \tag{9}$$

Zoberme teraz jeden zložitejší príklad, keď m je maximálny počet rozmerovo nezávislých fyzikálnych veličín vystupujúcich vo fyzikálnej rovnici, a líši sa od počtu základných fyzikálnych rozmerov vystupujúcich vo fyzikálnom vzorci. Takým príkladom je napr. stavová rovnica pre ideálny plyn

$$\frac{pV}{nRT} = 1, \tag{10}$$

kde p je tlak plynu, V je jeho objem, n je látkové množstvo, T je termodynamická teplota plynu a R je univerzálna plynová konštanta. Pre ich fyzikálne rozmery (dimenzie máme)

$$\begin{aligned} [p] &= \mathrm{M\,L^{-1}\,T^{-2}}, \\ [V] &= \mathrm{L^3}, \\ [n] &= \mathrm{N}, \\ [R] &= \mathrm{M\,L^2\,T^{-2}\,\Theta^{-1}\,N^{-1}}, \\ [T] &= \Theta. \end{aligned} \tag{11}$$

Počet fyzikálnych veličín v rovnici (10) je $n = 5$, počet základných fyzikálnych rozmerov je 5. Najväčší počet rozmerovo nezávislých veličín je však len $m = 4$. Sú to napr. V, n, R, T, lebo rozmer tlaku sa dá ich rozmermi vyjadriť

$$[p] = [n][R][T][V]^{-1}. \tag{12}$$

Povieme preto, že veličina Q je rozmerovo závislá od $Q_1, \dots, Q_m$ ak existujú exponenty $a_1, \dots, a_m$, že

$$[Q] = [Q_1]^{a_1}[Q_2]^{a_2} \dots [Q_m]^{a_m}. \tag{13}$$

V opačnom prípade je Q rozmerovo nezávislá od veličín $Q_1, \dots, Q_m$. Ak teraz máme celkom n veličín $Q_1, \dots, Q_n$, je evidentné, že bude medzi nimi existovať m takých, že ich pomocou sa budú dať rozmerovo vyjadriť všetky. Bez ujmy na všeobecnosti, môžeme ich usporiadať tak, že sú to prvých m veličín, teda $Q_1, \dots, Q_m$.

V uvedených dvoch príkladoch vyššie bol počet potrebných bezrozmerných veličín k popisu fyzikálneho vzťahu 1, a fyzikálna rovnica sa dala potom písať v tvare

$$K\pi_1 = 1, \tag{14}$$

kde K je bezrozmerná konštanta, ktorá nie je závislá na hodnote fyzikálnych veličín, a v sústave homogénnych fyzikálnych jednotiek (akou je napr. Medzinárodná sústava SI), ani na zvolených jednotkách, v ktorých sa fyzikálne veličiny vyjadria.

2.1 Fyzikálne predpoklady

Najdôležitejším krokom rozmerovej analýzy je úvodná fyzikálna analýza. Cieľom je popísať konkrétny fyzikálny vzťah popisujúci fyzikálnu situáciu. K tomu je treba vymenovať tie fyzikálne veličiny, ktoré hrajú úlohu. V jednoduchých prípadoch, keď počet vstupujúcich fyzikálnych veličín je malý, rozmerová analýza pôsobí aj ako „filter“ nesprávnych výberov. Môžeme ilustrovať na príklade kmitov závažia hmotnosti m na pružine tuhosti k. Pri analýze by jeden mohol predpokladať, že kruhová frekvencia kmitov ω bude závisieť tiež od gravitačného zrýchlenia g. Rozmer zrýchlenia však obsahuje rozmer dĺžky $[g] = \mathrm{L\,T^{-2}}$, kým žiadna z ostatných veličín (viď (8)) rozmer dĺžky neobsahuje, preto sú dve možnosti:

1) kruhová frekvencia ω nezávisí od g;
2) kruhová frekvencia závisí na g a tiež na inej veličine, ktorá rozmer dĺžky obsahuje, napr. dĺžku pružiny l.

V druhom prípade by sme mali počet veličín $n = 5$ a počet nezávislých rozmerov $m = 3$, počet potrebných nezávislých bezrozmerných veličín by bol $n - m = 2$. Tomuto prípadu sa vrátime neskôr. Sú však prípady, keď vylúčenie nevhodnej veličiny je jednoduchšie, než v prípade pružiny – napríklad v prípade matematického kyvadla.

2.1.1 Jedna bezrozmerná premenná

Najjednoduchším a najviac obľúbeným prípadom je, keď $k = n - m = 1$, tj. keď popis fyzikálnej situácie si vystačí jedinou bezrozmernou premennou. Takým príkladom je matematické kyvadlo.

Prvotný fyzikálny rozbor hovorí, že v prípade matematického kyvadla kmitajúceho vo vákuu v homogénnom gravitačnom poli máme len 3 veličiny, ktoré môžu ovplyvniť kmitanie kyvadla: hmotnosť hmotného bodu na konci kyvadla (m), pevnú dĺžku kyvadla (l) a gravitačné zrýchlenie homogénneho gravitačného poľa (g). Všeobecný vzťah pre dobu kmitu môžeme vyjadriť v tvare

$$T = f(m, l, g), \tag{15}$$

kde f je funkcia troch premenných. Formálne môžeme písať tiež v tvare

$$1 = F(T, m, l, g) \tag{16}$$

Fyzikálne rozmery príslušných fyzikálnych veličín sú

$$\begin{aligned} [T] &= \mathrm{T}, \\ [m] &= \mathrm{M}, \\ [l] &= \mathrm{L}, \\ [g] &= \mathrm{L\,T^{-2}} \end{aligned} \tag{17}$$

Podľa Buckinghamovho Π-teorému máme počet veličín $n = 4$, kým počet nezávislých (tu základných) fyzikálnych rozmerov je $m = 3$ (T, L, M), počet bezrozmerných veličín je 1. Bezrozmernú veličinu označíme π_1, teda bude

$$\pi_1 = T^{a_1} m^{a_2} l^{a_3} g^{a_4}, \tag{18a}$$
$$1 = [T]^{a_1} [m]^{a_2} [l]^{a_3} [g]^{a_4}, \tag{18b}$$
$$1 = \mathrm{T}^{a_1} \mathrm{M}^{a_2} \mathrm{L}^{a_3} (\mathrm{L\,T^{-2}})^{a_4} = \mathrm{T}^{a_1 - 2a_4} \mathrm{L}^{a_3 + a_4} \mathrm{M}^{a_2}. \tag{18c}$$

Rozmer π_1 sa v základných dimenziách dá písať ako $[\pi_1] = \mathrm{T}^0\mathrm{L}^0\mathrm{M}^0$. Posledná z rovníc (17) znamená samozrejme rovnosť exponentov, tj.

$$\mathrm{T}: a_1 - 2a_4 = 0, \tag{19a}$$
$$\mathrm{L}: a_3 + a_4 = 0, \tag{19b}$$
$$\mathrm{M}: a_2 = 0. \tag{19c}$$

V bezrozmernej veličine π_1 je možné jednému z exponentov priradiť konkrétnu hodnotu, napr. $a_j = 1$. Tu musíme byť opatrní, lebo keby sme položili $a_2 = 1$, dostaneme sa v rovnici (19c) do rozporu. Rovnica (19c) touto cestou hovorí, že hmotnosť m závažia nevstupuje do vzťahu medzi periódou kmitov (T) a ostatných veličín. V ostatných rovniciach (19a) a (19b) jeden z exponentov, ktorýkoľvek z a_1, a_3 alebo a_4, môžeme zvoliť za 1. Väčšinou zvolíme ten exponent, exponent tej veličiny, ktorú chceme vyjadriť pomocou ostatných. Ak chceme vyjadriť dobu kmitu T pomocou l a g, zvolíme $a_1 = 1$. Ak chceme vyjadriť g pomocou T a l, zvolíme $a_4 = 1$. (Videli sme, že niekedy sa dostaneme k sporom, preto musíme byť obozretní.) Zvoľme teda $a_1 = 1$, potom

$$a_4 = \frac{1}{2}, \qquad a_3 = -a_4 = -\frac{1}{2}. \tag{20}$$

Bezrozmernú veličinu π_1 takto budeme mať v tvare

$$\pi_1 = T\sqrt{g/l}. \tag{21}$$

Vzťah (16) bude mať, vďaka nezávislosti na hmotnosti m, tvar

$$1 = F(T, l, g). \tag{22}$$

Na základe Buckinghamovho Π-teorému túto rovnicu (s tromi premennými, T, l a g) možno rovnocenným spôsobom vyjadriť pomocou bezrozmernej veličiny π_1. Počet bezrozmerných premenných je v tomto prípade len jeden, teda

$$1 = \Phi(\pi_1). \tag{23}$$

Rovnocenným spôsobom môžeme vychádzať aj z rovnice $T = f(l, g)$, kde sme vo vzťahu (15) už vypustili písanie hmotnosti m. Túto rovnicu vynásobíme $\sqrt{g/l}$, čím ľavá strana sa zmení na samotnú bezrozmernú veličinu π_1 a dostaneme

$$\pi_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}\, f(\mathrm{l}, \mathrm{g}) = \phi(1), \tag{24}$$

kde posledná rovnosť na pravej strane je riešením rovnice (23). Pre podobné systémy sa hodnota π_1 nemení, nezávisí na voľbe jednotiek, preto odpoveď na otázku, aký je vzťah doby kmitu T s ostatnými veličinami je,

$$\pi_1 = K = konšt., \quad (25a)$$
$$T = K\sqrt{(l/g)}. \quad (25b)$$

Konštantu K môžeme zistiť z experimentov, alebo môžeme odhadnúť na základe iných znalostí. Realizácia experimentu je veľmi jednoduchá a je vhodná pre bádanie žiakov, pre stanovenie presného fyzikálneho zákona pomocou experimentu. V tomto prípade môžeme využiť aj toho, že prvotný návrh pre definíciu metra bolo matematické kyvadlo s pol periódou rovnajúcej sa jednej sekunde $(T/2) = 1$ s, ktorého dĺžka mala byť potom presne 1 m.[1]

2.1.2 Dve a viac bezrozmerných premenných

V prípade, keď $k = n - m > 1$, postup zostáva rovnaký, a lepšie ukazuje všeobecný postup. Príkladom môžu poslúžiť tzv. kapilárne vlny. Rozhranie kvapaliny (vody) a vzduchu (alebo inej kvapaliny) sa môže vlniť, a toto vlnenie sa šíri určitou fázovou rýchlosťou v (tj. hovoríme nie o rýchlosti molekúl vody, či vzduchu, ale o rýchlosti šírenia napr. maxima výchylky rozhrania medzi vodou a vzduchom – fázovej rýchlosti).

Fyzikálny rozbor je relatívne jednoduchý. Vlny vznikajúce na hladine vody majú dvojaký pôvod. Za prvé, povrchové napätie sa snaží vyrovnať nerovnosti na povrchu kvapaliny (minimalizuje energiu rozhrania), a v gravitačnom poli „vydutia“ na rozhraní kvapaliny a vzduchu majú väčšiu potenciálnu energiu, než časti na nižšej hladine. Vlny samotné charakterizujú dve nezávislé veličiny, napr. vlnová dĺžka (λ) a frekvencia (f), alebo vlnová dĺžka λ a fázová rýchlosť $v = \lambda f$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme zvoliť za charakterizáciu vlny fázovú rýchlosť v a vlnové číslo $k = 2\pi/\lambda$. Podľa toho, čo sme uviedli, môžeme spojenie očakávať s povrchovým napätím γ, s hustotou vody (hustota vzduchu je zanedbateľne malá v porovnaní s hustotou vody), a s gravitačným zrýchlením g. Ich vzťah môžeme matematicky vyjadriť zápisom

$$1 = F(v, k, \gamma, \rho, g) \quad (26a)$$

a konkrétne nás môže zaujímať závislosť

$$v = f(k, \gamma, \rho, g). \quad (26b)$$

Fyzikálne rozmery jednotlivých veličín sú

[1] Táto definícia sa ale veľmi rýchle ukázala ako nevhodná pre závislosť tiažového zrýchlenia od zemepisnej šírky, aj od nadmorskej výšky.

$$
\begin{aligned}
[v] &= \mathrm{L\,T^{-1}},\\
[k] &= \mathrm{L^{-1}},\\
[\gamma] &= \mathrm{M\,T^{-2}},\\
[\rho] &= \mathrm{M\,L^{-3}},\\
[g] &= \mathrm{L\,T^{-2}}.
\end{aligned} \tag{27}
$$

Všimnime si, že rozmer hmotnosti majú len dve veličiny, povrchové napätie γ a hustota ρ, preto v bezrozmerných veličinách π (bez vypisovania indexu) môžu vystupovať jedine v kombinácii (γ/ρ), a to potvrdí aj všeobecný postup (bežne sa také zjednodušenie použije hneď na začiatku, aby sa znížil počet parametrov analýzy).

Bezrozmerné veličiny π budú mať tvar

$$\pi = v^{a_1}k^{a_2}\gamma^{a_3}\rho^{a_4}g^{a_5}, \tag{28a}$$

$$1 = [v]^{a_1}[k]^{a_2}[\gamma]^{a_3}[\rho]^{a_4}[g]^{a_5}, \tag{28b}$$

$$1 = (\mathrm{L\,T^{-1}})^{a_1}(\mathrm{L^{-1}})^{a_2}(\mathrm{M\,T^{-2}})^{a_3}(\mathrm{M\,L^{-3}})^{a_4}(\mathrm{L\,T^{-2}})^{a_5} \tag{28c}$$

$$1 = \mathrm{T}^{-a_1-2a_3-2a_5}\,\mathrm{L}^{a_1-a_2-3a_4+a_5}\,\mathrm{M}^{a_3+a_4} \tag{28d}$$

Predbežne by sme mohli povedať, že počet veličín je 5 a počet základných rozmerov je 3,čo naznačuje, že systém bude popísaný dvomi bezrozmernými veličinami π_1 a π_2. Rozhodujúca je ale sústava rovníc vyplývajúca z (28d)

$$\mathrm{T}: a_1 + 2a_3 + 2a_5 = 0, \tag{29a}$$

$$\mathrm{L}: a_1 - a_2 - 3a_4 + a_5 = 0, \tag{29b}$$

$$\mathrm{M}: a_3 + a_4 = 0. \tag{29c}$$

Aby $m = 3$, sústava rovníc musí obsahovať 3 lineárne nezávislé rovnice. Sústava rovníc (29) má hodnosť 3 (čo je rigoróznym vyjadrením, že $m = 3$). Môžeme zvoliť dvojicu bezrozmerných veličín ($k = n - m = 2$). Voľbu prevedieme voľbou exponentov a_j, pomocou ktorých vyjadríme ostatné. Vyjadrime exponenty a_3, a_4, a_5 pomocou a_1, a a_2. Dostaneme

$$4a_3 = a_1 - 2a_2, \tag{30a}$$

$$4a_4 = -a_1 + 2a_2, \tag{30b}$$

$$4a_5 = -a_1 - 2a_2. \tag{30c}$$

Za a_1 a a_2 zvolíme konkrétne hodnoty, aby sme dostali π_1 a π_2. Bežne sa volia hodnoty 1, môžeme zvoliť ale aj iné hodnoty. Zvoľme hodnoty takto:
pre π_1 $a_1 = 2,\ a_2 = 0$,
pre π_2 $a_1 = 0, a_2 = 1$.

$$\pi_1 = \left(\frac{\rho}{\gamma g}\right)^{\frac{1}{2}} v^2, \qquad \pi_2 = \left(\frac{\gamma}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}} k \tag{31}$$

Vzťah fyzikálnych veličín popisujúcich kapilárne vlny je podľa Buckinghamovho Π-teorému vystihnutý vzťahom

$$1 = \Phi(\pi_1, \pi_2). \tag{32a}$$

Našim cieľom bolo vyjadriť fázovú rýchlosť v. Z (26b) dostaneme (využitím vety o implicitných funkciách na (32a))

$$\pi_1 = \phi(\pi_2), \text{ teda } v^2 = \left(\frac{\gamma g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \phi(\pi_2). \tag{32b}$$

Analytické riešenie fyzikálneho problému (vyjadrenie fázovej rýchlosti kapilárnych vĺn) môžeme nájsť napr.v [12] §62, str. 245

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho} k. \tag{33}$$

Po porovnaní s (32b) vidíme, že výsledok skutočne zodpovedá (32b) danému Buckinghamovim Π-teorémom

$$v^2 = \left(\frac{\gamma g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\pi_2} + \pi_2\right) = \left(\frac{\gamma g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\rho g}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{k} + \left(\frac{\gamma g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}} k. \tag{34}$$

Štruktúru funkcie ϕ (resp. f) sme neobdržali z Buckinghamovho Π-teorému, ale určité jej vlastnosti môžeme získať aj z rozmerovej anlýzy. Ak uvažujeme len o malých vlnách, ktoré vyvolajú napr. korčuliarky pohybujúce sa na hladine vody, potom rozhodujúci vplyv má len povrchové napätie γ, gravitačné zrýchlenie nehrá úlohu. Východiskovým bodom rozmerovej analýzy je závislosť $1 = F(v, k, \gamma, \rho)$, počet potrebných nezávislých bezrozmerných veličín je len jeden ($n - m = 1$). Dostaneme

$$v^2 = K_\gamma \frac{\gamma}{\rho} k, \tag{35a}$$

kde K_γ je bezrozmerná konštanta.

V prípade veľmi veľkých vĺn, aké sú napríklad na moriach, povrchové napätie nehrá podstatnú úlohu. Východiskovým bodom rozmerovej analýzy je teraz $1 = F(v, k, g)$. Závislosť na hustote tu nie je z rozmerových dôvodov (nie je závislosť na povrchovom napätí). Aj v tomto prípade je počet potrebných bezrozmerných veličín jeden. Dostaneme

$$v^2 = K_g \frac{g}{k}, \tag{35b}$$

kde K_g je bezrozmernou konštantou.

Získali sme teda odpoveď na otázku, ako sa asymptoticky chová funkcia ϕ v 32b). Rozmerová analýza aj v tomto prípade dáva správnu odpoveď:
$\phi(x) \approx K_g x$ pre $x \gg 1$ a $\phi(x) \approx K_\gamma / x$ pre $x \ll 1$.

2.2 Praktický postup vo všeobecnom prípade

Predpokladajme, že daný jav je popísaný n veličinami $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, teda

$$1 = F(Q_1, \dots, Q_n). \tag{36}$$

Z uvedených veličín je rozmerovo nezávislých m. Nakoľko počet základných fyzikálnych rozmerov v sústave SI máme 7, $m \leq 7$.

Podľa Buckinghamovho Π-teorému je fyzikálny jav popísaný, ako dôsledok homogenity fyzikálnych rovníc, rovnocenným spôsobom $k = n - m$ bezrozmernými fyzikálnymi veličinami $\pi_1, \dots, \pi_k$ v tvare

$$1 = \Phi(\pi_1, \dots, \pi_k). \tag{37}$$

Cieľom je zostavenie uvedených k bezrozmerných veličín $\pi_1, \dots, \pi_k$.

Bezrozmerné veličiny π_j majú tvar

$$\pi_j = Q_1^{a_{j1}} Q_2^{a_{j2}} \dots Q_n^{a_{jn}}, \quad j = 1, \dots, n - m. \tag{38}$$

Rozmerová časť (26)

$$[\pi_j] = 1 = [Q_1]^{a_{j1}} [Q_2]^{a_{j2}} \dots [Q_n]^{a_{jn}}. \tag{39}$$

Vyjadríme $[Q_k]$ pomocou základných fyzikálnych rozmerov a získame tak celkom m rovníc, ktoré môžeme písať v maticovom tvare

$$\boldsymbol{DA} = \boldsymbol{0} \tag{40a}$$

kde

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m \times 1}. \tag{40b}$$

Matica $\boldsymbol{D}$, pri jej zostavovaní, môže mať viac riadkov, ale jej hodnosť je m, preto sme napísali len rozhodujúce riadky. Pomedzi veličín $Q_1, \dots, Q_n$ vyberieme $k = n - m$ veličín, ktorých bezrozmerné verzie budú tvoriť bezrozmerné veličiny $\pi_1, \dots, \pi_k$.

Bez ujmy na všeobecnosti budeme predpokladať, že to sú veličiny $Q_1, \dots, Q_k$, a rovnice (40) prepíšeme do tvaru

$$\boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{D}_2 \boldsymbol{A}_2 \tag{41a}$$

kde

$$\begin{gathered}\boldsymbol{D}_1 = \begin{pmatrix} d_{1\,k+1} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m\,k+1} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix}_{m\times m}, \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{m\times 1}, \\ \boldsymbol{D}_2 = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mk} \end{pmatrix}_{m\times k}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}_{k\times 1}.\end{gathered} \tag{41b}$$

Riešením (41a) je

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{D}_1^{-1} \boldsymbol{D}_2 \boldsymbol{A}_2. \tag{42}$$

Vyriešením sústavy rovníc (40) môžeme vyjadriť bezrozmerné veličín π_j takto

$$\begin{aligned} \pi_1 &= Q_1 Q_{k+1}^{a_{1\,k+1}} \dots Q_n^{a_{1n}}, \\ \pi_2 &= Q_2 Q_{k+1}^{a_{2\,k+1}} \dots Q_n^{a_{2n}}, \\ &\vdots \\ \pi_k &= Q_k Q_{k+1}^{a_{k\,k+1}} \dots Q_n^{a_{kn}}. \end{aligned} \tag{43}$$

Jednotlivé riadky (43) sme obdržali konkrétnou voľbou vektora $\boldsymbol{A}_2$. Pre prvý riadok (43) $\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{tr}} = (1,0,0, \dots ,0)$, pre druhý riadok $\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{tr}} = (0,1,0, \dots ,0)$, a tak podobne pre ostatné riadky.

2.2.1 Vlastnosti riešení

Bezrozmerné fyzikálne veličiny $\pi_1, \dots, \pi_k$ popisujú fyzikálny jav v tvare (37) $1 = \Phi(\pi_1, \dots, \pi_k)$, ale $\pi_1, \dots, \pi_k$ vytvárajú spolu grupu a sú nezávislé, a z toho vyplývajú určité možnosti.

1) Rovnica (37) je rovnocenná s rovnicou

$$1 = \Phi_1\left(\pi_1^{x_1}, \pi_2^{x_2}, \dots, \pi_k^{x_k}\right), \tag{44a}$$

kde $x_1, \dots x_k$ sú nenulové reálne čísla. Inými slovami, ľubovoľnú premennú π môžeme umocniť na ľubovoľný nenulový exponent. Samozrejme, potom je funkcia Φ_1 iná než bola funkcia Φ v (37).

2) V rovnici (37) môžeme vynásobiť ľubovoľný z bezrozmerných argumentov π s ľubovoľnou nenulovou konštantou a (37) bude rovnocenná s rovnicou

$$1 = \Phi_2(K_1\pi_1, K_2\pi_2, \dots, K_k\pi_k) \tag{44b}$$

Samozrejme, funkcia Φ_2 je iná, než bola funkcia Φ v (37).

3) Každý bezrozmerný argument (37) môže byť násobením (delením) kombinovaný s ľubovoľným počtom z ostatných bezrozmerných argumentov, napr.

$$1 = \Phi_3(\pi_1, (\pi_1\pi_2), \pi_3, \dots, \pi_k). \tag{44c}$$

Samozrejme, funkcia Φ_3 je iná, než bola funkcia Φ v (37).

4) Na základe vety o implicitných funkciách, pre každú z bezrozmerných argumentov (37) existuje príslušná funkcia ϕ_j, že

$$\pi_j = \phi_j(\pi_1, \dots, \pi_{j-1}, \pi_{j+1}, \dots, \pi_k). \tag{44d}$$

3 Záver

Buckinghamov Π-teorém je abstraktným matematickým nástrojom fyziky. V najjednoduchších prípadoch, keď fyzikálny systém sa dá popísať jedinou bezrozmernou veličinou, je jeho použitie veľmi jednoduché. Fyzikálny jav popíše úplne až na jednu bezrozmernú konštantu. Určenie tejto bezrozmernej konštanty je vynikajúcim nástrojom pre experimentálne bádateľské aktivity žiakov na základných aj stredných školách. Pri týchto bádateľských aktivitách žiaci sa dopracujú (experimentovaním) k všeobecne platným fyzikálnym zákonom. Objavujú ich ako dôsledok uvažovania o závislosti javu od konkrétnych fyzikálnych veličín a experimentovania. Dôležité je, že experimentovanie (v prípade všetkých skúmaných javov) má spoločný bádateľský základ, rozmerovú analýzu. Tento spoločný základ pomáha žiakom vidieť pozorované javy prírody v určitom spoločnom kontexte (v systéme vzťahov medzi veličinami).

Literatúra – References

[1] Roberto de A. Martins, The Origin of Dimensional Analysis, *Journal of The Franklin Institute*, vol. 311, No. 5, pp. 331-337, May 1981 (a zdroje tam citované)

[2] J.B.Joseph Fourier: *Théorie du mouvement de la Chaleur dans les corps solids*, Mem. Acad. R. Sci., Vol. 4, pp. 185-555, 1819-20; Online: https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Fourier/Fourier_pdf/Mem1820_p153_246.pdf (prístup 17.03.2022)

[3] S.D.Poisson, *Traité de Méchanique*, 1. diel, 2 vydanie, Bachelier, 1833, Paríž; Online: https://archive.org/details/traitdemcani01pois (prístup 17.03.2022)

[4] A.M. Legendre, *Éléments de Géométrie*, 12. vydanie, Didot, 1823 Paríž; Online: https://archive.org/details/lmentsdegomtrie02legegoog (prístup 17.03.2022)

[5] International Bureau of Weights and Measure (BIPM): The International System of Units (SI), 9-te vydanie, ISBN 978-92-822-2272-0;
Online: https://www.bipm.org/documents/20126/41483022/SI-Brochure-9.pdf/fcf090b2-04e6-88cc-1149-c3e029ad8232 (prístup 17.03.2022)

[6] Peter Pesic, *Sky in a Bottle*, MIT Press pp. 227-8, ISBN 978-0-262-16234-0; online: https://archive.org/details/skyinbottle00pesi/page/227 (prístup 17.03.2022)

[7] Joseph Bertrand, Sur l'homogénéité dans les formules de physique, Comptes Rendus, vol 86, No. 15, 1878, pp. 916-920; Online https://archive.org/details/comptesrendusheb86acad (prístup 18.03.2022)

[8] Aimé Vaschy, Sur les lois de similitude en physique. *Annales Télégraphiques*. 19, 1892, 25–28. Online: https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=uiug.30112098055970&view=1up&seq=31&skin=2021 (prístup 18.03.2022)

[9] *Федерман, А.(A. Federman) О некоторых общих методах интегрирования уравнений с частными производными первого порядка. Известия Санкт-Петербургского политехнического института императора Петра Великого. Отдел техники, естествознания и математики (*Proceedings of the Saint-Petersburg polytechnic institute. Section of technics, natural science, and mathematics) vol *16, No. 1, pp. 97–155, 1911;*
Online: http://gidropraktikum.narod.ru/Federman.djvu, (prístup 18.03.2022)

[10] Dimitri P. *Riabouchinsky.. Méthode des variables de dimension zéro et son application en aérodynamique. L'Aérophile: 407–408, 1911; Online:* http://gidropraktikum.narod.ru/Riabouchinsky-Aerophile-1911.djvu, (prístup 18.03.2022)

[11] Edgar Buckingham, On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical Review*. vol. 4, No. 4, pp. 345–376, 1914; Online: https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=uc1.31210014450082&view=1up&seq=905 (prístup 18.03.2022)

[12] L.D.Landau, E.M. Lifshitz: *Theoretical Physics*, vol. 6 Fluid Mechanics, 2nd edition,, Pergamon Press, Oxford, 1987, pp.539

Adresa autora: Aba Teleki, Schurmannova 27, 949 01 Nitra;
e-mail: JSMFteleki@gmail.com

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2022 (51)

INFORMÁCIE

Správa z medzinárodných súťaží v informatike 2020/21

Asi nikoho neprekvapí, že rovnako ako všetky kolá našej národnej Olympiády v informatike, tak aj všetky medzinárodné súťaže v roku 2021 prebiehali čisto online. Toto malo aj svoje výhody, obzvlášť tú, že odpadli starosti s logistikou. V niektorých prípadoch sa súťažiaci do súťaží mohli zapojiť doslova z pohodlia vlastného domova. No medzinárodné súťaže zďaleka nie sú len o samotnom riešení úloh. Možno ešte dôležitejšie je budovanie medzinárodnej komunity podobne zmýšľajúcich ľudí. Priateľstvá a známosti z takýchto súťaží často pretrvávajú roky a vedia výrazne ovplyvniť budúci osobný aj profesionálny život účastníkov. A netreba zabudnúť ani na to, že už samotnú účasť na takýchto súťažiach naši mladí reprezentanti berú ako istú formu odmeny za úspešnú kvalifikáciu. O túto odmenu bol aktuálny ročník súťažiacich pripravený. Nevieme s tým bohužiaľ nič robiť, ostáva len dúfať v priaznivý vývoj pandémie a čo najskorší návrat do sveta, v ktorom budú môcť súťaže prebiehať plnohodnotne.

Nižšie uvádzam prehľad medzinárodných súťaží, ktorých sa naši súťažiaci zúčastnili, a výsledkov, ktoré dosiahli. Oproti klasickým dvom (IOI a CEOI) pribudol ešte prvý pilotný ročník Stredoeurópskej dievčenskej olympiády v informatike (EGOI) a mali sme aj jednu mladú účastníčku na Európskej olympiáde juniorov v informatike (EJOI).

Stredoeurópska dievčenská olympiáda v informatike (EGOI 2021)

Prvý ročník Stredoeurópskej dievčenskej olympiády v informatike (EGOI) bol organizovaný zo Švajčiarska v dňoch 3. až 9. júna 2021. Treba však podotknúť, že aj za značnej pomoci slovenských organizátorov: Michal Forišek bol členom medzinárodného organizačného výboru a počas EGOI bol zvolený do tejto pozície aj na nasledujúce dva roky. Monika Steinová bola členkou medzinárodnej odbornej komisie. Väčšina testerov súťažných úloh bola zo Slovenska: do testovania sa zapojili Eduard Batmendijn, Peter Fulla, Ján Hozza, Lukáš Poláček aj Jakub Šafin. Ako vedúca delegácie Slovensko počas súťaže reprezentovala naša ďalšia bývalá súťažiaca Paulína Smolárová.

S radosťou môžeme konštatovať, že v slovenskej OI máme šikovných dievčat dosť, a tak sa o slovenskej reprezentácii na EGOI rozhodovalo až na celoštátnom kole OI. Pozvánku na túto akciu nakoniec dostali všetky štyri úspešné riešiteľky CK OI v uplynulom ročníku. Všetky štyri sa súťaže aj zúčastnili. Súťaž prebehla online, Lenka teda súťažila z Košíc a ostatné súťažiace z Bratislavy. Výsledky uvádzame v tabuľke.

poradie (medaila)	**meno**	**škola**	**spolu (max 800)**
3. (zlatá)	Eliška Macáková	Súkr. gym. Cenada BA	675
66. (bronzová)	Ela Vojtková	Gym. Grösslingová BA	292
69. (bronzová)	Lenka Hake	Gym. Alejová Košice	280
128.	Šárka Macáková	SZŠ Cenada BA	77

Obrovskú radosť nám samozrejme spravil Eliškin skvelý výsledok, ale aj ostatné súťažiace podali výborné výkony a v medzinárodnej konkurencii (157 súťažiacich zo 43 prevažne Európskych krajín) sa rozhodne nestratili. O to viac nás teší, že iba Lenka už bola v maturitnom ročníku: Ele ešte ostáva rok strednej školy, Eliške tri a Šárke dokonca päť rokov, počas ktorých nás môže reprezentovať na stredoškolských informatických súťažiach.

Otázka podpory dievčat v informatike je komplexná a táto správa nie je miestom na nejaké hlbšie úvahy o nej. Obmedzím sa preto len na konštatovanie, že ohlasy na EGOI zo zúčastnených krajín (vrátane našich súťažiacich) boli veľmi pozitívne a že som presvedčený, že táto nová súťaž našla dobrú formu podpory a motivácie mladých informatičiek. Druhý ročník tejto novej súťaže sa podujalo organizovať Turecko, tretí ročník by sa potom mal konať vo Švédsku.

Medzinárodná olympiáda v informatike (IOI 2021)

Druhý rok po sebe Medzinárodnú olympiádu v informatike (IOI) organizoval Singapur, tento ročník od 19. do 25. júna 2021. A druhý rok po sebe sa (na veľké sklamanie organizátorov) napriek pôvodným nádejam súťaž nepodarilo zorganizovať prezenčne, a tak rovnako ako vlani prebiehala online. Michal Forišek sa "zúčastnil" ako vedúci delegácie a na zasadnutí delegátov bol na roky 2022 – 24 zvolený do medzinárodnej odbornej komisie IOI.

Súťaž síce prebiehala online, ale samozrejme za pomerne prísnych bezpečnostných opatrení: organizátormi dodané virtuálne mašiny so súťažným prostredím, povinné nahrávanie obrazoviek súťažiacich aj kamerové záznamy miestností, kde súťažia, a podobne.

Nový problém, ktorý so sebou priniesla online realizácia súťaže, boli časové pásma: keďže všetci súťažiaci riešili súťaž v tom istom čase, bolo nutné, že každá delegácia bude musieť niektoré aktivity robiť v nie zrovna bežných časoch. My sme mali šťastie v tom, že samotné časy súťaže boli v našom časovom pásme cez deň, a tak si súťažiaci nepotrebovali prispôsobovať svoj spánkový režim. Vedúci delegácie si však v menej príjemných časoch "užil" zasadnutia delegátov, preklady zadaní súťažných úloh a iné bežné súčasti programu IOI.

Do súťaže sa zapojil rekordný počet súťažiacich: 351 súťažiacich z 88 rôznych krajín sveta. Slovensko reprezentovala najlepšia štvorica z výberového sústredenia po celoštátnom kole OI (ktoré, ako všetko ostatné, tiež prebehlo čisto online). Ich výsledky uvádzame v tabuľke nižšie.

poradie (medaila)	**meno**	**škola**	**spolu (max 600)**
11. (zlatá)	Matej Urban	Gym. Grösslingová BA	443
60. (strieborná)	Adam Rajský	Gym. Jura Hronca BA	318
161. (bronzová)	Eliška Macáková	Súkr. gym. Cenada BA	209
221.	Jakub Konc	Gym. Párovská Nitra	180

Budúci ročník IOI organizujú Filipíny, po nich prídu na rad Maďarsko a Egypt.

Európska olympiáda juniorov v informatike (EJOI 2021)

Európsku olympiádu juniorov v informatike (EJOI) môžu riešiť len súťažiaci v čase konania súťaže mladší ako 15 a pol roka. Aktuálny (celkovo piaty) ročník bol organizovaný z Rumunska 24. až 28. augusta 2021, ale rovnako ako všetky ostatné súťaže prebehol online. Slovensko do súťaže vyslalo jednu súťažiacu: Šárku Macákovú, jedinú základoškoláčku, ktorá v aktuálnom ročníku zvládla postúpiť na CK OI. Celkovo sa do súťaže zapojilo 107 oficiálnych a porovnateľne veľa neoficiálnych súťažiacich. Súťažné úlohy ešte boli pre Šárku priťažké, ale zabojovala s nimi a získala dôležité skúsenosti do budúcich rokov. Celkovo sa jej podarilo získať 73 bodov (zo 600) a v oficiálnom poradí obsadila 80. miesto.

Stredoeurópska olympiáda v informatike (CEOI 2021)

Stredoeurópsku olympiádu v informatike (CEOI) v tomto kalendárnom roku organizovalo Chorvátsko. Chorvátski organizátori netajili sklamanie nad skutočnosťou, že ani CEOI nemohla prebehnúť prezenčne, o to viac si však dali záležať na odbornej stránke súťaže, ktorú pripravili skutočne veľmi kvalitne. Ako už býva na CEOI zvykom, súťažné úlohy boli veľmi náročné, ako celok dokonca o čosi ťažšie ako sada použitá na IOI. (Z možných 600 bodov len najlepší traja súťažiaci dosiahli aspoň 400.) Michal Forišek sa CEOI "zúčastnil" ako vedúci delegácie.

Výsledky našich súťažiacich uvádzame v tabuľke. Celkovo sa súťaže zúčastnilo 48 súťažiacich. Okrem členských krajín CEOI boli tento rok pozvané ešte reprezentácie Rakúska, Švajčiarska a Talianska.

poradie (medaila)	**meno**	**škola**	**Spolu (max 600)**
10. (strieborná)	Adam Rajský	Gym. Jura Hronca BA	307
19. (bronzová)	Eliška Macáková	Súkr. gym. Cenada BA	228
34.	Jakub Konc	Gym. Párovská Nitra	170
37.	Ján Gottweis	Gym. Matky Alexie BA	116

Budúci ročník CEOI by malo organizovať Nemecko.

Linky na celé poradia súťaží:

- `https://egoi.ch/en/results/`
- `https://stats.ioinformatics.org/results/2021`
- `https://sepi.ro/ejoi/ejoi-competition-results/2021`
- `https://ceoi.hsin.hr/ranking/Ranking.html`

Michal Forišek[2]

[2] Predseda Slovenskej komisie Olympiády v informatike, `misof@ksp.sk`.

SPOMÍNAME

doc. RNDr. Tibor Gál, CSc. (10.07.1938 – 08.11.2021)

Pán docent Tibor Gál sa narodil 10. 7. 1938 v Rimavskej Sobote.

Doc. RNDr. Tibor Gál, CSc.

Jedenásťročnú strednú školu absolvoval v rokoch 1953-1956 v Šafárikove.

Vysokoškolské štúdium absolvoval v dvoch častiach. Najskôr v rokoch 1956-1958 na Vyššej pedagogickej škole v Bratislave, na ktorú nadviazal na Vysokej škole pedagogickej v Bratislave v odbore matematika-fyzika. Štúdium ukončil roku 1961.

Jeho profesionálna činnosť pokračovala na Katedre fyziky Pedagogického inštitútu v Nitre, kde nastúpil 1-ho septembra 1963, po ukončení povinnej vojenskej služby. Patril medzi zakladajúcich členov novej katedry, a jeho práca významnou mierou prispela nielen k začiatočnému formovaniu katedry, ale najmä k jej rozvoju počas niekoľkých desiatok rokov. Od začiatku sa plne venoval, vtedy ešte v zložitých podmienkach novej fakulty a novej katedry, o odborný rast prostredníctvom kvalitnej vedeckej a výskumnej činnosti.

Externú vedeckú ašpirantúru na Baníckom ústave Maďarskej akadémie vied v Budapešti absolvoval v období 1974-1978, pod vedením medzinárodne známeho vedca prof. Dr. Istvána Cornidesa. Dizertačnú prácu *Szikraforrás vizsgálata és alkalmazása teljes elemzésre*[3] obhájil úspešne v roku 1978.

Akademický titul doktora prírodných vied (RNDr.) získal na dvoch vysokých školách, na Eötvös Lórand Tudomány Egyetem (ELTE) v Budapešti a následne aj na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave v odbore Aplikovaná fyzika.

---

[3] Vyšetrovanie iskrového zdroja a jeho využitie v analytike.

V roku 1980 obhájil habilitačnú prácu *Vyšetrovanie niektorých problémov vzniku komplexných iónov v iskrovom iónovom zdroji z hľadiska hmotnospektrometrickej analýzy*.

Od nástupu na Katedru fyziky prednášal všeobecnú fyziku a viedol semináre a cvičenia študentov maďarského oddelenia. Roky usmerňoval pedagogickú prax na maďarskom oddelení katedry a tiež zahraničnú prax pre všetkých študentov katedry. Pracoval v štátnicových komisiách katedry.

Postupne sa vypracoval medzi popredných pracovníkov Pedagogickej fakulty v Nitre, a bol poverený aj riadiacou činnosťou vo funkcii prodekana pre pedagogickú prácu a národnostné vzdelávanie.

Vo funkcii prodekana pôsobil znova aj po roku 1990, keď r. 2003 prispel aj k založeniu novej Fakulty stredoeurópskych štúdií, kde sa venoval prednostne národnostnému vzdelávaniu.

V oblasti vedeckej činnosti , na začiatku svojej pedagogickej činnosti, sa zúčastnil rôznych úspešných projektov, ako člen rôznych vedeckých kolektívov.

Vedecká ašpirantúra v Budapešti jasne smerovala je vedeckú aktivitu do oblasti hmotnostnej spektrometrie Riešil problematiku analýzy nevodivých pevných látok. Zúčastnil sa na vybudovaní laboratória hmotnostnej spektrometrie . Prvá fáza budovania laboratória hmotnostnej spektrometrie prebehla v rokoch 1974-78, keď sa vybudovala časť na vyhodnotenie fotografických záznamov získaných hmotnostným spektrometrom iskrovým iónovým zdrojom v Budapešti. Vyhodnocovanie sa realizovalo pomocou mikrofotometra.

V druhej fáze sa budoval inštaloval hmotnostný spektrometer s iskrovým iónovým zdrojom, a docent Gál pripravoval vzorky na meranie, analyzoval vzorky a chemicky pripravoval záznamy pre mikrofotometrické vyhodnotenie a analyzoval namerané údaje pre vedecké spracovanie. Výsledky boli publikované v medzinárodných vedeckých časopisoch.[4] Na danú dobu sa jednalo o výnimočnú medzinárodne uznávanú vedeckú činnosť, ktorá vznikala na pôde inštitúcie, ktorej poslaním bola príprava budúcich učiteľov fyziky. Do svojej vedeckej činnosti zapájal aj študentov buď vo forme študentských vedeckých činností, keď ich pripravoval na študentské vedecké konferencie, alebo keď ich pripravoval ako diplomantov, čo sa prejavilo aj v publikáciách, kde jeho študenti boli spoluautormi. Poukazovalo to na veľmi

---

[4] Len ilustratívny výčet:
Spark Source Mass Spectrometrc Studies of Al_xO_y Species High. Temp. Sci., 10, 171 (1978);
Mass Spectrometric Investigation of some Plasmic Chemical Reactios in the Spark Discharge (zborník Nitra);
Spark Source Spass Spectrometric of Ga_xO_y Species High Temp. Sci., 14, 71 (1981).

pokrokový charakter inštitúcie, v ktorej svojou činnosťou formoval s kolegami vedecké aktivity.

Bol členom JSMF, v Spektrometrickej spoločnosti zastupoval vo výbore hmotnostno-spektrometrických pracovníkov Slovenska.

Medzi charakteristiky pána docenta, ako sme ho vnímali, možno uviesť najmä jeho priateľskú povahu, ochotu a porozumenie vo vzťahu k spolupracovníkom i študentom. Vysoko sa cení jeho práca na formovaní (aj zachovaní) národnostného školstva. Touto cestou prispel k príprave učiteľov pre stovky základných a stredných škôl s vyučovacím jazykom. Viackrát prispel k zachovaniu tohto štúdia, aj v časoch, keď tieto činnosti nemali požadovanú podporu zo strany vyšších orgánov.

O jeho pestrý spoločenský charakter hovorí, že bol kurátorom v Reformovanej kresťanskej cirkvi, kde mal mimoriadne zásluhy na budovaní internátu pre študentov.

Medzi jeho osobné záľuby patril šport, veľmi rád sa venoval turistike a najmä futbalu.

Mal usporiadaný rodinný život. Vychoval tri dcéry, ktoré získali vysokoškolské vzdelanie. V posledné roky života ho postihli tragédie opakovane, keď stratil dve dcéry. Táto tragédia ho zdravotne silne zlomilo, a celý život zdravý človek sa vydal na cestu za svojimi dcérami.

Česť Tvojej pamiatke, Tibor.

Ladislav Morvay

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2022 (51)

Život a dielo Milana Demka (1963 – 2021)

Milan Demko, PhD.

Výnimočný kolega a pedagóg! Celú svoju profesionálnu dráhu spojil s prípravou budúcich učiteľov v Prešove na Fakulte humanitných a prírodných vied (FHPV), predtým na Pedagogickej fakulte. Naposledy pôsobil vo funkcii vedúceho oddelenia matematiky Katedry fyziky, matematiky a techniky FHPV Prešovskej univerzity. Pred organizačnou reštrukturalizáciou bol vedúcim katedry matematiky.

Pochádzal z rodiny učiteľky a elektroinštalatéra. V rokoch 1984–89 študoval učiteľstvo v Prešove, aprobáciu matematika-základy techniky.

Doktorandské štúdium v odbore Algebra a teória čísel absolvoval pod vedením akademika Jána Jakubíka na MÚ SAV. Dizertačnú prácu s názvom „*Usporiadané kvazigrupy*" obhájil v roku 2001.

Vo svojej vedeckej práci Milan Demko nadviazal na výsledky o zväzovo usporiadaných grupách a napoly zväzovo usporiadaných grupách. Pracoval s čiastočne usporiadanými kvazigrupami, špeciálne s lineárne usporiadanými kvazigrupami a s lineárne usporiadanými lupami. Predovšetkým sa zaoberal rozkladmi týchto štruktúr na lexikografický súčin. Jeho výsledky prehĺbili dovtedajšie poznatky. Podarilo sa mu, napr. v práci [1], zovšeobecniť niektoré výsledky maďarsko-amerického matematika László Fuchsa a v spolupráci so Štefanom Černákom v práci [2] iným spôsobom dokázať tvrdenie, ktoré niekoľko rokov pred nimi publikoval Ján Jakubík. Výsledky o čiastočne usporiadaných kvazigrupách v prácach [3] a [4] našli ohlas v Japonsku. Vedomosti z algebraických štruktúr Milan Demko zúročil v globálnej analýze, napr. v prácach [5], [6] pri popise štruktúry priestorov zväzkov čiastočne usporiadaných kvazigrúp, resp. pri definovaní štruktúry hlavného fibrovaného priestoru na jetových prolongáciách priestorov repérov.

Výsledky svojej práce prezentoval na medzinárodných konferenciách doma i v zahraničí. Pravidelne sa zúčastňoval letných škôl z algebry a usporiadaných množín a letných škôl z globálnej analýzy, kde bol spoluorganizátorom. Zo zahraničných ciest môžeme spomenúť konferencie v Tartu (Estónsko), Mulhouse (Francúzsko) a tiež pobyt na univerzite v Talline (Estónsko), kde viedol sériu prednášok z problematiky, ktorej sa venoval.

Bohaté skúsenosti z vyučovania matematiky viedli Milana k vytvoreniu nástroja pomenovaného „Matematický semafor". Tento nástroj je určený na diagnostiku a stimuláciu exekutívnych funkcií žiakov. Jeho opis, fungovanie a ciele sú uvedené v monografii [7] a tiež v prácach [8] a [9]. Aktuálne pracoval na príprave učebného textu matematiky pre študentov prírodovedných odborov nadväzujúceho na text [10].

Vďaka svojej rozhľadenosti a erudovanosti v matematike a tiež ľudskému prístupu k študentom bol vyhľadávaným a obľúbeným školiteľom záverečných prác študentov. Nemálo času venoval práci s talentovanou mládežou, najmä v súvislosti s organizačným a odborným zabezpečením Matematickej olympiády (MO). Niekoľko rokov viedol celoslovenskú komisiu pre tvorbu úloh MO na základných školách. Niektoré svoje skúsenosti z pôsobenia v MO uviedol v práci [11]. Dlhé roky viedol inštruktážne semináre pre učiteľov stredných škôl k MO v Prešovskom kraji a zúčastňoval sa na metodických dňoch učiteľov matematiky v tomto regióne.

Nevyhol sa, žiaľ, zákernému koronavírusu, ktorý ho vytrhol z plodného života a ktorému po približne mesačnom zápase podľahol.

Krásne vystihla Milana jedna z jeho tohtoročných diplomantiek Mgr. Tatiana Polomská. V epilógu knižočky priloženej k práci nakreslila portrét svojho školiteľa a napísala:

> *„Toto je Milan Demko. Bol učiteľom na vysokej škole a učil študentov milovať matematiku. Plný nadšenia im rozprával príbehy z histórie matematiky ... Učil ich, že matematika je o hľadaní, bádaní a len zvedavý človek dokáže byť matematikom. Mal vždy veľa dobrých nápadov a táto knižka bola jedným z nich. Nech je táto knižka pozdravom do nebeskej matematickej siene slávy. Dovidenia, pán doktor Milan Demko!"*

Spolu s ňou vyslovujeme:

Dovidenia, Milan, opäť niekde!

A pridávame: Ďakujeme za všetko, veľmi chýbaš!

Za kolegov a spolupracovníkov

Ján Brajerčík, Mária Majherová, Peter Mlynárčik[5], *Emília Halušková*[6]

[5] Katedra fyziky, matematiky a techniky, Fakulta humanitných a prírodných vied, Prešovskej univerzity v Prešove, Ul. 17. novembra č. 1, 08001 Prešov,
e-mail: jan.brajercik@unipo.sk, maria.majherova@unipo.sk, peter.mlynarcik@unipo.sk.
6 Detašované pracovisko Matematického ústavu SAV v Košiciach, Grešákova 6, 04001 Košice
e-mail: ehaluska@saske.sk.

Literatúra – References

Demko, M.: Lexicographic product decompositions of half lineary ordered loops. Czech. Math. J., 57, No. 2 (2007) 607-629.

Černák, Š., Demko, M.: Lexico extension and a cut completion of a half l-group. Discuss. Math., Gen. Algebra Appl. 22, No. 2 (2002) 141-152.

Demko, M.: On congruences and ideals of partially ordered quasigroups. Czech. Math. J., 58, No. 3 (2008) 637-650.

Demko, M.: Lexicographic product decompositions of partially ordered quasigroups, Math. Slovaca 51, No. 1 (2001) 13-24.

Brajerčík, J., Demko, M.: On sheaf spaces of partially ordered quasigroups. Quasigroups and related systems 22, No. 1 (2014), 51-58.

Brajerčík, J., Demko, M., Krupka, D.: Principal bundle structure on jet prolongations of frame bundles. Math. Slovaca, 64, No. 5 (2014), 1277-1290.

Kovalčíková, I. (et al.): Diagnostika a stimulácia kognitívnych a exekutívnych funkcií žiaka v mladšom školskom veku. Vydavateľstvo Prešovskej univerzity, 1. vyd., 2015, 216 s. ISBN 978-80-555-1540-3.

Brajerčík, J., Demko, M., Kresila, J., Prídavková, A.: Stimulácia exekutívneho fungovania žiaka pomocou nástroja Matematický semafor. In: Prírodné vedy, vzdelávanie a spoločnosť [elektronický zdroj]. Katedra fyziky, matematiky a techniky, FHPV PU v Prešove, 2015, 64-69. ISBN 978-80-971450-4-0.

Prídavková, A., Kresila, J., Demko, M., Brajerčík, J.: Stimulation of executive function "shifting" in teaching mathematics. In: Acta mathematica 17, Proceedings of international conference, Constantine the Philospher University in Nitra, 2014, 135-141. ISBN 978-80-558-0613-6.

Brajerčík, J., Demko, M.: Matematika pre študentov prírodovedných odborov: biológia - ekológia - geografia [elektronický dokument] Prešovská univerzita v Prešove, 2018. 230 s. ISBN 978-80-555-2057-5.

Knapíková, M., Demko, M.: O matematickej olympiáde (nielen pre tých, ktorí pripravujú jej riešiteľov). MIF - Matematika, Informatika, Fyzika [elektronický zdroj] 16, No. 31 (2007) 74-82.

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
1/2022 ročník 51

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková, Ivo Kluvanec
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 550 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: apríl 2022

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal “Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences”
OMFI 2/2022 Volume 51
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

CONTENTS