

# OBZORY

4/2021 (50)

*MATEMATIKY*  
*FYZIKY a*  
*INFORMATIKY*

# OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2021 ročník 50

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,  
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

## HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 4/2021 Volume 50

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and  
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

**Fundavit: Štefan Zná m, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec**

**Editors in Chief:** Jozef D o b o š (Mathematics and Computer Sciences)  
Daniel K l u v a n e c (Physics)

### International Editorial Board:

Anatolij D v u r e č e n s k i j (Slovakia)	Štefan L u b y (Slovakia)
Gábor G a l a m b o s (Hungary)	László N á n a i (Hungary)
Juraj H r o m k o v i č (Switzerland)	Adam P l o c k i (Poland)
Hans J o r d e n s (Netherland)	Zdeněk P ů l p á n (Czech republic)
Martin K a l i n a (Slovakia)	Ladislav Emanuel R o t h (USA)

**Executive Editors:** Štefan T k a č i k (Mathematics and Computer Sciences)  
A b a T e l e k i (Physics)

### Editorial Board:

#### Mathematics and Computer Sciences:

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Peter Maličký	Iveta Scholtzová
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Mariana Marčoková	Milan Turčáni
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Milan Matejdes	Peter Vrábel
	Tomáš Lengyelfalusi	Martin Papčo	

#### Physics:

Jozef Beňuška	Stanislav Holec	Viera Lapitková	Vladimír Šebeň
Ivo Čáp	Anna Jankovychová	Milan Noga	Boris Tomášik
Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó	Bohumil Vybíral

### Reviewers:

#### Mathematics and Computer Sciences:

Ružena Blašková	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan
Radoslav Harman	Martin Papčo	Marián Trenkler
Mária Kmeťová	Iveta Scholtzová	Dušan Vallo

#### Physics:

Peter Demkanin	Peter Hanisko	Marián Kíreš	Arnold Pompoš
Jozef Hanč	Ján Klíma	Miroslava Ožvoldová	Mária Rakovská

---

# O riešení nerovníc s absolútnou hodnotou

**Jozef Doboš**

**Abstract [On Solving Absolute Value Inequalities]:** In this paper, we would like to show how it is possible to solve absolute value inequalities in school Mathematics using method of rationalization.

**Key words:** solving absolute value inequalities, method of rationalization

**Súhrn:** V tomto článku chceme ukázať, ako možno riešiť nerovnice s absolútnou hodnotou v školskej matematike metódou racionalizácie.

**Kľúčové slová:** riešenie nerovníc s absolútnou hodnotou, metóda racionalizácie

**MESC:** H30

Nerovnice obsahujúce neznámu v absolútnej hodnote žiaci riešia najčastejšie rozdelením definičného oboru nerovnice na intervaly, v ktorých každý z výrazov v absolútnej hodnote nemení znamienko. V každom z týchto intervalov takto dostanú nerovnicu, ktorá už neobsahuje absolútne hodnoty. Každú z nich riešia na príslušnom intervale samostatne a nakoniec urobia zjednotenie takto nájdených riešení. (Pozri napr. [1].) Čitateľom, ktorí si chcú rozšíriť svoje poznatky o riešení nerovníc, odporúčame sériu článkov, ktoré vyšli v roku 2015 v metodickom časopise pre učiteľov. Posledné dva diely sú venované práve nerovniciam s absolútnou hodnotou. Ako tam píše Сергей Алексеевич Шестаков (pozri [2]), vyššie popísaný spôsob riešenia robí žiakom problémy – hlavne vtedy, keď sú absolútne hodnoty vnorené do seba. Takéto úlohy sa však vyskytujú aj v niektorých príručkách, ktoré vydávajú naše univerzity pre uchádzačov o štúdium (pozri napr. [1]).

Cieľom tohto článku je ukázať čitateľom iný spôsob riešenia takýchto nerovníc. Predovšetkým nerovníc s absolútnou hodnotou, ktoré možno previesť do jedného z nasledujúcich tvarov:

$$|f(x)| < g(x), \quad |f(x)| \leq g(x), \quad |f(x)| < |g(x)|, \quad |f(x)| \leq |g(x)|.$$

V podstate pôjde o metódu racionalizácie nerovníc, v ktorej sa daná nerovnica prevedie na racionálnu nerovnicu, prípadne na sústavu racionálnych nerovníc. Silu metódy racionalizácie nerovníc ilustrujeme v závere článku na zložitejšej úlohe, ktorá je iným spôsobom riešená na internete (pozri [3]).

## Nerovnice s jednou absolútnou hodnotou

V tejto kapitole budeme používať nasledujúcu vlastnosť absolútnej hodnoty:

$$\text{Pre ľubovoľné reálne čísla } a, b \text{ platí } \begin{cases} |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b, \\ |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b. \end{cases} \quad (1)$$

**Príklad 1.** Riešme nerovnicu

$$x - |3x - 5| > 0. \quad (2)$$

*Riešenie.* Nerovnicu (2) najskôr prepíšeme do tvaru  $|3x - 5| < x$ . Potom podľa (1) je nerovnica (2) ekvivalentná s nasledujúcou sústavou nerovnic:

$$-x < 3x - 5 < x. \quad (3)$$

Každú nerovnicu sústavy (3) riešime samostatne.

$$\begin{array}{ll} -x < 3x - 5, & 3x - 5 < x, \\ 5 < 4x, & 2x < 5, \\ \frac{5}{4} < x, & x < \frac{5}{2}. \end{array}$$

*Odpoveď:* Oborom pravdivosti nerovnice (2) je interval  $(\frac{5}{4}, \frac{5}{2})$ . GeoGebra dáva riešenie v tvare  $\{\frac{5}{4} < x < \frac{5}{2}\}$ , čo je skrátaná verzia zápisu  $\{x \in \mathbf{R} \mid \frac{5}{4} < x < \frac{5}{2}\}$ .

**Príklad 2.** Riešme nerovnicu

$$x + 4 + |3x - 5| > 0. \quad (4)$$

*Riešenie.* Reálne číslo  $x$  je riešením nerovnice (4) práve vtedy, keď nie je riešením nerovnice

$$x + 4 + |3x - 5| \leq 0. \quad (5)$$

Podľa (1) je nerovnica (5) ekvivalentná s nasledujúcou sústavou nerovnic:

$$x + 4 \leq 3x - 5 \leq -x - 4. \quad (6)$$

Každú z nerovnic sústavy (6) riešime samostatne:

$$\begin{array}{ll} x + 4 \leq 3x - 5, & 3x - 5 \leq -x - 4, \\ 9 \leq 2x, & 4x \leq 1, \\ \frac{9}{2} \leq x, & x \leq \frac{1}{4}. \end{array}$$

Pretože  $\frac{1}{4} < \frac{9}{2}$ , také reálne číslo  $x$  neexistuje. Teda žiadne reálne číslo  $x$  nie je riešením nerovnice (5). Preto každé reálne číslo  $x$  je riešením nerovnice (4).

*Odpoveď:* Oborom pravdivosti nerovnice (4) je množina všetkých reálnych čísel.

### Nerovnice s dvomi absolútnymi hodnotami

V tejto kapitole budeme používať nasledujúcu vlastnosť absolútnej hodnoty:

$$\text{Pre ľubovoľné reálne čísla } a, b \text{ platí } \begin{cases} |a| < |b| \Leftrightarrow (b-a)(b+a) > 0, \\ |a| \leq |b| \Leftrightarrow (b-a)(b+a) \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

**Príklad 3.** Riešme nerovnicu (pozri [1])

$$\left| \frac{2x-1}{x-1} \right| > 2. \quad (8)$$

*Riešenie.* Výraz na ľavej strane nerovnice (8) nie je definovaný pre  $x = 1$ .

Odteraz budeme predpokladať, že  $x \neq 1$ . Potom môžeme prepísať nerovnicu (8) do tvaru

$$|2x-2| < |2x-1|. \quad (9)$$

Podľa (7) môžeme nerovnicu (9) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} ((2x-1) - (2x-2))((2x-1) + (2x-2)) &> 0, \\ 4x-3 &> 0, \\ x &> \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Nakoniec, nesmieme zabudnúť na náš predpoklad  $x \neq 1$ .

*Odpoveď:* Oborom pravdivosti nerovnice (8) je množina  $(\frac{3}{4}; 1) \cup (1; \infty)$ .

GeoGebra dáva odpoveď v tvare  $\{\frac{3}{4} < x < 1, x > 1\}$ , čo je skrátaná verzia zápisu  $\{x \in \mathbf{R} \mid \frac{3}{4} < x < 1 \vee x > 1\}$ .

**Príklad 4.** Riešme nerovnicu (pozri [1])

$$\left| \frac{x^2-5x+4}{x^2-4} \right| \leq 1. \quad (10)$$

*Riešenie.* Nerovnica (10) je ekvivalentná s nerovnicou

$$|x^2-5x+4| \leq |x^2-4|. \quad (11)$$

Výraz na ľavej strane nerovnice (10) nie je definovaný pre  $x = -2$  a  $x = 2$ . Avšak ani jedno z čísel  $x = -2$ ,  $x = 2$  nie je riešením nerovnice (11). Odteraz budeme predpokladať, že  $x \neq -2$  a  $x \neq 2$ . Podľa (7) môžeme nerovnicu (11) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} ((x^2 - 4) - (x^2 - 5x + 4))((x^2 - 4) + (x^2 - 5x + 4)) &\geq 0, \\ (5x - 8)(2x^2 - 5x) &\geq 0, \\ (5x - 8)x(2x - 5) &\geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Nerovnicu (12) si už môžete vyriešiť samostatne.

*Odpoveď:* Oborom pravdivosti nerovnice (10) je množina<sup>1</sup>  $[0; \frac{8}{5}] \cup [\frac{5}{2}; \infty)$ .

GeoGebra dáva odpoveď v tvare  $\{0 \leq x \leq \frac{8}{5}, x \geq \frac{5}{2}\}$ , čo je skrátaná verzia zápisu  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{8}{5} \vee x \geq \frac{5}{2}\}$ .

**Príklad 5.** Riešme nerovnicu (pozri [1])

$$|3x - 5| + 2 < |x + 2|. \quad (13)$$

*Riešenie.* Všimnime si, že  $|3x - 5| + 2 \geq 2 > 0$  pre každé reálne číslo  $x$ . Preto pre ľavú stranu nerovnice (13) platí  $|3x - 5| + 2 = ||3x - 5| + 2|$ . Podľa (7) môžeme nerovnicu (13) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} ((x + 2) - (|3x - 5| + 2))((x + 2) + (|3x - 5| + 2)) &> 0, \\ (x - |3x - 5|)(x + 4 + |3x - 5|) &> 0. \end{aligned} \quad (14)$$

V príklade č. 2 sme ukázali, že  $x + 4 + |3x - 5| > 0$  pre každé reálne číslo  $x$ . Preto nerovnica (14) je ekvivalentná s nerovnicou  $x - |3x - 5| > 0$ . Tú sme už vyriešili v príklade č. 1.

*Odpoveď:* Oborom pravdivosti nerovnice (13) je interval  $(\frac{5}{4}; \frac{5}{2})$ .

**Príklad 6.** Riešme nerovnicu (pozri [1])

$$||x + 2| - 5| > 3. \quad (15)$$

*Riešenie.* Podľa (7) môžeme nerovnicu (15) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} (|x + 2| - 5 - 3)(|x + 2| - 5 + 3) &> 0, \\ (|x + 2| - 8)(|x + 2| - 2) &> 0, \quad / \cdot (|x + 2| + 8) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Intervaly označujeme podľa normy STN EN ISO 80000-2.

Pre každé reálne číslo  $x$  totiž platí  $|x + 2| + 8 > 0$ .

$$((x + 2)^2 - 8^2)(|x + 2| - 2) > 0, \quad / \cdot (|x + 2| + 2)$$

Pre každé reálne číslo  $x$  totiž platí  $|x + 2| + 2 > 0$ .

$$\begin{aligned} (x + 2 - 8)(x + 2 + 8)((x + 2)^2 - 2^2) &> 0, \\ (x - 6)(x + 10)(x + 2 - 2)(x + 2 + 2) &> 0, \\ (x - 6)(x + 10)x(x + 4) &> 0. \end{aligned}$$

*Odpoveď:* Oborom pravdivosti nerovnice (15) je množina  
 $(-\infty; -10) \cup (-4; 0) \cup (6; \infty)$ .

**Príklad 7.** Riešme nerovnicu (pozri [2])

$$||x^2 + 3x + 2| - 1| \geq 1. \quad (16)$$

*Riešenie.* Podľa (7) môžeme nerovnicu (16) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} (|x^2 + 3x + 2| - 1 - 1)(|x^2 + 3x + 2| - 1 + 1) &\geq 0, \\ (|x^2 + 3x + 2| - 2)|x^2 + 3x + 2| &\geq 0, \quad / \cdot (|x^2 + 3x + 2| + 2) \end{aligned}$$

Pre každé reálne číslo  $x$  totiž platí  $|x^2 + 3x + 2| + 2 > 0$ .

$$\begin{aligned} ((x^2 + 3x + 2)^2 - 2^2)|x^2 + 3x + 2| &\geq 0, \\ (x^2 + 3x + 2 - 2)(x^2 + 3x + 2 + 2)|x^2 + 3x + 2| &\geq 0, \\ x(x + 3)(x^2 + 3x + 4)|(x + 1)(x + 2)| &\geq 0, \quad / \cdot \frac{|(x + 1)(x + 2)|}{x^2 + 3x + 4} \end{aligned}$$

Pre každé reálne číslo  $x$  totiž platí  $|(x + 1)(x + 2)| \geq 0$ ,  $x^2 + 3x + 4 > 0$ .

$$x(x + 3)(x + 1)^2(x + 2)^2 \geq 0.$$

*Odpoveď:* Oborom pravdivosti nerovnice (16) je množina  
 $(-\infty; -3] \cup \{-2; -1\} \cup [0; \infty)$ .

GeoGebra dáva odpoveď v tvare  $\{\mathbf{x} = -2, \mathbf{x} = -1, \mathbf{x} \leq -3, \mathbf{x} \geq 0\}$ .

**Príklad 8.** Riešme nerovnicu (pozri [1])

$$|x - 2| - 3 \leq 2x. \quad (17)$$

*Riešenie.* Výraz na ľavej strane nerovnice (17) nemôže byť záporný. Odtiaľ vyplýva, že ak  $x$  je riešením nerovnice (17), potom  $2x \geq ||x - 2| - 3| \geq 0$ , čo dáva  $x \geq 0$ .

Odteraz budeme predpokladať, že  $x \geq 0$ . Pretože potom  $2x = |2x|$ , nerovnicu (17) môžeme zapísať v tvare

$$||x - 2| - 3| \leq |2x|. \quad (18)$$

Podľa (7) môžeme nerovnicu (18) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} (2x - (|x - 2| - 3))(2x + (|x - 2| - 3)) &\geq 0, \\ (2x + 3 - |x - 2|)(2x - 3 + |x - 2|) &\geq 0, \quad / \cdot (2x + 3 + |x - 2|) \end{aligned}$$

Za predpokladu  $x \geq 0$  totiž platí  $2x + 3 + |x - 2| > 0$ .

$$\begin{aligned} ((2x + 3)^2 - (x - 2)^2)(2x - 3 + |x - 2|) &\geq 0, \\ (2x + 3 - x + 2)(2x + 3 + x - 2)(2x - 3 + |x - 2|) &\geq 0, \\ (x + 5)(3x + 1)(2x - 3 + |x - 2|) &\geq 0, \quad / \cdot \frac{1}{(x + 5)(3x + 1)} \end{aligned}$$

Za predpokladu  $x \geq 0$  totiž platí  $x + 5 > 0$ ,  $3x + 1 > 0$ .

$$2x - 3 + |x - 2| \geq 0. \quad (19)$$

Nerovnicu (19) si už môžete vyriešiť samostatne.

*Odpoveď:* Oborom pravdivosti nerovnice (17) je interval  $[1; \infty)$ .

**Příklad 9.** Riešme nerovnicu<sup>2</sup> (pozri [3])

$$\frac{x^3 - |3x + 2|}{x^3 - |3x - 2|} > 0. \quad (20)$$

*Riešenie.* Položme  $P(x) = x^3 - |3x + 2|$ . Potom

$$P(x) = \begin{cases} x^3 + 3x + 2, & \text{ak } x \leq -\frac{2}{3}, \\ x^3 - 3x - 2, & \text{ak } x \geq -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Všimnime si, že funkcia  $P(x)$  je rastúca na intervale  $(-\infty; -\frac{2}{3}]$ , lebo je tam súčtom dvoch rastúcich funkcií  $y = x^3$  a  $y = 3x + 2$ . Z toho vyplýva, že pre každé reálne

---

<sup>2</sup>Úloha je vhodná pre matematické krúžky, prípadne pre riešiteľov matematickej olympiády.



číslo  $x \leq -\frac{2}{3}$  platí  $P(x) \leq P(-\frac{2}{3}) = -\frac{8}{27} < 0$ . Tým sme ukázali, že na intervale  $(-\infty; -\frac{2}{3}]$  funkcia  $P(x)$  nadobúda len záporné hodnoty.

Na druhej strane, pre každé  $x \geq -\frac{2}{3}$  máme  $P(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$ . Z toho vyplýva, že na intervale  $[-\frac{2}{3}; \infty)$  má rovnica  $P(x) = 0$  jediný koreň  $x = 2$ . Pritom pre každé  $x > 2$  platí  $P(x) > 0$  a pre každé  $x \in [-\frac{2}{3}; 2)$  platí  $P(x) < 0$ .

Tým sme overili, že pre každé reálne číslo  $x$  platí:

1.  $P(x) < 0$  práve vtedy, keď  $x < 2$ ,
2.  $P(x) = 0$  práve vtedy, keď  $x = 2$ ,
3.  $P(x) > 0$  práve vtedy, keď  $x > 2$ .

Z toho vyplýva, že nerovnica (20) je ekvivalentná s nerovnicou

$$\frac{x-2}{x^3 - |3x-2|} > 0. \quad (21)$$

Položme  $Q(x) = x^3 - |3x-2|$ . Potom

$$Q(x) = \begin{cases} x^3 + 3x - 2, & \text{ak } x \leq \frac{2}{3}, \\ x^3 - 3x + 2, & \text{ak } x \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Všimnime si, že funkcia  $Q(x)$  je rastúca na intervale  $(-\infty; \frac{2}{3}]$ , lebo je tam súčtom dvoch rastúcich funkcií  $y = x^3$  a  $y = 3x - 2$ . Avšak, na rozdiel od prípadu s funkciou  $P(x)$ , tu máme  $Q(\frac{2}{3}) = \frac{8}{27} > 0$ . Teda rovnica  $Q(x) = 0$  môže mať koreň v intervale  $(-\infty; \frac{2}{3}]$ . Pretože platí  $Q(0) = -2 < 0$ , rovnica  $Q(x) = 0$  má na intervale  $(-\infty; \frac{2}{3}]$  práve jeden reálny koreň, ktorý leží medzi číslami  $x = 0$  a  $x = \frac{2}{3}$ . Hľadáme ho v tvare  $x = a - b$ . Potom platí  $x^3 = a^3 - b^3 - 3abx$ . Naozaj,

$$x^3 = (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = a^3 - b^3 - 3abx.$$

Rovnicu  $x^3 + 3x - 2 = 0$  prepíšeme do tvaru  $x^3 = 2 - 3x$  a porovnáme s vyjadrením  $x^3 = a^3 - b^3 - 3abx$ . Odtiaľ dostávame sústavu rovníc  $a^3 - b^3 = 2$ ,  $ab = 1$ . Z rovnice  $ab = 1$  vyjadríme  $b = 1/a$ , čo dosadíme do rovnice  $a^3 - b^3 = 2$ . Po malej úprave dostaneme kvadratickú rovnicu pre neznámu  $a^3$ . Takto nájdeme číslo  $a$ . Nakoniec vypočítame číslo  $b = 1/a$ . Preto jediným reálnym koreňom rovnice  $x^3 + 3x - 2 = 0$  je číslo

$$x_0 = a - b = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}.$$

Pretože funkcia  $Q(x)$  je rastúca na intervale  $(-\infty; \frac{2}{3}]$ , pre každé číslo  $x < x_0$  platí  $Q(x) < 0$  a pre každé číslo  $x \in (x_0; \frac{2}{3}]$  platí  $Q(x) > 0$ .

Na druhej strane, pre každé  $x \geq \frac{2}{3}$  máme  $Q(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ . Z toho vyplýva, že na intervale  $[\frac{2}{3}; \infty)$  má rovnica  $Q(x) = 0$  jediný koreň  $x = 1$ . Pritom pre každé číslo  $x \in [\frac{2}{3}; \infty)$ ,  $x \neq 1$  platí  $Q(x) > 0$ .

Tým sme overili, že pre každé reálne číslo  $x$  platí:

1.  $Q(x) < 0$  práve vtedy, keď  $(x - x_0)(x - 1)^2 < 0$ ,
2.  $Q(x) = 0$  práve vtedy, keď  $(x - x_0)(x - 1)^2 = 0$ ,
3.  $Q(x) > 0$  práve vtedy, keď  $(x - x_0)(x - 1)^2 > 0$ .

Z toho vyplýva, že nerovnica (21) je ekvivalentná s nerovnicou

$$\frac{x - 2}{(x - x_0)(x - 1)^2} > 0. \quad (22)$$

Nerovnicu (22) si vyriešte samostatne. Treba k tomu využiť fakt, že  $x_0 < \frac{2}{3} < 1$ .

*Odpoveď:* Oborom pravdivosti nerovnice (20) je množina

$$(-\infty; \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}) \cup (2; \infty).$$

GeoGebra nevie nerovnicu (20) riešiť. Wolfram Alpha dáva odpoveď v tvare

$$x < \frac{(1+\sqrt{2})^{2/3}-1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}}, \quad x > 2.$$

S nerovnicou (20) sa stretne pri riešení nasledujúcej logaritmickej nerovnice:

$$x \log_{r(x)} s(x) \geq 0, \text{ kde } r(x) = \log_{|x^2-3|-2}(x^2 - 3|x| + 2), s(x) = \frac{x^3 - |3x + 2|}{x^3 - |3x - 2|}.$$

## L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s

- [1] Peller, F., Šáner, V., Eliáš, J., Pinda, Ľ.: Matematika krok za krokom na EU, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava, 2002.
- [2] Шестаков, С.: *Решаем неравенства, 2.3. Неравенства, содержащие переменную под знаком абсолютной величины (модуля). Более сложные неравенства*, Математика. Первое сентября. Методический журнал для учителей математики, 2015, №10 октябрь, 56–60; №11 ноябрь, 56–62.
- [3] <https://math.stackexchange.com/questions/2201633/logarithmic-inequality-two-hours>

**Pod'akovanie:** Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/0265/17 *Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky*.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: jozef.dobos@upjs.sk

# Informace pro fuzzy množiny a intuicionistické fuzzy množiny

Zdeněk Půlpán

**Abstract [Information for fuzzy sets and intuitionistic fuzzy sets]:** Every decision is possible with the terms of psychology reducible to deciding between alternative main consideration, and alternative options. The semantic information of intuitionistic fuzzy sets allows us to focus on the quantitative aspect of this type of decision-making that is based on only one main alternative. The article describes the method of estimation based on the fundamental uncertainties and makes quantify uncertainty and information that is needed for decision-making in such a simple model. From the described method is also possible to derive a generalization of complex decision-making situation.

**Key words:** decision making, uncertainties, estimation of information

**Souhrn:** Každé rozhodování je možné s hlediska psychologie redukovat na rozhodování mezi variantou hlavní, uvažovanou, a variantami alternativními. Sémantizovaná informace pro fuzzy množiny nebo intuicionistické fuzzy množiny nám umožňuje přejít od kvalitativní i ke kvantitativní stránce rozhodování, zaměřené na volbu pouze jediné ze dvou možných variant. Je popsána metoda, jak na základě odhadu elementárních nejistot kvantifikovat neurčitost a potřebnou informaci pro rozhodování v tomto jednoduchém modelu. Z popsaného je také možné odvodit zobecnění pro komplikovanější rozhodovací situaci.

**Klíčová slova:** rozhodování, neurčitosti, odhad informace

**MESC:** C40, E50, E60, B10, D60, K70

## Úvod

Náš život je naplněn potřebou rozhodovat. Rozhodujeme se, kdy zítra budeme vstávat, co budeme snídat, co si oblékneme, atd. Každé rozhodování je volbou mezi několika alternativami, předpokládá existenci určitého (velmi často konečného) souboru dobře identifikovatelných a od sebe dostatečně odlišitelných alternativ. Procesy volby určité alternativy jsou poznamenány nejistotou a důvody pro určitá rozhodnutí závisí na mnoha nepředvídatelných faktorech. Tušíme, že zde hraje roli náhoda, kterou je možné odhadnout pravděpodobností. Ta může mít svůj původ subjektivní (napří-

klad ze zkušenosti) nebo může být objektivizována odhadem z relativních četností určitých rozhodnutí za přibližně stejných podmínek. Pozorujeme důsledky určitých rozhodnutí a větší pravděpodobnost bude mít např. rozhodnutí, jehož důsledek je pro nás příznivější (z důvodů finančních, zdravotních...).

Nabízí se tedy rozhodování modelovat například konečným souborem alternativ  $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  a pravděpodobnostmi  $p_i = p(\alpha_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $0 \leq p_i \leq 1$ , kde  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Množina alternativ  $\Omega$  spolu s pravděpodobnostmi  $P(A) = \sum_{\alpha_i \in A} p_i$  pro  $A \subset \Omega$  může být základem pro formalizaci rozhodování v prostoru alternativ  $\Omega$ . Dostáváme tak pravděpodobnostní prostor  $[\Omega, 2^\Omega, P]$ .

Neurčitost  $H$  (nazýváme ji také entropie) rozhodnutí pro určitou alternativu v našem pravděpodobnostním prostoru může být odhadována ze známého Shannonova vztahu

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log_z p_i, 0 \leq H \leq \log_z n,$$

výraz  $0 \cdot \log_z 0$  definujeme limitou  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log_z x = 0$ , kde  $z > 1$  určuje jednotku neurčitosti. Je-li  $z = 2$ , pak jednotka neurčitosti je 1 bit, je-li  $z = e$  základ přirozeného logaritmu, je jednotkou 1 nit, je-li  $z = 10$  je jednotkou 1 dit, v ostatních případech je jednotkou 1 lit. (Převod nitů resp. ditů na bity lze snadno realizovat, platí totiž  $\log_2 x = \frac{\log_e x}{\log_e 2} = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 2}$ ;  $\log_e x$  označujeme také jako  $\ln x$ , jednotka 1 lit, kterou také použijeme, není na žádnou z předchozích jednotek převeditelná, neopírá se o logaritmickou transformaci).

Představa neurčitosti rozhodování o velikosti 1 bit je velice jednoduchá. Je to neurčitost rozhodování mezi dvěma stejně pravděpodobnými alternativami:

$$\Omega = \{\alpha, \beta\}, p(\alpha) = p(\beta) = 0,5; H = -0,5 \log_2 0,5 - 0,5 \log_2 0,5 = 1 \text{ bit}.$$

Nejjednodušší model rozhodování předpokládá volbu právě jedné ze dvou relevantních (možných, uvažovaných) variant  $\alpha, \beta$ . Neurčitost je pak určitou mírou „síly volby“ některé z variant. Neurčitost jako jedna z charakteristik rozhodovacího procesu může být kvantifikována například na základě subjektivně nebo objektivně odhadnuté pravděpodobnosti  $p \in [0, 1]$  volby jedné ze dvou variant, např. volbou  $\alpha$  (když druhá varianta je  $\neg\alpha = \beta$  s pravděpodobností  $1 - p$ ), Shannonovým vztahem

$$H(p) = -p \cdot \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p) [\text{bit}], \quad (1)$$

kde je  $H(p) \in [0, 1]$  (při tom klademe  $0 \cdot \log_2 0 = 0$ ). Jedna ze základních vlastností neurčitosti (1) je její symetrie vůči variantám  $\alpha, \beta$ :

$$H(p) = H(1 - p); H(0,5) = 1 = \max_p H(p); H(0) = H(1) = 0. \quad (2)$$

Veličinu  $I(p) = 1 - H(p)$  je možné interpretovat jako míru informace, „spotřebované“ pro volbu jedné z variant. Chceme-li informaci sémantizovat, tj. polarizovat ji vzhledem k určité variantě, např.  $\alpha$ , volíme sémantizovanou informaci  $I^s(p)$  ve tvaru (2)

$$I^s(p) = \begin{cases} -I(p); & 0 \leq p \leq 0,5 \\ I(p); & 0,5 < p \leq 1, \end{cases} \quad (3)$$

a platí  $I^s(0) = -1 \leq I^s(p) \leq 1 = I^s(1)$ ;  $I^s(0,5) = 0$ .

Jednotkou sémantické informace z (3) je také 1 bit (vzhledem k dvojkovému základu logaritmu neurčitosti  $H$  pomocí které je zde sémantická informace vypočtena). Maximální informace  $I^s = 1$  bit může být dosaženo, když volba varianty  $\alpha$  (kterou můžeme označit jako „správnou“, „pravdivou“, atd.) je s jistotou ( $p = 1$ ). Menší nezáporné hodnoty  $I^s \geq 0$  mohou být interpretovány jako míry „znalosti“ (při  $0,5 \leq p \leq 1$ ) a záporné hodnoty  $-1 \leq I^s < 0$  (při  $0 \leq p \leq 0,5$ ) například jako míry „pomýlenosti“ (nejvyšší míra pomýlenosti je pak  $I^s = -1$  bit).

Ideovým základem této metody je představa fiktivního „průměrného respondenta“. Pro něho je odhadována pravděpodobnost  $p$  správné reakce (odpovědi) na určitou položku relativní četností  $\hat{p} = \frac{m}{n}$ , kde  $m$  představuje počet správných reakcí na položku v reprezentativním souboru  $n$  respondentů. Postavení jedince ve výběrovém souboru respondentů může pak být posuzováno z tzv. hrubého testového skóre  $Z$ , které je v nejjednodušším případě součtem počtu všech správných reakcí na dotazníkové položky respondenta. Informační hodnota hrubého skóre není velká (říká jen, kolik měl respondent všech správných odpovědí v dotazníku a ne např. zda vyřešil položky obtížné, jak byl (nebo mohl být) úspěšný s řešením u položek, které v úplnosti nevyřešil, atd.). Daleko více se může o respondentovi dozvědět expert, který respondenta pozoruje při řešení (v krajním případě má k dispozici protokol s průběhem respondentova řešení) či v jiném případě sleduje vývoj jeho zdravotního stavu, je informován o dalších souvislostech choroby, atd. Můžeme předpokládat, že experti jsou přibližně stejné úrovně a mají k dispozici stejné informace. Proto poučených expertů nemusí být mnoho, někdy stačí jediný. Zkušenost s expertními odhady je taková, že u dostatečně kvalifikovaných expertů je vysoká stabilita jejich rozhodnutí (malá závislost na jejich počtu) (o stabilitě expertního odhadu bylo pojednáno v [5]).

### Příklad 0.1

Mějme vědomostní dotazník, skládající se z  $k$  položek (otázek). Ke každé položce jsou nabídnuty varianty odpovědí (za varianty odpovědí nemusíme jen uvažovat jejich reálné konstrukce, ale například varianty správně - špatně) z nichž právě jedna je správná. Z odpovědí respondentů mohou být stanoveny pomocí relativních četností odhady pravděpodobností volby každé z alternativ. Z těchto údajů pro každou

$i$ -tou položku určíme pravděpodobnost správné odpovědi  $p_i$  a pak podle (3) odhad  $I_i^s(p_i)$ . Součet  $\sum_{i=1}^k I_i^s(p_i)$  je pak horním odhadem informace (položky nemusí být nezávislé), kterou využil „průměrný“ respondent ke správným odpovědím. Pro lepší interpretaci je třeba tuto hodnotu normovat vydělením maximální možnou hodnotou  $k$ . Čím je pak hodnota  $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k I_i^s(p_i)$  bližší 1, tím je výsledek dotazníku lepší, záporná hodnota by znamenala velkou „neznalost“...

## 1 Neurčitost modelovaná fuzzy množinami a intuicionistickými fuzzy množinami

Ohodnocení volby určité varianty odpovědi na dotazníkovou položku pravděpodobností je někdy velmi obtížné nebo není vůbec možné. Například rozhodnutí, zda je pacient vyléčený nebo nevyléčený záleží jen na úvaze odborníka, podobně rozhodování o tom, že určitý žák je nadaný nebo nenadaný se nedá statisticky rozhodnout (i když se takové pokusy realizují). Místo objektivizovaných statistických šetření se musí uskutečňovat expertní odhady. V situacích, kdy nelze od sebe přesně „oddělit“ některé varianty, se uplatňuje teorie fuzzy množin. Fuzzy množina reprezentuje sémantiku pojmu rozhodnutí. Odpovídá na to, jak „silně“ jsou v rozhodnutí (které je fuzzy množinou) zastoupeny určité prvky ze souboru  $\Omega$ .

Uvažujme pouze konečnou množinu prvků (možností, vlastností, ...)  $\Omega = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Jestliže každému prvku  $\alpha_i$  přiřadíme míru  $\mu_i = \mu(\alpha_i)$ ,  $\mu_i \in [0; 1]$ , vyjadřující, že  $\alpha_i$  je součástí rozhodnutí  $\underline{A}$ , je  $\underline{A}$  fuzzy množinou nad  $\Omega$ . Čím bližší je hodnota  $\mu_i$  jedné, tím spíše je v rozhodnutí  $\underline{A}$  prvek  $\alpha_i$ , hodnota  $\mu_i = 0$  resp. 1 tedy znamená, že v rozhodnutí  $\underline{A}$  prvek  $\alpha_i$  není, resp. je. Fuzzy množinu můžeme zapisovat ve tvaru

$$\underline{A} = \{\alpha_1/\mu_1, \alpha_2/\mu_2, \dots, \alpha_n/\mu_n\}.$$

Hodnoty  $\mu_i$  nevznikají obecně jako pravděpodobnosti, představují většinou expertní rozhodnutí (které je zde sice subjektivním odhadem, ale kvalifikovaným) o míře zastoupení  $\alpha_i$  v rozhodnutí  $\underline{A}$ . Proto nemusí obecně platit, že  $\sum \mu_i = 1$ . Funkci  $\mu(\alpha)$ ,  $\alpha \in \Omega$  nazýváme funkce příslušnosti (nebo také náležitosti), odpovídající fuzzy množině  $\underline{A}$ , reprezentuje míru zastoupení prvku  $\alpha$  ve fuzzy množině  $\underline{A}$ .

Neurčitost, o které budeme zde uvažovat, má svůj původ v nejistotě odhadu, které prvky  $\alpha_i$  do  $\underline{A}$  patří. Jaká je neurčitost zastoupení prvků  $\alpha_i \in \Omega$  ve fuzzy množině  $\underline{A}$ ? Můžeme použít Shannonova vzorce za předpokladu, že „znormujeme“ funkci příslušnosti

$$H(\underline{A}) = - \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\sum \mu_i} \log_2 \frac{\mu_i}{\sum \mu_i} [\text{bit}].$$

Přijmem jisté informace se může expertní odhad, reprezentovaný fuzzy množinou  $\underline{A}$  změnit na fuzzy množinu  $\underline{B}$ . Pak se také původní neurčitost změní na neurčitost  $H(\underline{B})$ . Přijatou informaci pak můžeme odhadnout z rozdílu  $H(\underline{A}) - H(\underline{B})$ . Když přijatá informace nebude matoucí, je tento rozdíl nezáporný. (Je více možností jak odhadovat neurčitost resp. informaci, zde uvádíme jen některé z nich.)

Soustředme se nyní na určitou vlastnost  $\alpha \in \Omega$ . Pak je možné vyjít z modelu rozhodování charakterizovaném fuzzy množinou  $\underline{C}$  nad  $\Omega^* = \{\alpha, \beta\}$

$$\underline{C} = \{\alpha/\mu(\alpha); \beta/\mu(\beta)\}, \mu(\alpha) + \mu(\beta) \leq 1 \quad (4)$$

kde míry věrohodnosti  $\mu(\alpha), \mu(\beta) \in [0, 1]$  jsou subjektivním nebo objektivizovaným odhadem volby příslušné varianty (vzhledem k tomu, jaký kontrast potřebuji posuzovat, mohu volit například  $\beta = \neg\alpha$  s interpretací míry věrohodnosti pro negaci  $\neg\alpha$  hodnotou  $1 - \mu(\alpha)$ , podobně i pro  $\neg\beta$ ). Neurčitost pro fuzzy množinu (4) můžeme při nezávislých volbách variant odhadnout např. i z následujícího vztahu (5) ([2])

$$\begin{aligned} H(\underline{C}) &= 2 - [\max\{\mu(\alpha), 1 - \mu(\alpha)\} + \max\{\mu(\beta), 1 - \mu(\beta)\}] = \quad (5) \\ &= \min\{\mu(\alpha), 1 - \mu(\alpha)\} + \min\{\mu(\beta), 1 - \mu(\beta)\} \text{ [lit]}; 0 \leq H(\underline{C}) \leq 1. \end{aligned}$$

Informaci  $I(\alpha)$  pro volbu varianty  $\alpha$  i její sémantizovanou hodnotu  $I^s(\alpha)$  určíme podobně jako pro klasickou neurčitost  $H(p)$  z následujících vztahů:

$$I(\alpha) = 1 - H(\underline{C}); I^s(\alpha) = \begin{cases} -I(\alpha); & 0 \leq \mu(\alpha) \leq 0,5 \\ I(\alpha); & 0,5 \leq \mu(\alpha) \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

Pak ovšem je  $-1 \leq I^s(\alpha) \leq 1$ . Zápornou hodnotu informace můžeme interpretovat jako míru dezinformace nebo pomýlenosti apod. vzhledem k volbě varianty  $\alpha$ . Jednotky informace odpovídají vždy jednotkám neurčitosti ([2])). Pro fuzzy množinu  $\underline{C}$  nemusí obecně platit následující vztah, který je základní vlastností pravděpodobnosti pro dvě vzájemně se vylučující varianty  $\alpha, \beta$  (viz [2,4])

$$\mu(\alpha) + \mu(\beta) = 1 \quad (7)$$

Protože jsou však v našem modelu volby variant na sobě závislé (popisujeme situaci volby jen právě jedné z variant), musíme předpokládat platnost vztahu (7). Pak neurčitost pro fuzzy množinu (4) za podmínky (5) můžeme odhadnout např. ze vztahu (8), který odpovídá (1):

$$H(\underline{C}) = -\mu(\alpha) \cdot \log_2 \mu(\alpha) - (1 - \mu(\alpha)) \cdot \log_2 (1 - \mu(\alpha)). \quad (8)$$

Pak je také  $0 \leq H(\underline{C}) \leq 1$  a informaci i její sémantizovanou podobu můžeme stanovit podobně jako v předchozím případě. Máme však více možností pro odhad neurčitosti  $H(\underline{C})$  tak, aby byly splněny intuitivní požadavky odpovídající podmínkám (2) a (7) (viz také [2]). Jednoduchý vztah pro neurčitost  $H(\underline{C})$ , předpokládáme-li platnost podmínky (7), dostaneme ze vztahu (5):

$$H(\underline{C}) = 2 \cdot \min\{\mu(\alpha), 1 - \mu(\alpha)\}; \quad 0 \leq H(\underline{C}) \leq 1 \text{ (} H(\underline{C}) \text{ je v jednotkách lit.)} \quad (9)$$

Chceme-li přizpůsobit model nejjednoduššího rozhodování i situaci, kdy nemusí být v tomto procesu vybrána žádná z nabídnutých možností (když např. rozhodovatel má odpor vůči volbě některé z variant nebo neví jak se má rozhodnout), pak je vhodné předpokládat, že

$$\mu(\alpha) + \mu(\beta) \leq 1. \quad (10)$$

V tom případě lze pro charakterizaci rozhodování mezi dvěma variantami  $\alpha, \beta$  využít intuicionistickou fuzzy množinu (IFS)  $\mathcal{F}$  v následujícím tvaru ([1])

$$\mathcal{F} = \{\alpha / (\mu(\alpha), \nu(\alpha)); \beta / (\mu(\beta), \nu(\beta))\}, \quad (11)$$

kde  $\mu(\alpha), \nu(\alpha) \in [0; 1]$  a také  $\mu(\beta), \nu(\beta) \in [0; 1]$  a platí  $\mu(\alpha) + \nu(\alpha) \leq 1$ ,  $\mu(\beta) + \nu(\beta) \leq 1$ .

Každému prvku (variantě)  $\alpha$  přiřadíme jednak míru  $\mu(\alpha)$ , vyjadřující nakolik je součástí rozhodnutí a míru  $\nu(\alpha)$ , vyjadřující nakolik není součástí rozhodnutí. Rozhodování o variantě  $\alpha$  (a odpovídajícím způsobem i o variantě  $\beta$ ) je tak rozděleno do 3 hledisek

1. posuzující míru přijetí varianty  $\alpha$  (odhadováno  $\mu(\alpha)$ );
2. posuzující míru nepřijetí varianty  $\alpha$  (odhadováno  $\nu(\alpha)$ );
3. posuzující míru nerozhodnosti pro volbu varianty  $\alpha$  (určeno  $1 - \mu(\alpha) - \nu(\alpha)$ ).

Fuzzy množiny, odpovídající uvedeným typům rozhodování jsou

$$\underline{A}_1(\alpha) = \{\alpha / \mu(\alpha); \neg \alpha / 1 - \mu(\alpha)\}; \quad \underline{A}_2(\alpha) = \{\alpha / \nu(\alpha); \neg \alpha / 1 - \nu(\alpha)\};$$

$$\underline{A}_3(\alpha) = \{\alpha / \pi(\alpha); \neg \alpha / 1 - \pi(\alpha)\},$$

kde  $\pi(\alpha) = 1 - \mu(\alpha) - \nu(\alpha)$  a jejich neurčitosti  $H(\underline{A}_1(\alpha)), H(\underline{A}_2(\alpha)), H(\underline{A}_3(\alpha))$  určíme podle (8) nebo (9). Pro IFS  $\mathcal{F}$  z (11) lze však také zavést neurčitost  $H(\alpha)$ , týkající se varianty  $\alpha$  vztahem

$$H(\alpha) = -(\mu(\alpha) \log_2 \mu(\alpha) + \nu(\alpha) \log_2 \nu(\alpha) + \pi(\alpha) \log_2 \pi(\alpha)) \quad (12)$$

a je pak

$$0 \leq H(\alpha) \leq \log_2 3. \quad (13)$$



Pro neurčitost  $H(\alpha)$  a neurčitosti  $H(\underline{A}_1(\alpha))$ ,  $H(\underline{A}_2(\alpha))$ ,  $H(\underline{A}_3(\alpha))$  platí nerovnosti

$$H(\underline{A}_1(\alpha)) \leq H(\alpha); H(\underline{A}_2(\alpha)) \leq H(\alpha); H(\underline{A}_3(\alpha)) \leq H(\alpha). \quad (14)$$

(To vyplývá z následující posloupnosti nerovností:  $\log_2(\nu + \pi) \geq \log_2 \nu$ ;  $-\log_2(\nu + \pi) \leq -\log_2 \nu$ ;  $-\nu \log_2(\nu + \pi) \leq -\nu \log_2 \nu$ .) Nerovnost (13) nám dává možnost určit vzhledem k variantě  $\alpha$  pro IFS  $\mathcal{F}$  informaci  $I_\alpha(\mathcal{F})$  vztahem (15)

$$I_\alpha(\mathcal{F}) = \log_2 3 - H(\alpha) \quad (15)$$

nebo její normovanou podobu

$$I_\alpha(\mathcal{F})_{\text{norm}} = 1 - H(\alpha)/\log_2 3 \quad (16)$$

a pak i příslušnou její sémantizaci vztahem

$$I_\alpha(\mathcal{F})_{\text{norm}}^s = \begin{cases} -I_\alpha(\mathcal{F})_{\text{norm}}; & 0 \leq \mu(\alpha) \leq 0,5 \\ I_\alpha(\mathcal{F})_{\text{norm}}; & 0,5 < \mu(\alpha) \leq 1, \end{cases} \quad (17)$$

kde je

$$-1 \leq I_\alpha(\mathcal{F})_{\text{norm}}^s \leq 1.$$

Při volbě právě jedné z možných variant  $\alpha, \beta$  v našem modelu rozhodování popsaném IFS  $\mathcal{F}$  musí, krom původních podmínek, také platit (10), proto

$$\nu(\alpha) + \nu(\beta) \leq 1. \quad (18)$$

Neurčitost pro IFS  $\mathcal{F}$  pak můžeme za všech uvedených podmínek definovat vztahem

$$H(\mathcal{F})(\alpha) = H(\underline{A}_1(\alpha)) + H(\underline{A}_2(\alpha)) + H(\underline{A}_3(\alpha)) \quad (19)$$

a platí  $0 \leq H(\mathcal{F})(\alpha) \leq 3$ . Proto můžeme definovat pro IFS  $\mathcal{F}$  i informaci  $I(\mathcal{F})(\alpha)$  vztahem

$$I(\mathcal{F})(\alpha) = 3 - H(\mathcal{F})(\alpha) \quad (20)$$

nebo jako normovanou informaci

$$I(\mathcal{F})_{\text{norm}}(\alpha) = 1 - H(\mathcal{F})(\alpha)/3. \quad (21)$$

Uvedenou normovanou informaci můžeme také sémantizovat vzhledem k variantě  $\alpha$ , podobně jako jsme to udělali v předchozích případech. Volíme

$$I(\mathcal{F})^s(\alpha) = \begin{cases} -I(\mathcal{F})_{\text{norm}}(\alpha); & 0 \leq \bar{\mu}(\alpha) \leq 0,5 \\ I(\mathcal{F})_{\text{norm}}(\alpha); & 0,5 \leq \bar{\mu}(\alpha) \leq 1 \end{cases} \quad -1 \leq I(\mathcal{F})^s(\alpha) \leq 1. \quad (22)$$

Pro variantu  $\beta$  můžeme odvodit odpovídající vztahy pro informaci obdobně.

### Příklad 1.1

K lékaři se dostavil pacient, kterého sužovalo svědění kůže na horních a dolních končetinách. Jednalo se o místa na kůži ostřeji ohraničená silnějším červeným zabarvením. Lékař nejprve usoudil na dermatitidu a začal pacienta léčit mazáním postižených míst jistou mastí. Po několika týdnech se však stav pacienta nezlepšoval, červené zabarvení kůže se stále rozšiřovalo a svědění neustávalo. Lékař proto změnil názor na diagnózu, zvažoval, že onemocnění je psoriáza (lupénka). Pacientovi proto byla sejmuta z postiženého místa malá část kůže (pacient se podrobil biopsii), aby se uvedené podezření potvrdilo nebo vyloučilo. Současně s tím byl pacient poslán na alergologické a interní vyšetření. Vyšetření po biopsii sice nepotvrzovalo onemocnění psoriázou, přesto ji zcela jednoznačně nevylučovalo. Další léčba byla stále málo úspěšná (měnilo se ošetření mastmi), proto se sešlo lékařské konsilium, aby byla dohodnuta další léčba. Lékaři se shodli na tom, že je třeba vyloučit hlavně onemocnění psoriázou; vzhledem k dalším vyšetřením a novým hypotézám o příčině choroby mohly být po tom předpokládané varianty onemocnění méně závažné.

Pokusme se nyní formálně matematicky vyjádřit pomocí intuicionistické fuzzy množiny neurčitost popsaného stadia uvažování o možné pacientově chorobě. Označme proto hypotézy a jejich miry věrohodnosti, odhadnuté z názorů skupiny lékařů z konsilia, takto:

- $\alpha$  – pacient onemocněl psoriázou, příslušné odhady neurčitostí jsou  $\mu(\alpha)$ ,  $\nu(\alpha)$ ;
- $\beta_1$  – pacient onemocněl dermatitidou, příslušné odhady neurčitostí jsou  $\mu(\beta_1)$ ,  $\nu(\beta_1)$ ;
- $\beta_2$  – pacient má alergickou reakci, příslušné odhady neurčitostí jsou  $\mu(\beta_2)$ ,  $\nu(\beta_2)$ ;
- $\beta_3$  – projevy na kůži jsou psychického původu, příslušné odhady neurčitostí jsou pak  $\mu(\beta_3)$ ,  $\nu(\beta_3)$ .

Protože se lékaři shodli na tom, že je třeba hlavně vyloučit onemocnění psoriázou, je odhad neurčitosti realizován vzhledem k  $\alpha$ . Označme proto  $\beta = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \beta_3$ . Poučení lékaři odhadli pro  $\alpha$ :  $\mu(\alpha) = 0,3$ ;  $\nu(\alpha) = 0,6$ ; pak je  $\pi(\alpha) = 1 - \mu(\alpha) - \nu(\alpha) = 0,1$ . Podle (8) máme v jednotkách bit:  $H(\underline{A}_1(\alpha)) = 0,881$ ;  $H(\underline{A}_2(\alpha)) = 0,971$ ;  $H(\underline{A}_3(\alpha)) = 0,469$ . Podle (12) v bitech  $H(\alpha) = 0,521 + 0,442 + 0,332 = 1,295$ . Podle (16) vypočteme v bitech  $I_\alpha(\mathcal{F})_{\text{norm}} = 0,183$  a podle (17) je  $I_\alpha(\mathcal{F})_{\text{norm}s} = -0,183$ . Z (19) obdržíme výpočtem  $H(\mathcal{F})(\alpha) = 2,321$ , z (20) pak  $I(\mathcal{F})(\alpha) = 0,679$  a z (21) získáme normovanou hodnotu  $I(\mathcal{F})_{\text{norm}}(\alpha) = 0,226$  (vše v jednotkách bit). Ze vztahu (22) pak určíme  $I(\mathcal{F})^s(\alpha) = -0,226$  [bit].

Právě poslední sémantizovaná hodnota  $I(\mathcal{F})^s(\alpha)$ , která je záporná, nám říká, že volbou psoriázy by zřejmě došlo k nesprávné diagnóze. Posoudit míru nesprávnosti diagnózy lze převážně na základě zkušenosti. (Jedná se o situaci, jako když chceme odhadnout možnost koupání určité skupiny lidí při subjektivně vnímané teplotě vody

pomocí znalosti počtu stupňů na Celsiově stupnici teploměru, vloženého do vody; teplota vody je zde také normována intervalem  $[0; 100]$ . Chceme-li se ve vodě koupat, pak vhodnou teplotou může být podle naší zkušenosti teplota kolem  $20^\circ\text{C}$ , ve vodě pod  $15^\circ\text{C}$  a nad  $40^\circ\text{C}$  bychom se již nechtěli koupat. Je věcí zkušenosti lékařů, aby zhodnotili, zda vzdálenost od nuly (v záporných hodnotách) veličiny  $I(\mathcal{F})^s(\alpha)$  (v našem případě 0, 226) je již vzdáleností, která znamená kritickou míru pomýlenosti ve volbě diagnózy nebo je ještě možné o této diagnóze uvažovat.) (Podobně lze z (9) určit hodnoty neurčitosti v jednotkách lit:  $H(\underline{A}_1(\alpha)) = 0,6$ ;  $H(\underline{A}_2(\alpha)) = 0,8$ ;  $H(\underline{A}_3(\alpha)) = 0,2$ . Podle (19) pak je  $H(\mathcal{F})(\alpha) = 1,6$  a  $I(\mathcal{F})_{\text{norm}}(\alpha) = 0,47$  a pak také podle (22) je  $I(\mathcal{F})^s(\alpha) = -0,47$ .)

V našem šetření bylo možné pomocí poučených expertů – lékařů odhadnout příslušné míry  $\mu(\beta)$ ,  $\nu(\beta)$  i pro variantu  $\beta$ , alternativní k variantě  $\alpha$  tak, že jsme mohli určit intuitivní fuzzy množinu (IFS)  $\mathcal{F}$ . Výsledek odhadu byl

$$\mathcal{F} = \{\alpha/(0, 3, 0, 6); \beta/(0, 7, 0, 2)\}.$$

Protože zde platí (7), můžeme vypočítat neurčitost stanovení diagnózy  $\alpha$  vzhledem k diagnózám z  $\beta$  podle (8) vztahem

$$H(\mathcal{F}, \alpha) = -(\mu(\alpha) \log_2 \mu(\alpha) + \mu(\beta) \log_2 \mu(\beta)) = 0,521 + 0,360 = 0,881 \text{ [bit]}.$$

Příslušná sémantizovaná hodnota informace vzhledem k  $\alpha$  pak je  $I^s(\mathcal{F}, \alpha) = -0,119$  [bit] (při sémantizaci jsme postupovali již známým způsobem). Vypočtená sémantizovaná hodnota  $I^s(\mathcal{F}, \alpha)$  má menší absolutní hodnotu (ale je opět záporná), představuje i v tomto případě riziko nesprávné diagnózy.

(Výpočtem podle (9) dostaneme  $H(\mathcal{F}, \alpha) = 0,6$  [lit], příslušná sémantizovaná hodnota informace vzhledem k  $\alpha$  pak je  $I^s(\mathcal{F}, \alpha) = -0,4$  [lit]. Uvedený výpočet představuje jiný „metr“ na odhad neurčitosti, jednotka lit se nedá převést na jiné jednotky, jak jsme se o tom zmínili na začátku. Její případné používání závisí na oblasti aplikací a tedy také na zkušenosti experimentátora.)

Další otázkou je, jak variabilita odhadu hodnot příslušných věrohodností může ovlivnit hodnoty sémantizovaných informací. Odhadujme proto chybu pro neurčitost  $H(\mathcal{F}, \alpha)$ , když  $\mu(\alpha) = \bar{\mu}(\alpha) \pm \Delta\mu(\alpha)$ , kde  $\bar{\mu}(\alpha)$  je bodový odhad střední hodnoty měření  $\mu(\alpha)$  (např. aritmetickým průměrem z experimentálních dat) a  $\Delta\mu(\alpha)$  je odhad chyby měření (např. směrodatnou odchylkou z měření):

$$\Delta H(\mathcal{F}, \alpha) \sim \frac{dH}{d\mu} \cdot \Delta\mu(\alpha) = \left( \log_2 \frac{1 - \mu(\alpha)}{\mu(\alpha)} \right) \cdot \Delta\mu(\alpha). \quad (23)$$

Předpokládejme, že chyba odhadu  $\mu(\alpha)$  je  $0,1$ , pak určíme při  $\mu(\alpha) = 0,3 \pm 0,1$  chybu odhadu  $\Delta H(\mathcal{F}, \alpha)$  hodnotou

$$\Delta H(\mathcal{F}, \alpha) = \log_2 \frac{1 - 0,3}{0,3} \cdot 0,1 < 0,122 \text{ [bit]}.$$

Můžeme proto psát  $H(\mathcal{F}, \alpha) = 0,226 \pm 0,122$  [bit]. Stejnou chybu  $\pm 0,122$  má i příslušná sémantizovaná informace  $I^s(\mathcal{F}, \alpha)$ . Jako informační zisk diagnózy psoriázy za uvedených okolností lze uvažovat hodnoty i dalších sémantizovaných informací (s odpovídající interpretací), speciálně i hodnotu  $I^s(\mathcal{F}, \alpha)$ . Konkrétní výpočet (s ohledem na možnou chybu výpočtu) zde nabízí pro volbu diagnózy psoriázy malou hodnotu sémantizované informace pohybující se v okolí nuly na stupnici  $[-1; 1]$ .

V našem případě interval možných hodnot  $I^s(\mathcal{F}, \alpha) = -0,119 \pm 0,122$  [bit] představuje hodnotu značící nerozhodnost lékařů pro volbu onemocnění jistého pacienta psoriázou.

K čemu může sloužit uvedená kvantifikace? Míru přesvědčivosti volby diagnózy určité choroby můžeme vyjádřit buď slovně nebo numericky (například jako míru naplnění určitého kritéria; v našem příkladu určité choroby jako míru naplnění jistých znaků uvažované choroby). Numerické hodnocení vychází obvykle z expertních odhadů, například jako průměrná hodnota z odhadů více expertů. Může sloužit k posouzení vývoje choroby v čase (je-li totéž realizováno v určitých časových posloupnostech) nebo k porovnání úrovně rozvoje choroby v čase, případně jako podklad pro porovnání vývoje choroby mezi dvěma různými pacienty (při posuzování účinků léků a pod.). Expertní odhady jsou v medicíně i ve sportu velice časté (mají totiž svůj základ ve vědě, které se to týká :v medicíně, pedagogice, ...) a jsou-li realizovány nestrannými a zodpovědnými odborníky, pak mohou mít velice dobrou stabilitu. ([5])

## Závěr

Hodnoty sémantizovaných informací jsou stanovovány v závislosti na volbě výpočetní metody i jednotky. Interpretace vypočtených numerických hodnot je pak dána výchozími předpoklady metody i zkušeností experimentátora v určité oblasti diagnóz. Metoda se hodí pro porovnávání hodnot sémantizované informace různých diagóz. Nepracuje se zde s apriorně danými a zcela exaktně definovanými jednotkami neurčitosti. Nemáme totiž v humanitních vědách jiné možnosti. Záleží pak na zkušenosti experimentátora, jakou z metod odhadu a i příslušného výpočtu bude volit a jak se naučí číselné hodnoty interpretovat. Příklad z medicínského prostředí jsme mohli také nahradit příklady měření znalostí žáků (metoda umožňuje hodnocení odpovědí např. ne jen dichotomicky jako např. správně – špatně, ale i trichotomicky přiznáním navíc možnosti „nevím“).

Článek ukazuje, jak je možné z kvalitativních informací zkonstruovat kvantitativně posuzovatelnou jistou vlastnost informace. Cesta obrácená je pak cestou vhodné interpretace.

#### L i t e r a t u r a – R e f e r e n c e s

- [1] Atanassov, K.T.: *Intuitionistic Fuzzy Sets*, Fuzzy Sets and Systems 20, 1986, 87–96.
- [2] Půlpán, Z.: *Odhad informace z dat vágní povahy*, Academia, Praha 2012.
- [3] Půlpán, Z.: *Mezurado bazita sur la nocio de entropio*, grkg/Humankybernetik, Band 51, Heft 2, 2010, 70–79.
- [4] Novák, V.: *Fuzzy Sets and their Applications*, Adam Hilger, Bristol and Philadelphia, SNTL Praha 1986.
- [5] Půlpán, Z., Jahodová B., A.: *Hodnověrnost a intuitivně odhadovaná pravděpodobnost*, Informační bulletin České statistické společnosti, roč. 30, 2019, č. 1, 6–20.

Adresa autora:

Na Brně 1952, 500 09 Hradec Králové 9

e-mail: zdenek.pulpan@post.cz

## Zadania úloh

### 37. ročníka Olympiády v informatike

#### Informácie a pravidlá

*Pre koho je súťaž určená?*

Do kategórie B sa smú zapojiť len tí žiaci základných a stredných škôl, ktorí ešte ani v tomto, ani v nasledujúcom školskom roku nebudú končiť strednú školu.

Do kategórie A sa môžu zapojiť všetci žiaci (základných aj) stredných škôl.

*Odovzdávanie riešení domáceho kola*

Riešitelia domáceho kola odovzdávajú riešenia sami, v elektronickej podobe, a to priamo na stránke olympiády: <http://oi.sk/>.

Riešenia kategórie A je potrebné odovzdať najneskôr 15. 11. 2021.

Riešenia kategórie B je potrebné odovzdať najneskôr 30. 11. 2021.

*Priebeh súťaže*

Za každú úlohu domáceho kola sa dá získať od 0 do 10 bodov. Na základe bodov domáceho kola stanoví Slovenská komisia OI (SK OI) pre každú kategóriu bodovú hranicu potrebnú na postup do *krajského kola*. Očakávame, že táto hranica sa bude približne rovnať *tretine maximálneho počtu bodov*.

V krajskom kole riešitelia riešia štyri teoretické úlohy, ktoré môžu tematicky nadväzovať na úlohy domáceho kola. V kategórii B súťaž týmto kolom končí.

V kategórii A je približne najlepších 30 riešiteľov krajského kola (podľa počtu bodov, bez ohľadu na kraj, v ktorom súťažili) pozvaných do *celoštátneho kola*. V celoštátnom kole účastníci prvý deň riešia teoretické a druhý deň praktické úlohy. Najlepší riešitelia sú vyhlásení za víťazov. Približne desať najlepších riešiteľov následne SK OI pozve na týždňové výberové sústreďenie. Podľa jeho výsledkov SK OI vyberie družstvá pre Medzinárodnú olympiádu v informatike (IOI) a Stredo európsku olympiádu v informatike (CEOI).

*Ako majú vyzerat' riešenia úloh?*

V praktických úlohách je vašou úlohou vytvoriť program, ktorý bude riešiť zadanú úlohu. Program musí byť v prvom rade korektný a funkčný, v druhom rade sa snažte aby bol čo najefektívnejší.

V kategórii B môžete použiť ľubovoľný programovací jazyk.

V kategórii A musíte riešenia praktických úloh písať v jednom z podporovaných jazykov (napr. C++, Pascal alebo Java). Odovzdaný program bude automaticky otestovaný na viacerých vopred pripravených testovacích vstupoch. Podľa toho, na koľko z nich dá správnu odpoveď, vám budú pridelené body. Výsledok testovania sa dozviete krátko po odovzdaní. Ak váš program nezíska plný počet bodov, budete ho môcť vylepšiť a odovzdať znova, až do uplynutia termínu na odovzdávanie.

Presný popis, ako majú vyzerat' riešenia praktických úloh (napr. realizáciu vstupu a výstupu), nájdete na webstránke, kde ich budete odovzdávať.

Ak nie je v zadaní povedané ináč, riešenia teoretických úloh musia v prvom rade obsahovať *podrobný slovný popis použitého algoritmu, zdôvodnenie jeho správnosti* a diskusiu o efektívite zvoleného riešenia (t.j. posúdenie časových a pamäťových nárokov programu). Na záver riešenia uveďte program. Ak používate v programe netriviálne algoritmy alebo dátové štruktúry (napr. rôzne súčasti STL v C++), súčasťou popisu algoritmu musí byť dostatočný popis ich implementácie.

### *Usporiadateľ súťaže*

Olympiádu v informatike (OI) vyhlasuje *Ministerstvo školstva SR* v spolupráci so *Slovenskou informatickou spoločnosťou* (odborným garantom súťaže) a *Slovenskou komisiou Olympiády v informatike*. Súťaž organizuje *Slovenská komisia OI* a v jednotlivých krajoch ju riadia *krajské komisie OI*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia informatiky.

Celoštátne kolo OI, tlač materiálov a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou OI.

### **A-I-1 Tancujúci kráľ**

*Toto je praktická úloha. Pomocou webového rozhrania odovzdajte funkčný, odladený program.*

V rade stojí  $n$  tanečníkov. Idúc zľava doprava si pozície v rade očísľujeme od 1 po  $n$ . Výšku tanečníka, ktorý začína na pozícii  $i$ , označíme  $h_i$ . Tanečník číslo  $k$  je kráľ.

Chceli by sme všetkých tanečníkov usporiadať podľa výšky (do neklesajúceho poradia).

Aby to dobre vyzeralo, tanečníci si smú meniť poradie len jediným spôsobom: pomocou tanečných figur. Každá figura vyzerá tak, že sa nejaký súvislý úsek tanečníkov zatočí a skončí v presne opačnom poradí ako začínal.

Ak máme napríklad tanečníkov s výškami (180, 185, 183, 182, 181, 185, 190) tak ich vieme usporiadať pomocou jedinej tanečnej figúry. Zapoja sa do nej tanečníci na pozíciách 2 až 5.

Je verejným tajomstvom, že kráľ vôbec nevie tancovať. Aby sme ho nestrápnili, je nutné, aby sa nikam nehýbal – pri každej figúre musí kráľ ostať na svojom mieste v rade.

### *Súťažná úloha*

Pre daný popis situácie zistíte, či vôbec vieme tanečníkov usporiadať. Ak áno, nájdite nejaký spôsob ako to spraviť rozumne malým počtom tanečných figúr.

V každom vstupe dostanete popis situácie na začiatku a hodnotu  $\ell$ . Ak  $\ell = 0$ , len zistíte, či riešenie existuje. Ak je  $\ell$  kladné, pre riešiteľné vstupy aj zostrojíte jedno možné riešenie používajúce nanajvyš  $\ell$  figúr.

(Vo vstupoch s  $\ell > 0$  bude pre každý riešiteľný vstup existovať riešenie s nanajvyš  $\ell$  figúrami. Ľubovoľné riešenie spĺňajúce tento limit bude akceptované, netreba minimalizovať počet figúr.)

### *Formát vstupu a výstupu*

V prvom riadku vstupu sú celé čísla  $n$ ,  $k$  a  $\ell$ . V druhom riadku sú čísla  $h_1, \dots, h_n$ .

Prvý riadok výstupu má obsahovať reťazec „ANO“, ak sa tanečníkov dá usporiadať, resp. „NIE“, ak sa to nedá.

Pre  $\ell > 0$  nasleduje ešte druhá časť výstupu. Tá má začínať riadkom obsahujúcim číslo  $f \leq \ell$ : počet figúr, ktoré chcete spraviť. Zvyšok výstupu potom tvorí  $f$  riadkov ktoré popisujú jednotlivé figúry v chronologickom poradí. Pre každú figúru vypíšete riadok tvaru „ $z_j k_j$ “, kde  $1 \leq z_j \leq k_j \leq n$  sú začiatok a koniec úseku pozícií ktorých poradie vaša tanečná figúra obráti.

### *Obmedzenia a hodnotenie*

Vo všetkých vstupoch platí  $1 \leq n \leq 1000$ ,  $1 \leq k \leq n$  a  $1 \leq h_i \leq 10^9$  pre všetky  $i$ .

Je päť sád vstupov. Za každú sadu vstupov, ktoré tvoj program všetky správne vyrieši, dostaneš dva body. V rámci každej sady vstupov majú všetky vstupy tú istú hodnotu  $\ell$ . V niektorých sadách je navyše zaručené, že všetky vstupy budú mať malé  $n$ .

číslo sady	1	2	3	4	5
hodnota $\ell$	0	1000	2000	3000	1500
maximálne $n$	1000	20	100	1000	1000



## Príklady

vstup

5 3 100
160 165 175 170 180

výstup

NIE
-----

*Kráľ stojí v strede. Keďže sa nesmie hýbať, riešenie zjavne neexistuje.*

vstup

5 3 100
185 180 175 170 165

výstup

ANO
1
1 5

*Kráľ opäť stojí v strede. Otočíme celý rad tanečníkov. Všimnite si, že táto figúra obsahuje aj kráľa. Ten ale počas nej ostane na svojom mieste, takže je všetko v poriadku.*

vstup

5 3 0
175 170 175 180 175

výstup

ANO
-----

*Tento vstup má  $\ell = 0$ , takže len treba povedať, či má alebo nemá riešenie.*

vstup

5 3 100
175 170 175 180 175

výstup

ANO
4
4 5
1 2
4 5
4 5

**A-I-2 Prominencia**

*Prominencia vrcholu (niekedy tiež nazývaná význačnosť alebo relatívna výška) popisuje, nakoľko tento vrchol vyčnieva z okolitej krajiny. Má viacero navzájom ekvivalentných definícií. Jedna z nich vyzerá nasledovne:*

- Prominencia najvyššieho vrcholu na svete je rovná jeho výške.
- Pre každý iný vrchol platí, že ak  $v$  je jeho nadmorská výška, tak jeho prominencia je najmenšie také  $p$ , že ak začneme túru na našom vrchole a chceme sa dostať na nejaké vyššie položené miesto, musíme niekedy po ceste klesnúť do nadmorskej výšky  $v - p$ .

Napríklad Kráľova hoľa (1946 m. n. m.) má prominenciu 756 metrov. Ak začneme výlet na Kráľovej holi a nikdy neklesneme na  $1946 - 756 = 1190$  m. n. m., vieme sa pohybovať len po východnej časti Nízkyh Tatier a tam žiaden vyšší vrchol nestretieme. Cez sedlo Priehyba (práve 1190 m. n. m.) sa však vieme dostať na západnú časť hrebeňa a tam časom vystúpať do nadmorskej výšky vyššej ako má Kráľova hoľa. (Napríklad sa tak stane cestou na Chopok alebo Ďumbier.)

### Súťažná úloha

Z mora trčí jeden horský hrebeň. Predpokladáme, že to je jediná hora na celom svete. Hrebeň vieme popísať ako lomenú čiaru určenú bodmi so súradnicami  $(0, 0)$ ,  $(1, h_1)$ ,  $(2, h_2)$ ,  $\dots$ ,  $(n, h_n)$ ,  $(n + 1, 0)$ . Prvá súradnica je vodorovná, druhá je zvislá.

Vrcholy sú lokálne maximá hrebeňa: tie jeho body a vodorovné úseky, z ktorých ide hrebeň na obe strany dodola. Pre každý vrchol vypočítajte jeho prominenciu.

### Formát vstupu a výstupu

V prvom riadku vstupu je celé číslo  $n$ . V druhom riadku sú celé čísla  $h_1, \dots, h_n$ .

Na výstup vypíšte pre každý vrchol, v poradí v ktorom ležia na hrebeni, jeden riadok s jeho prominenciou.

### Obmedzenia a hodnotenie

Vo všetkých vstupoch platí  $1 \leq n \leq 200\,000$  a  $\forall i : 1 \leq h_i \leq 10^9$ .

Odovzdané riešenie bude otestované na šiestich sadoch vstupov. Sú za ne postupne 1, 1, 1, 2, 2 a 3 body.

Rôzne sady majú rôznu maximálnu hodnotu  $n$ :

číslo sady	1	2	3	4	5	6
maximálne $n$	20	20	5 000	5 000	200 000	200 000

Navyše v sadoch 1, 3 a 5 platí, že všetky hodnoty  $h_i$  vo vstupe sú navzájom rôzne.

### Príklady

vstup	výstup
7 47 42 47 42 47 47 42	47 47 47

V tomto pohorí sú tri vrcholy: na indexe 1, na indexe 3 a na indexoch 5-6. Všetky tri sú najvyššími vrcholmi sveta a teda majú prominenciu rovnú svojej výške.

vstup	výstup
7 47 42 47 43 48 48 42	5 4 48

*Toto je podobné pohorie, ale tentokrát je jediným najvyšším vrcholom sveta masív na indexoch 5 – 6. Zvyšné dva vrcholy majú výrazne menšiu prominenciu ako v predošlom príklade.*

vstup	výstup
7 47 43 47 42 48 48 42	5 5 48

*Tentokrát majú vrcholy na indexoch 1 a 3 rovnakú prominenciu – pre oba platí, že ak sa z nich chceme dostať niekam vyššie, treba prejsť cez sedlo na indexe 4 s nadmorskou výškou 42.*

vstup	výstup
10 1955 1840 1937 1837 2004 2024 1232 1660 1190 1946	118 97 2024 428 756

*Zjednodušený kus Nízkych Tatier. Postupne zľava doprava Chabenec (vrchol), sedlo pod Chabencom, Kotliská (vrchol), sedlo Poľany, Dereše, Chopok (vrchol), Čertovica, Homôľka (vrchol), sedlo Priehyba a Kráľova hoľa (vrchol).*

### A-I-3 Strelec

*Toto je teoretická úloha. Pomocou webového rozhrania odovzdajte súbor vo formáte PDF, obsahujúci riešenie, spĺňajúce požiadavky uvedené v pravidlách.*

*Strelec* je klasická šachová figúrka. Pohybuje sa tak, že ho posunieme v niektorom šikmom smere (po niektorej diagonále) o jedno alebo viac políček. (Ak máme políčka šachovnice klasickým spôsobom ofarbené čiernou a bielou, bude sa každý strelec pohybovať len po políčkach jednej farby.)

Máme obriu šachovnicu s  $r$  riadkami a  $s$  stĺpcami. Na každom políčku je napísané jedno písmeno.

Chceme po nej preskákať strelcom tak, aby sa postupne zastavil presne na písmenkách daného slova  $w$ . (Začať môžeme na ľubovoľnom políčku obsahujúcom prvé

písmeno  $w$ , každým ďalším ťahom sa musíme presunúť na políčko obsahujúce jeho nasledujúce písmeno.)

Koľkými rôznymi spôsobmi sa to dá spraviť?

Namiesto správnej odpovede stačí, keď vypočítate, aký zvyšok dáva po delení  $10^9 + 7$ . (Správna odpoveď totiž môže byť veľmi veľká.)

### Formát vstupu a výstupu

V prvom riadku vstupu sú rozmery šachovnice:  $r$  a  $s$ . V druhom riadku je slovo  $w$ . Zvyšok vstupu tvorí popis písmen na šachovnici:  $r$  riadkov a v každom z nich  $s$  písmen.

Na výstup vypíšete jeden riadok so správnou odpoveďou.

### Obmedzenia a hodnotenie

Môžete predpokladať, že všetky písmená na vstupe sú veľké písmená anglickej abecedy. Veľkosť abecedy môžete pri analýze algoritmu považovať za konštantu.

Plný počet bodov môžu dostať riešenia, ktoré efektívne vyriešia vstupy pre  $r, s \leq 1000$  a  $|w| \leq 100$ .

Nanajvýš 7 bodov môžu dostať riešenia, ktoré efektívne vyriešia vstupy pre  $r, s, |w| \leq 100$ .

Nanajvýš 5 bodov môžu dostať riešenia, ktoré efektívne vyriešia vstupy pre  $r, s \leq 6$  a  $|w| \leq 12$ .

Nanajvýš 3 body môžu dostať riešenia, ktoré efektívne vyriešia vstupy v ktorých je nanajvýš  $10^6$  platných spôsobov skákania.

### Príklady

vstup	výstup
3 4 OI MALO KIVI OBAL	1
vstup	výstup
3 5 BRAT BANAN NEMAL SUPKU	0

Keďže na šachovnici nemáme žiadne  $R$  ani  $T$ , je zjavné, že po písmenách slova  $BRAT$  sa preskákať nedá.

vstup	výstup
3 5 UUUUUU UUUUU UKSPU UUUUU	224

Ak riadky a stĺpce číslujeme od 0 vľavo hore a políčka zapisujeme (riadok, stĺpec), jedna prípustná možnosť skákania je  $(1, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (1, 4) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (1, 4)$ .

vstup	výstup
6 8 KSP KSPPSKSP PPSKSKSP SKKSKSKP PPPSKSKK KKSKSKPP PPPSKSKP	102

Jedno prípustné riešenie je začať na  $K$  úplne vľavo hore, odtiaľ sa posunúť o tri políčka doprava dodola na  $S$  a odtiaľ dve políčka doľava dodola na  $P$ . Iné prípustné riešenie začne rovnakým pohybom na  $S$  a potom sa vráti o dve políčka doľava dohora na iné  $P$ .

#### A-I-4 Pokazený rover

Toto je teoretická úloha. Pomocou webového rozhrania odovzdajte súbor vo formáte PDF, obsahujúci riešenie, spĺňajúce požiadavky uvedené v pravidlách. K tejto úlohe patrí študijný text uvedený na nasledujúcich stranách. Odporúčame najskôr prečítať ten a až potom sa vrátiť k samotným súťažným úlohám.

**Podúloha A** (2 body): V lokalite  $j$  ama sú nejaké kamienky. Napíšte ľubovoľný program, po ktorého skončení bude v lokalite  $j$  ama štyrikrát toľko kamienkov ako teraz. (Pomôcka: najkratšie riešenie tejto podúlohy má len dve inštrukcie.)

**Podúloha B** (2 body): V lokalitách  $A$  a  $B$  máme nejaké neznáme počty kamienkov, ktoré označíme  $a$  a  $b$ . Lokalita  $C$  je prázdna. Napíšte program, ktorý porovná  $a$  a  $b$ .

Ak sú si rovné, do lokality C uloží kamienok, inak ju nechá prázdnu. Na konci behu programu musia lokality A a B obsahovať svoje pôvodné počty kamienkov.

**Podúloha C** (3 bodov): Napíšte pre rover makro pre delenie so zvyškom. Toto makro bude mať ako parametre štyri lokality: Prvé dve na začiatku obsahujú nejaké neznáme počty kamienkov, ktoré označíme  $a$  a  $b$  (pričom môžete predpokladať, že  $b > 0$ ). Tieto isté počty v nich musia byť aj na konci. Druhé dve lokality sú na začiatku prázdne a chceme do nich uložiť celú časť podielu ( $a \text{ div } b$ ) a zvyšok po delení ( $a \text{ mod } b$ ).

**Podúloha D** (3 bodov): V lokalitách A a B máme nejaké neznáme počty kamienkov, ktoré označíme  $a$  a  $b$ . Môžete predpokladať, že sú oba kladné. Lokalita C je prázdna. Napíšte program, ktorý do lokality C uloží práve  $\text{nsd}(a, b)$  kamienkov (kde  $\text{nsd}$  označuje najväčšieho spoločného deliteľa). V tejto podúlohe je povolené ľubovoľne zmeniť obsah lokalít A a B.

### Študijný text: Pokazený rover

Na Marse máme rover. Voľakedy sme mali veľké plány, no po tom, ako ho zasiahla piesočná búrka a pokazila mu skoro všetky periférie, ostal rover takmer nepoužiteľný. Jediné, čo ešte stále vie robiť, je presúvať sa medzi lokalitami a nosiť z miesta na miesto nejaké kamienky. Našou úlohou v tejto sérii úloh bude naučiť rover robiť aspoň nejaké použiteľné výpočty. *Nebude nám pri tom záležať na časovej zložitosti programov, len na ich korektnosti.*

Do roveru vieme na diaľku nahráť program: konečnú postupnosť inštrukcií. Niektoré inštrukcie môžu mať návestia (labels) – symbolické mená, pomocou ktorých sa na ne vieme odkazovať.

Rover pozná na Marse dve špeciálne lokality: *jedáleň* a *kameňolom*. Pre stručnosť ich budeme označovať J a K. V jedálni je momentálne práve jeden kamienok, inak je to lokalita ako každá iná. V kameňolome je vždy k dispozícii dostatočne veľa kamienkov.

Každému inému reťazcu má rover priradenú nejakú unikátnu lokalitu na Marse, kam sa dajú ukladať kamienky. Ak nie je povedané ináč, predpokladáme, že všetky takéto lokality sú prázdne – neobsahujú žiadne kamienky.

Jediná inštrukcia, ktorú ešte rover vie vykonávať, vyzerá nasledovne:

1. Príď do lokality Y. Spočítaj si do pomocnej premennej, koľko je tam kamienkov.
2. Príď do lokality X. Pokús sa nabráť taký počet kamienkov aký máš v pomocnej premennej.
3. Ak sa to podarilo, odnes tieto kamienky do lokality Z, tam ich vysyp a pokračuj nasledujúcou inštrukciou.
4. Ak sa to nepodarilo (t.j. v lokalite X nie je dost kamienkov), vráť lokalitu X do pôvodného stavu a pokračuj inštrukciou s návěstím N.

Program, ktorý pošleme roveru, bude teda postupnosťou takýchto inštrukcií. Inštrukciu vrátane návestia budeme zapisovať nasledovne:

navestie: prenes X Y Z N

V ľudskej reči môžeme jednotlivé parametre tejto inštrukcie čítať nasledovne:

prenes (odkiaľ) (koľko) (kam) (čo robíte ak sa nepodarilo)

Ako štvrtý parameter môžeme písať – (pomlčku) ak chceme, aby vykonávanie programu aj v prípade neúspechu pokračovalo nasledujúcou inštrukciou.

Lokality X, Y a Z nemusia byť navzájom rôzne. Jediné obmedzenie je, že kameňolom (kde je „nekonečne veľa“ kamienkov) nesmieme použiť ako lokalitu Y.

Vykonávanie programu sa skončí, keď sa dostane na neexistujúcu inštrukciu – teda buď keď vykonáme poslednú inštrukciu a máme pokračovať nasledujúcou po nej, alebo keď skočíme na neexistujúce navestie.

#### *Príklad 1: príkazy, ktoré skoro nič nerobia*

Čo spraví rover, keď mu dáme príkaz `prenes X X X I`? Spočíta kamienky v lokalite X, potom ich všetky naberie, potom ich na tom istom mieste zase všetky vysype a bude pokračovať nasledujúcou inštrukciou. Takáto inštrukcia teda Mars vôbec nezmení.

Čo spraví rover, keď mu dáme príkaz `prenes X Y X I`? Aj tentokrát sa počet kamienkov v žiadnej lokalite nezmení, sú však už dva možné priebehy výpočtu: ak bolo v lokalite Y viac kamienkov ako v lokalite X, výpočet bude pokračovať inštrukciou I.

#### *Príklad 2: vyprázdni lokalitu*

Rozmyslite si sami, akým príkazom vieme z lokality odstrániť všetky kamienky.

Riešenie: Na vyprázdnenie lokality X môžeme použiť príkaz `prenes X X K -`. Rover spočíta kamienky v lokalite X, všetky naberie a vysype ich v kameňolome.

#### *Príklad 3: naučíme rover sčítat*

V lokalitách A a B máme nejaké neznáme množstvá kamienkov, lokalita C je prázdna. Chceli by sme v lokalite C mať počet kamienkov rovný súčtu lokalít A a B. Lokality A a B pritom chceme nechať nezmenené.

Opäť, skôr ako si nižšie prečítate riešenie, skúste si ho sami vymyslieť.

Riešenie: Stačí príslušné počty kamienkov presypať z kameňolomu do lokality C. Jedným korektným riešením je teda nasledovný program:

`prenes K A C -`

`prenes K B C -`

*Príklad 4: naučíme rover odčítať*

V lokalitách A a B máme nejaké neznáme počty kamienkov, ktoré označíme  $a$  a  $b$ . Lokalita C je prázdna. Chceli by sme v lokalite C mať počet kamienkov rovný  $a - b$ , resp. rovný nule ak  $b > a$ . Lokality A a B pritom chceme nechať nezmenené.

(Na rozdiel od inštrukcie prenes, ktorá odoberie kamienky len ak vie odobrať všetky, chceme pri našom odčítaní vždy odobrať koľko ide.)

Riešenie: Do lokality C dáme  $a$  kamienkov a potom sa pokúsime odobrať  $b$ . Ak sa nám to podarí, sme hotoví, ak nie, tak ešte celú lokalitu C vyprázdňujeme do kameňolomu.

Program:

```

prenes K A C -
prenes C B K~nulovanie
prenes prazdna J K koniec
nulovanie: prenes C C
K

```

Všimnite si, že v treťom kroku (ktorý sa vykoná, ak sme z lokality C úspešne odobrili  $b$  kamienkov) sa pokúsime z prázdnej lokality presunúť jeden kamienok. To sa nám zaručene nepodarí, program teda skočí na neexistujúce návštie „koniec“ a tým skončí. Štvrtá inštrukcia sa teda vykoná len vtedy, ak na ňu skočíme z druhej.

*Príklad 5: naučíme rover násobiť*

V lokalitách A a B máme nejaké neznáme počty kamienkov, ktoré označíme  $a$  a  $b$ . Lokalita C je prázdna. Chceli by sme v lokalite C mať počet kamienkov rovný  $a \cdot b$ . Lokality A a B pritom chceme nechať nezmenené.

Toto už nevieme spraviť v konštantnom čase. Násobenie je však len opakované sčítanie: kôpku  $ab$  kamienkov vyrobíme tak, že na ňu  $a$ -krát prinesieme  $b$  kamienkov.

Program:

```

prenes K A Akopia -
cyklus: prenes Akopia J K koniec
prenes K B C -
prenes prazdna J K cyklus

```

Na začiatku si vyrobíme kópiu lokality A, ktorú potom počas výpočtu zničíme. Dokola opakujeme: zober jeden kamienok z kópie lokality Akopia a pridaj  $b$  kamienkov do lokality C.



### Makrá

Roveru sa dajú definovať makrá: zoberieme postupnosť príkazov a dáme jej symbolické meno, aby sme nemuseli tú istú postupnosť príkazov rozpisovať viackrát. Makro môže mať parametre: pri rôznych použitíach môže robiť tie isté inštrukcie ale pre iné lokality a iné návestia.

Vo vnútri makra môžeme používať aj pomocné lokality. Lokality, ktoré dáme pri jeho definícii do hranatých zátvoriek, budú pri každom použití makra nahradené inou lokalitou, ktorá sa nikde inde v programe nepoužíva.

Toto isté sa automaticky stane aj so všetkými návestiami, ktoré dáme inštrukciám v definícii makra. Každé takéto návestie je teda akoby viditeľné len z jedného konkrétneho použitia makra.

Pri definícii makra smieme používať aj iné makrá, ktoré sme už skôr zadefinovali.

Nižšie uvádzame niekoľko definícií makier. Riadky začínajúce mriežkou sú komentáre.

```
# instrukcia, ktora nic nezmeni, len jeden krok caka
MAKRO cakaj
    prenes J J J -
END
```

```
# makro s~dvoma parametrami-lokalitami: do Y prida tolko kamienkov,
                                         kolko je v X
MAKRO pridaj X Y
    prenes K X Y -
END
```

```
# makro s~jednym parametrom-navestim: skoci na dane navestie
MAKRO skoc N
    prenes [nova_prazdna_lokalita] J K~N
END
```

```
# makro pre nasobenie: do Z~prida sucin poctov kamienkov z X a Y
MAKRO vynasob X Y
Z~pridaj X [Xkopia]
    cyklus: prenes [Xkopia] J K koniec
            prenes K Y Z -
            skoc cyklus
    koniec: cakaj
END
```

Všimnite si, že keď sme vyššie písali samostatný program pre násobenie, stačilo nám, že návestie koniec nikde neexistuje a skokom naň sme ukončili program.

Pri písaní makra toto návěstie dáme pred prázdnu inštrukciu na konci makra, keďže chceme, aby po ukončení násobenia program ešte pokračoval ďalej.

*Příklad 5: naučíme rover počítať tretiu mocninu*

Pomocou vyššie uvedených makier ľahko napíšeme program počítajúci tretiu mocninu. V lokalite A máme nejaký neznámy počet kamienkov, ktorý označíme  $a$ . Lokalita B je prázdna a chceme do nej uložiť  $a^3$  kamienkov.

Program:

```
vynasob A A pomocna_lokalita
vynasob A pomocna_lokalita B
```

Pre názornosť ešte ukážeme, ako by mohol vyzerat' ten istý program, ak by sme všetky makrá nahradili ich definíciami.

```

      prenes K A Akopia1           -
cyklus1: prenes Akopia1 J           K koniec1
      prenes K A pomocna_lokalita -
      prenes hocico1 J             K cyklus1
koniec1: prenes J J                 J -
      prenes K A Akopia2           -
cyklus2: prenes Akopia2 J           K koniec2
      prenes K pomocna_lokalita B  -
      prenes hocico2 J             K cyklus2
koniec2: prenes J J                 J -

```

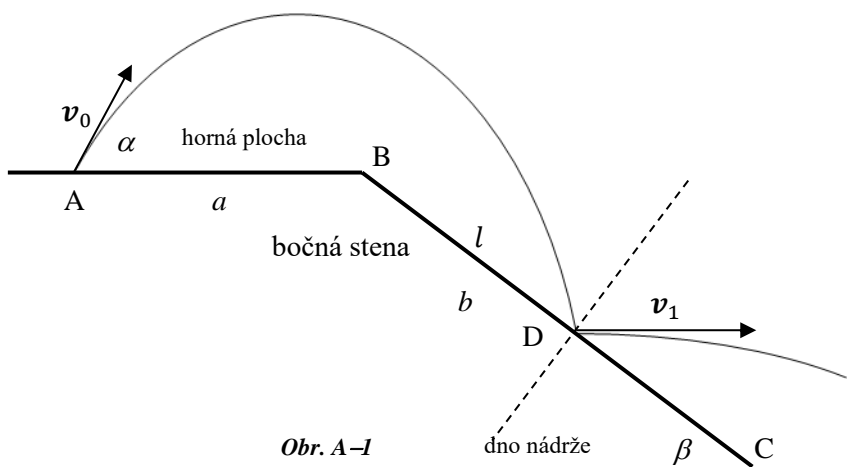
*Pre úlohovú komisiu Olympiády v informatike spracovali Michal Anderle <zaba@ksp.sk> a Michal Forišek <misof@ksp.sk>.*

## Texty úloh 1. kola 63. ročníka Fyzikálnej olympiády (šk. r. 2021-2022) kategórie A,B,C,D

### Kategória A

#### 1. Šikmý vrh

Hladká bočná stena zatiaľ prázdnej vodnej nádrže má uhol sklonu  $\beta = 35^\circ$  a dĺžku spádovej úsečky  $b = 16,0$  m. Na vodorovnom brehu vo vzdialenosti  $a = 10,0$  m od hornej hrany steny stojí chlapec (bod A na obr. A-1) a hádže loptičku v rovine kolmej na hranu steny rýchlosťou vrhu  $v_0 = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



- Určte rozsah uhlov vrhu  $\alpha$ , pre ktoré loptička dopadne na hornú vodorovnú plochu.
- Určte rozsah uhlov vrhu  $\alpha$ , pre ktoré loptička dopadne na vodorovné dno nádrže. Do akej maximálnej vzdialenosti  $c$  od dolného okraja C bočnej steny môže loptička doletieť, a aký musí byť v tomto prípade uhol  $\alpha_1$  vrhu? Úlohu riešte graficky.
- Určte uhol vrhu  $\alpha_2$ , pre ktorý sa loptička po dopade na bočnú stenu v bode D, po dokonale pružnom odraze, odrazí vo vodorovnom smere. Určte dĺžku  $l$  úsečky BD,

rýchlosť  $v_1$  po odraze loptičky v bode D a vzdialenosť  $d_1$  od bodu C, v ktorej loptička dopadne na dno nádrže.

Odpor vzduchu pri pohybe loptičky neuvažujte, bod A vrhu uvažujte na úrovni hornej plochy,  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

## 2. Balón na retiazke

Chlapci urobili zaujímavý experiment s nafukovacím balónikom v tvare gule naplneným héliom. Najprv ho za bezvetria vypustili nad vodorovnou plochou na veľmi tenkej niti a merali rýchlosť jeho stúpania. Už v malej výške stúpala zvislo nahor rovnomerným pohybom rýchlosťou  $u_1 = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

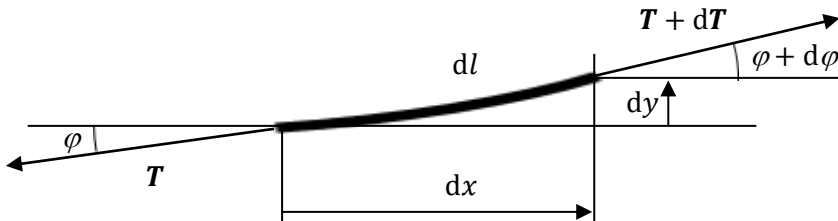
Potom balónik stiahli nazad, pripevnili naň kovovú retiazku s dĺžkovou hmotnosťou  $\mu = 50 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$  a dĺžkou  $L = 2,5 \text{ m}$ . Reťaz bola voľne položená na ploche, balónik uvoľnili, a začal stúpať. Stúpala, až horný koniec retiazky pripevnený k balóniku zastal vo výške  $h_1 = 50 \text{ cm}$ .

Potom začal fúkať vietor rýchlosťou  $v$  vo vodorovnom smere a chlapci sa rozhodli experiment s balónikom s pripevnenou retiazkou opakovať. Stúpanie balónika retiazka znova zastavila, ale súčasne bol balónik unášaný v smere vetra, pričom retiazku ťahal za sebou. Faktor trenia medzi retiazkou a vodorovnou plochou  $f = 0,45$ . Odporová sila vzduchu pri pohybu balónika je priamoúmerná druhej mocnine rýchlosti balónika vzhľadom na okolitý vzduch.

a) Nakreslite obrázok balónika s retiazkou unášaného vetrom. V obrázku zakreslite vektory síl, ktoré pôsobia na balónik, a odlišnou formou (inou farbou alebo čiarkovane) sily pôsobiace na lanko. Pohyb sústavy balónik–retiazka stručne opíšte.

b) Určte maximálnu rýchlosť  $v_1$  vetra, pri ktorej sa balónik nebude pohybovať.

Chlapci zmerali výšku  $h_2$  horného konca retiazky, pripevnenej k pomaly unášanému balóniku. Doma sa rozhodli, že si výšku  $h_2$  vypočítajú, a výsledok porovnajú s hodnotou získanou meraním. Tvar zavesenej retiazky je dosť zložitý, nepripomínala im žiadnu známu krivku, preto sa rozhodli ju skúmať po veľmi malých úsekoch. Na obr. A–2 je znázornený veľmi malý (elementárny) úsek retiazky dĺžky  $dl$ , na ktorý



Obr. A–2

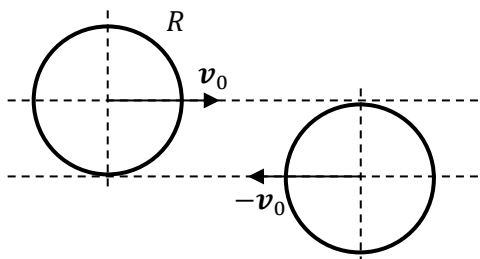
pôsobia z oboch strán ťahové sily v smere dotyčnice. Tvar retiazky je zakrivený, preto uhol  $\varphi$  medzi dotyčnicou a vodorovným smerom sa na úseku  $dl$  zmení o uhol  $d\varphi$ .

Napísali rovnice rovnováhy síl na elementárnom úseku retiazky vo vodorovnom i zvislom smere a z týchto rovníc vyjadrili pomer  $dT/dy$  zmeny veľkosti  $T$  ťahovej sily  $T$  pripadajúcej na rozdiel výšky  $dy$  koncov elementu retiazky. Využili pritom približné vzťahy pre malý uhol  $\sin d\varphi \approx d\varphi$  a  $\cos d\varphi \approx 1$ .

- Určte použitím naznačeného postupu výšku  $h_2$ , v ktorej sa nachádzal horný koniec retiazky pripevnený k balóniku unášanému vetrom. Rýchlosť vetra je  $v_1$ .
- Určte výšku  $h_3$  pripevnenia retiazky a rýchlosť pohybu  $u_2$  balónika pri rýchlosti vetra  $v_2 = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### 3. Zrážka krúžkov

Dva rovnaké tenké dokonale pružné krúžky s polermi  $R$  sa šmýkajú oproti sebe po hladkom vodorovnom stole rovnako veľkými rýchlosťami s veľkosťou  $v_0$ . Vzdialenosť priamok, po ktorých sa pohybujú stredy krúžkov, je rovná polomeru  $R$  krúžkov (obr. A-3). Pôsobením trenia medzi povrchmi krúžkov sa krúžky po zrážke otáčajú okolo svojej osi kolmej na povrch stola uhlovou rýchlosťou  $\omega$ .



Obr: A-3

- Určte veľkosť  $v$  vektorov rýchlosti krúžkov po zrážke vzhľadom na dosku stola.
- Určte uhlovú rýchlosť  $\omega$ , ktorú získajú krúžky pri zrážke, a smer ich otáčania.
- Určte vzdialenosť  $d$  priamok, po ktorých sa pohybujú stredy krúžkov po zrážke.
- Určte minimálnu hodnotu  $d_m$ , ktorú môže vzdialenosť  $d$  dosiahnuť, a minimálnu hodnotu  $f_m$  faktora trenia medzi povrchmi krúžkov, pre ktorú sa hodnota  $d_m$  dosiahne.
- Určte pomer  $p = Q/E_0$  tepla uvoľneného počas zrážky v dôsledku trenia a celkovej kinetickej energie krúžkov pred zrážkou. Určte maximálnu hodnotu  $p_m$  tohto pomeru.

Úlohu riešte všeobecne a potom číselne pre hodnoty  $v_0 = 50 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $f = 0,10$  a  $R \approx 20 \text{ cm}$ .

Trenie medzi krúžkami a stolom neuvažujte. Deformácia krúžkov počas zrážky je zanedbateľne malá oproti rozmerom krúžkov. Tiež trvanie  $\Delta t$  zrážky (deformácie)

je veľmi krátka, za tento čas je posun stredov krúžkov nepatrný voči rozmerom krúžkov.

#### 4. Elektrická tavná pec

Pri zušľachtovaní (legovaní) kovov prímiesami sa často používa tavenie kovov elektrickým prúdom. Uvažujme nasledujúci jednoduchý model elektrickej pece. Valcovú pec tvorí kovový obal s vysokou teplotou topenia, vo vnútri vyložený keramikou vrstvou s veľmi malou tepelnou vodivosťou. Na celom dne pece je plochá valcová elektróda z kovu s veľmi vysokou teplotou topenia. Horná rovnaká elektróda je v kontakte s horným povrchom taveného telesa (ingotu) a môže sa posúvať vo zvislom smere. Na začiatku sa do pece vloží horúce valcové kovové teleso s výškou  $h_1 = 2,5$  m, priemerom  $d_1 = 120$  cm a teplotou  $t_1 = 200$  °C. Medzi stenou pece a povrchom vkladaneho valca je medzera, obr. A-4 (a), ktorá sa úplne vyplní pri zohrievaní telesa na teplotu topenia, obr. A-4 (b).

Elektródy sú pripojené cez spínač na zdroj konštantného elektrického napätia, pričom medzi elektródami sa udržiava napätie  $U_0 = 3,0$  V.

Po zapnutí spínača sa v kove uvoľňuje teplo, ktoré spôsobí zohriatie a topenie kovu. Pre jednoduchosť predpokladajte, že zohriatie ingotu je v celom objeme rovnomerné, a pri tavení sa roztavená vrstva kovu vytvára zhora nadol. V peci tak vzniká na vrchu valcová vrstva tekutého kovu. Predpokladajte ďalej, že rozhranie valca pevného a kvapalného kovu je rovinné a vodorovné.

Jedna z možností určenia stavu roztápania kovu spočíva v meraní času tavby.

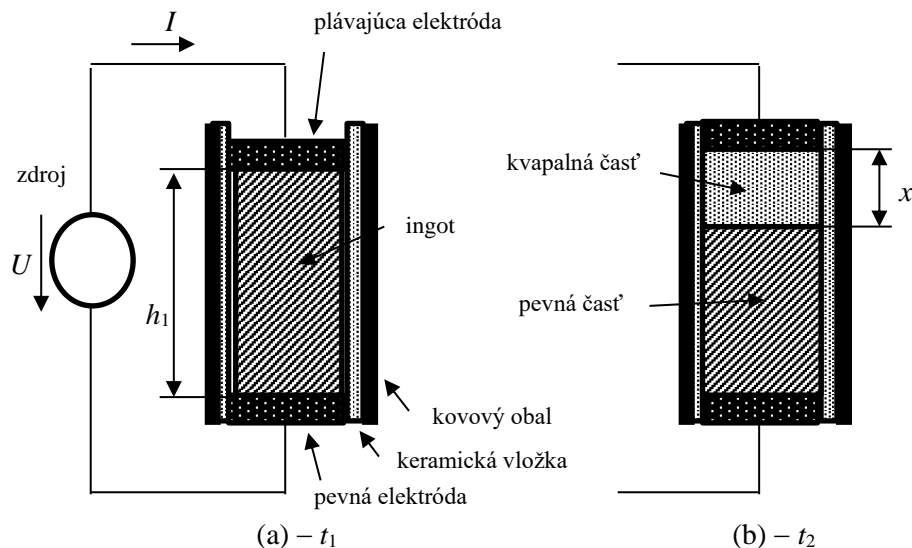
- a) Určte dobu  $\tau_1$ , za ktorú kovové teleso dosiahne teplotu topenia  $t_2 = 660$  °C, a dobu  $\tau_2$  (od okamihu dosiahnutia teploty  $t_2$ ), za ktorú sa celé kovové teleso roztopí.

Druhá možnosť určenia stavu roztápania kovu spočíva v sledovaní zvislého pohybu hornej elektródy.

- b) Odvodte vzťah pre posunutie  $\delta$  hornej elektródy zo začiatkovej polohy ako funkciu hrúbky  $x$  vrstvy tekutého kovu. Určte maximálne posunutie  $\delta_m$ , ktoré zodpovedá roztopeniu celého ingotu.

Tretia možnosť sledovania stavu roztápania kovu spočíva v sledovaní výkonu zdroja elektrického napätia a celkovej dodanej elektrickej energie.

- c) Odvodte vzťah pre výkon  $P$  zdroja elektrického napätia ako funkciu  $x$ . Určte výkon  $P_1$  zdroja v okamihu zopnutia spínača, výkon  $P_2$  v okamihu dosiahnutia teploty topenia  $t_2$  a výkon  $P_3$  v okamihu roztopenia celého kovového telesa.



Obr. A-4

Pri riešení použite materiálové konštanty:

**pre pevné skupenstvo kovu:** hustota  $\rho_0 = 2,70 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  (pre  $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ), koeficient dĺžkovej teplotnej rozťažnosti  $\alpha_L = 23,1 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , hmotnostná tepelná kapacita  $c = 896 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ , hmotnostné skupenské teplo topenia  $l_t = 399 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ , elektrická rezistivita  $\rho_{R0} = 28,2 \text{ n}\Omega \cdot \text{m}$  (pre  $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ), koeficient teplotnej závislosti odporu  $\alpha_R = 4,0 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ .

**pre kvapalnú časť kovu s teplotou  $t_2 = 660 \text{ }^\circ\text{C}$ :**

hustota  $\rho_{2k} = 2,38 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , elektrická rezistivita  $\rho_{Rk} = 245 \text{ n}\Omega \cdot \text{m}$ .

Predpokladajte, že obsah nádoby pece (kov a tavenina) je dokonale tepelne izolovaný od okolia a tepelná kapacita elektród i stien pece je veľmi malá v porovnaní s tepelnou kapacitou kovu v peci. Ďalej predpokladajte, že zohrievanie obsahu pece je pomalé, takže celý obsah pece má v danom okamihu rovnakú teplotu. Hodnoty  $c$ ,  $\alpha_L$  a  $\alpha_R$  považujte za teplotne nezávislé konštanty. Odpor prívodných vodičov neuvažujte.

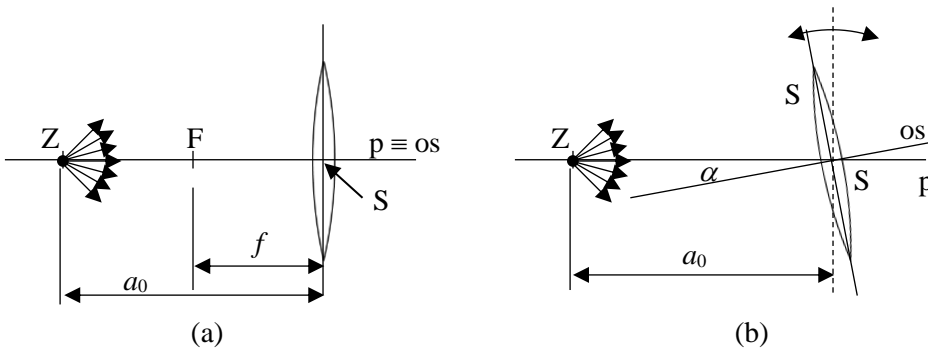
*Pozn.: Uvažujte teplotné závislosti rozmerov, hustoty a rezistivity ingotu. Odôvodneným zjednodušením preved'te, v prípade potreby, integrované funkcie na lineárny tvar. Môže byť aj užitočný výsledok integrálu*

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1+at}{1+bt} dt = \frac{b-a}{b^2} \ln \frac{1+bt_2}{1+bt_1} + \frac{a}{b} (t_2 - t_1), \text{ kde } a, b \text{ sú konštanty.}$$

### 5. Kývajúca sa šošovka

Priamka  $p$  splýva s optickou osou tenkej spojnej šošovky s ohniskovou vzdialenosťou  $f = 25$  cm. Na priamke  $p$  sa nachádza bodový zdroj svetla  $Z$ , obr. A–5 (a), vo vzdialenosti  $a_0 = 40$  cm od šošovky.

a) Prekreslite obrázok A–5(a) a zostrojte v ňom obraz  $Z'$  zdroja. Určte obrazovú



Obr. A–5

vzdialenosť  $b_0$  zdroja výpočtom a výsledok porovnajte s údajom z obrázku.

Šošovku začneme nakláňať tak, že jej optická os zvierá s priamkou  $p$  uhol  $\alpha$  a stred šošovky zostáva na pôvodnom mieste vo vzdialenosti  $a_0$  od zdroja  $Z$ , obr. A–5(b).

- b) Zostrojte obraz  $Z''$  zdroja  $Z$  šošovkou naklonenou o uhol  $\alpha = 15^\circ$ , určte vzdialenosť  $x$  obrazu  $Z''$  od obrazu  $Z'$  a túto hodnotu overte výpočtom.
- c) Šošovka sa začne periodicky vychyľovať podľa harmonickej závislosti  $\alpha = \alpha_m \sin(\omega t)$ , kde  $\alpha_m = 5^\circ$  a  $\omega = 6,28 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Uveďte vzťahy pre časovú závislosť výchylky  $x$  a rýchlosti  $v$  pohybu obrazu  $Z''$  okolo polohy obrazu  $Z'$ . Zostrojte grafy týchto časových závislostí.
- d) Určte minimálnu hodnotu  $x_1$  a maximálnu hodnotu  $x_2$  výchylky  $x$ . Určte maximálnu hodnotu  $v_1$ , minimálnu hodnotu  $v_2$  rýchlosti  $v$  a uhly  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ , pri ktorých rýchlosť  $v$  tieto hodnoty dosahuje.

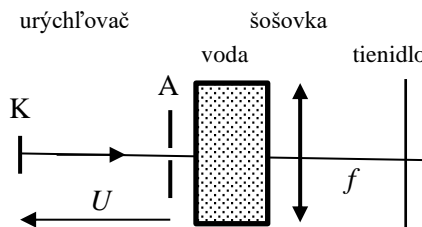
Pozn.: Pre uhly  $\alpha < 5^\circ$  platia s dostatočnou presnosťou vzťahy  $\sin \alpha \approx \alpha$  a  $\cos \alpha \approx 1$ .



## 6. Žiarenie Vavilova – Čerenkova

Ak sa častica s elektrickým nábojom pohybuje v priehľadnom prostredí rýchlosťou väčšou, ako je rýchlosť svetla v tomto prostredí, dochádza k tzv. Vavilovmu-Čerenkovovmu javu. Priehľadné prostredie vybudené elektricky nabitou časticou emituje svetelné žiarenie, a nakoľko častica sa pohybuje rýchlejšie ako svetlo v danom prostredí, vlnový front žiarenia nadobúda kužeľovitý tvar obdobne, ako keď teleso pohybujúce sa vo vzduchu rýchlejšie ako rýchlosť zvuku vytvára rázovú akustickú vlnu v podobe Machovho kužeľa.

Uvažujte široký zväzok relativistických elektrónov, ktorý sa šíri vo vrstve vody. Za vrstvou vody sa nachádza spojná šošovka a v jej ohniskovej rovine tienidlo, obr. A–6. Elektróny sú emitované z katódy K a urýchľujú sa medzi anódou A a katódou K elektrickým napätím  $U$ . Predpokladajte, že na výstupe urýchľovača sa všetky elektróny pohybujú rovnakou rýchlosťou a v rovnakom smere kolmo na povrch vrstvy vody.



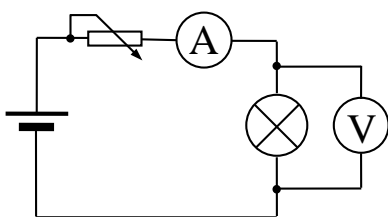
Obr. A–6

- Určte minimálne urýchľovacie napätie  $U_m$ , aby vo vrstve vody nastal Vavilovov-Čerenkovov jav, a zodpovedajúcu hybnosť  $p_m$  a energiu  $E_m$  elektrónov na výstupe urýchľovača. Energiu vyjadrite v jednotkách J a eV.
- Dokážte, že ak majú všetky elektróny zväzku vo vode rovnakú energiu  $E = kE_m$ , kde  $k > 1$ , obrazec, ktorý vzniká na tienidle je kružnica. Určte polomer tejto kružnice.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty:  $k = 2$ , index lomu vody  $n = 1,33$ ; hmotnosť elektrónu  $m = 9,1 \times 10^{-31}$  kg, náboj elektrónu  $e = -1,6 \times 10^{-19}$  C, rýchlosť svetla vo vákuu  $c = 3,0 \times 10^8$  m  $\cdot$  s $^{-1}$ , ohnisková vzdialenosť šošovky  $f = 15$  cm.

*Pozn.: Hmotnosť elektrónu  $m$  sa s rýchlosťou nemení (niekedy sa preto nazýva invariantná, či pokojová). V populárnej literatúre sa ale často používa pojem „relativistická hmotnosť“ pre označenie výrazu  $m_r = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , ktorá s rýchlosťou v elektrónu rastie.*

### 7. Žiarenie vlákna žiarovky – experimentálna úloha



Obr. A-7

Vlákno žiarovky sa približne správa ako čierne teleso, intenzita vyžarovania vlákna je určená Stefanovým-Boltzmannovým zákonom

$$H_e = \frac{\Phi_e}{S} = \sigma T^4,$$

kde  $\Phi_e$  je žiarivý tok,  $S$  je veľkosť žiariacej plochy,  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  je Stefanova-Boltzmannova konštanta a  $T$  predstavuje

termodynamickú teplotu žiariacej plochy.

Žiarivý tok žiarovky  $\Phi_e$  je prakticky rovnaký ako jej elektrický príkon  $P = UI$ .

Predpokladajte, že závislosť odporu vlákna žiarovky od teploty je približne lineárna a môžete ju vyjadriť vzťahom  $R = R_1(1 + \alpha\Delta t)$ ,

kde  $R_1$  je odpor pri vzťažnej teplote  $t_1$ ,  $\Delta t = t - t_1$  je zmena teploty a  $\alpha$  je teplotný súčiniteľ odporu. Ak zvolíme vzťažnú teplotu medzi  $15^\circ\text{C}$  a  $25^\circ\text{C}$ , má wolframový drôt, z ktorého je vyrobené vlákno žiarovky, teplotný súčiniteľ odporu  $\alpha = 4,4 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ . V úlohe použijete malú žiarovku s menovitými hodnotami napätia a prúdu  $U_n = 24 \text{ V}$ ,  $I_n = 0,1 \text{ A}$ , ktorá sa bežne predáva v predajniach elektrotechnických súčiastok.

*Úlohy:*

- V zapojení podľa schémy na obrázku A-7 odmerajte závislosť žiarovkou prechádzajúceho prúdu od napätia na žiarovke. Z výsledkov meraní určte, ako sa mení s narastajúcim napätím príkon žiarovky a odpor jej vlákna.
- Zostrojte graf závislosti odporu žiarovky od napätia. Z grafu stanovte odpor vlákna pri nulovom napätí, pri ktorom je teplota vlákna rovnaká ako teplota okolia.
- Určte, ako sa mení teplota vlákna žiarovky s narastajúcim napätím. Potrebný vzťah odvodte. Za vzťažnú teplotu zvolte teplotu laboratória.
- Overte, že pri napätí väčšom ako 5 V, kedy sa takmer celá dodaná energia vyžiari, je pomer  $P/T^4$  konštantný.
- Stanovte plošný obsah časti povrchu dokonale čierneho telesa, ktoré by pri zistených teplotách žiarilo rovnako ako daná žiarovka.

*Poznámka:*

Prvá časť merania (do 1 V) slúži predovšetkým na určenie odporu žiarovky  $R_1$  pri teplote okolia; v druhej časti (od 5 V) overíme Stefanov-Boltzmannov zákon.

Výsledky meraní a výpočtov zapíšte do tabuľky:

$U/V$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	1,0	5,0	10	15	20	25
$I/mA$											
$R/\Omega$											
$P/W$											
$T/K$											
$P/T^4$											

## Kategória B

### 1. Pohyb Mesiaca

Sústava Zeme a Mesiaca je súčasťou Slnčnej sústavy a okolo Slnka obieha približne po kružnicovej trajektórii. Stredná vzdialenosť Zeme od Slnka definuje jednu z astronomických jednotiek dĺžky – AU (astronomická jednotka).

- a) Vyjadrite AU pomocou základnej jednotky dĺžky v sústave SI. Uveďte ďalšie dve väčšie jednotky dĺžky používané v astronómii. Uveďte ich definíciu a číselnú hodnotu v jednotkách AU.

Zem neobieha okolo Slnka ako samostatné teleso, ale ako sústava Zem–Mesiac. Trajektória stredu Zeme a stredu Mesiaca v heliocentrickej sústave sú pomerne zložité, nakoľko obiehajú jeden spoločný bod T.

- b) Určte polohu bodu T, ktorého trajektória okolo Slnka v heliocentrickej sústave je jednoduchá kružnica. Polohu určte vzhľadom na stred Zeme.

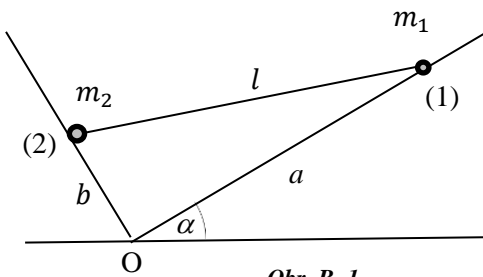
Sledujte sústavu Zem–Mesiac v heliocentrickej vzťažnej sústave (začiatok v strede Slnka a osi smerujú k vzdialeným hviezdám). Mesiac obieha okolo bodu T, ktorý sa pohybuje okolo Slnka.

- c) Určte dobu  $T_M$  obehu Mesiaca okolo bodu T vzhľadom na vzdialené hviezdy (siderickú dobu obehu).
- d) Určte maximálnu a minimálnu rýchlosť Mesiaca v heliocentrickej vzťažnej sústave.
- e) Nakreslite obrázok a zakreslite v ňom Slnko a Zem. Do obrázku zakreslite polohy Mesiaca v splne a v nove. Určte polomery krivosti  $r_{nov}$  a  $r_{spln}$  trajektórie Mesiaca v heliocentrickej sústave v jednotkách AU. Polohy stredov krivosti zakreslite približne do obrázku.

Predpokladajte, že bod T obieha okolo Slnka po kružnicovej trajektórii, a v tej istej rovine obieha Mesiac a Zem okolo bodu T. Predpokladajte, že v sústave bodu T sú trajektórie Zeme aj Mesiaca kružnice.

Potrebné číselné hodnoty vyhľadajte vo vhodných informačných zdrojoch (tabuľky, internet, atď.). Úlohu riešte všeobecne, potom pre požadované hodnoty.

## 2. Rovnovážna poloha

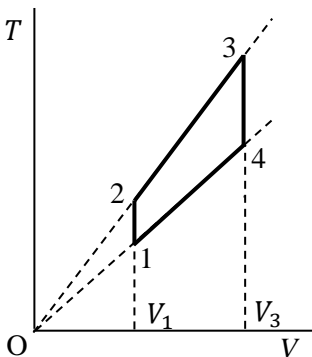


Obr. B-1

Dve malé oceľové guľôčky (1) a (2) s hmotnosťami  $m_1 = 1,00$  g a  $m_2 = 0,60$  g sú spojené ľahkou pevnou tyčkou s dĺžkou  $l = 35$  cm, ktorej hmotnosť je v porovnaní s hmotnosťami guľôčok veľmi malá. Túto sústavu vložíme do pravouhlej krabice s hladkými pevnými stenami, ktorá je upevnená na vodorovnej podložke tak, že jedna jej stena zvierá s podložkou uhol  $\alpha = 30^\circ$ , obr. B-1. Vzdialenosť guľôčky (1) od

hrany O krabice označíme  $a$ .

- Určte potenciálnu energiu  $E_p$  sústavy guľôčok vzhľadom na vodorovnú podložku ako funkciu pomeru  $p = a/l$ .
- Zostrojte graf  $E_p$  ako funkciu pomeru  $p$ .
- Výpočtom určte pomer  $a/l$  dĺžok, pri ktorom je sústava v rovnovážnej polohe a výsledok porovnajete s hodnotou získanou z grafu.
- Určte, či rovnovážna poloha je stabilná alebo nestabilná.



Obr. B-2

Rozmery guľôčok považujte za veľmi malé v porovnaní s dĺžkou  $l$  a považujte ich za hmotné body. Trenie medzi guľôčkami a stenami krabice neuvažujte. Úlohu riešte všeobecne, potom pre zadané hodnoty.

## 3. Kruhový dej 1

Na obr. B-2 je T-V diagram termodynamického deja s ideálnym plynom, s jednoatómovými molekulami hélia He s látkovým množstvom  $n = 2,0$  mol. Začiatková teplota  $T_1 = 250$  K, začiatkový objem  $V_1 = 4,5$  L a účinnosť tohto deja  $\eta = 8,0$  %.

Pomer  $k = T_4/T_2$  teplôt v stavoch 4 a 2 je rovnaký, ako pomer  $k = T_2/T_1$  teplôt v stavoch 2 a 1.

- Určte pomer  $k$ .
- Určte teplotu  $T_4$  v stave 4.
- Určte tlak  $p_1$  a  $p_3$  v stavoch 1 a 3.

Úlohu riešte všeobecne, potom pre zadané hodnoty.

#### 4. Temperovanie vody v akváriu

Chlapci robili pokus so zohrievaním a chladením vody vo vaničke akvária s rozmermi podstavy  $a = 30$  cm,  $b = 20$  cm a výškou  $h = 25$  cm. Potrebovali zistiť, aký príkon musí mať ponorný elektrický ohrievač, aby sa udržala vo vaničke stála teplota  $t_s = 27$  °C, potrebná pre chov rybičiek. Pokus robili v miestnosti s teplotou vzduchu  $t_0 = 20$  °C. Vaničku postavili na tepelne izolačnú dosku z penového polystyrénu a rovnakou doskou vaničku prikryli. Vaničku naplnili až po okraj vodou s teplotou  $t_1 = 40$  °C a pozorovali zmenu teploty vody s časom. Teplota vody vo vaničke sa zmenila o  $\Delta t_1 = -2,0$  °C (poklesla) za dobu  $\tau_1 = 5,0$  min. Predpokladajte, že tepelný tok bočnými stenami vaničky je priamoúmerný rozdielu teplôt  $t$  vody vo vaničke a  $t_0$  v izbe.

- Určte dobu  $\tau_2$  od začiatku merania, za ktorú klesne teplota  $t$  vody vo vaničke na hodnotu  $t_2 = 25$  °C.

Potom do vody vo vaničke ponorili ponorný ohrievač s príkonom  $P = 500$  W a pripojili ho k zdroju elektrického napätia  $U = 230$  V. Po dlhšom čase sa ustálila teplota vody vo vaničke na hodnote  $t_3 = 45$  °C.

- Určte odpor  $R_0$  ohrievača počas zohrievania vody.

Chlapci ale potrebovali dosiahnuť prevádzkovú teplotu v akváriu  $t_s = 27$  °C. Keďže iný zdroj nemali, rozhodli sa, že výkon ohrievača prispôbia zaradením predradného rezistora do série s ohrievačom.

- Určte odpor  $R$  predradného rezistora, aby sa udržiavala požadovaná konštantná teplota vody  $t_s$ .

Do vaničky naliali vodu s teplotou  $t_0$  a zapli ohrievač so skratovaným (vyradeným) predradným rezistorom.

- Určte čas  $\tau_3$ , za ktorý sa voda zohreje na teplotu  $t_s$  a pri ktorej chlapci opäť zardia predradný rezistor, aby sa táto teplota už ďalej nemenila.

Predpokladajte, že v celom objeme vody je rovnaká teplota, tepelná kapacita ohrievača i stien vaničky je zanedbateľne malá a odpor ohrievača nezávisí od prechádzajúceho prúdu. Úlohu riešte všeobecne, potom pre zadané hodnoty.

Pozn.: Rovnica  $(x - a)dy = b dx$  vedie na integrál  $\frac{1}{b} \int_{y_1}^{y_2} dy = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x-a}$ ,

a na výsledok  $\frac{1}{b}(y_2 - y_1) = \ln \frac{x_2 - a}{x_1 - a}$ .

### 5. Obvod s kondenzátorom

Zostavili sme elektrický obvod podľa schémy na obr. B-3, ktorý pozostáva zo zdroja Z elektrického napätia  $U_Z$ , štyroch rezistorov s odporom  $R_1$  až  $R_4$ , kapacitára s kapacitou  $C$  a dvoch spínačov  $S_1, S_2$ .

Sledujeme nabíjanie a vybíjanie kapacitára. Na začiatku je obvod v ustálenom stave s vypnutými spínačmi  $S_1, S_2$ . Potom zapneme spínač  $S_1$ .

- Určte prúd  $I_{Z1}$  zdroja Z v okamihu zapnutia, prúd  $I_{Z2}$  po ustálení napätia  $U_{C1}$  na kapacitore a napätie  $U_{C1}$ .
- Určte prúd  $I_{C1}$  prechádzajúci kapacitárom v okamihu zapnutia spínača  $S_1$  a dobu  $\tau_1$ , za ktorú by sa kapacitor nabil na napätie  $U_{C1}$  prúdom  $I_{C1}$ . Táto doba sa nazýva časová konštanta nabíjania (pri vypnutom spínači  $S_2$ ).

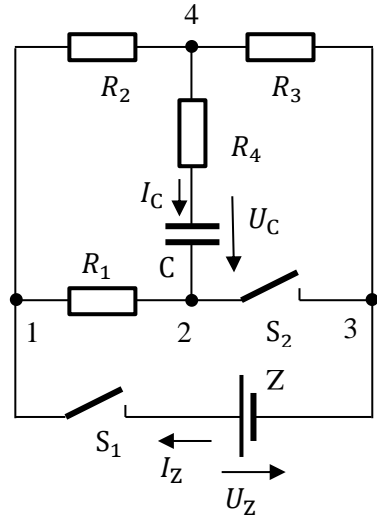
Pri zapnutom spínači  $S_1$  zapneme spínač  $S_2$ .

- Určte prúd  $I_{Z3}$  zdroja v okamihu zapnutia spínača  $S_2$ , prúd  $I_{Z4}$  po ustálení napätia kapacitára  $U_{C2}$  a napätie  $U_{C2}$ .
- Určte prúd  $I_{C2}$  prechádzajúci kapacitárom v okamihu zapnutia spínača  $S_2$  a čas  $\tau_2$ , za ktorý by sa prúdom  $I_{C2}$  zmenilo napätie kapacitára na ustálenú hodnotu  $U_{C2}$ .

Nakoniec vypneme spínač  $S_1$ .

- Určte prúd  $I_{C3}$  prechádzajúci kapacitárom v okamihu vypnutia spínača  $S_1$ , výsledné ustálené napätie  $U_{C3}$  na kapacitore a čas  $\tau_3$ , za ktorý by sa zmenilo napätie na kapacitore na výslednú ustálenú hodnotu  $U_{C3}$  pri prúde  $I_{C3}$ .

Pre jednotlivé prípady nakreslite príslušné schémy zapojenia.



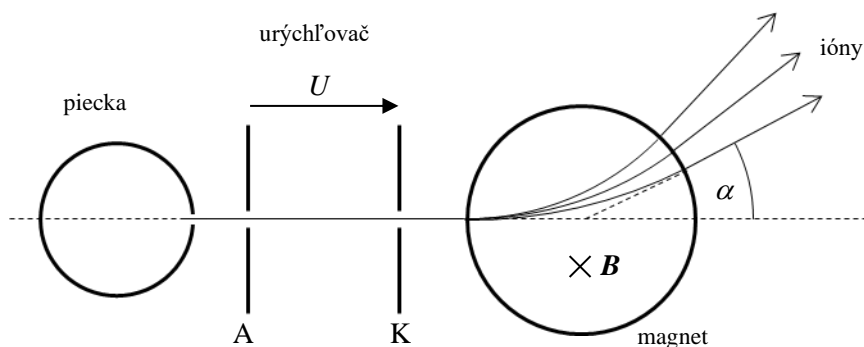
Obr. B-3

Riešte všeobecne, a potom pre hodnoty:

$$UZ = 12 \text{ V a } R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R = 150 \, \Omega, C = 200 \, \mu\text{F}.$$

## 6. Separácia iónov

Pri vysokoteplotnom spaľovaní odpadových látok dochádza k ionizácii atómov spaľovanej látky a k oddeleniu jednotlivých ionizovaných atómov. Na analýzu prítomnosti niektorých ľahkých kovov v spaľovaných látkach možno použiť zariadenie na obr. B-4. Otvorom v spaľovacej pecku sú emitované ióny rôznych prvkov. V emitovanom zväzku sa nachádzajú aj kladné ióny niektorých ionizovaných kovov (atómov zbavených valenčných elektrónov – uvažujte jednomocné alebo dvojmocné ióny prvkov z prvého a druhého stĺpca periodickej tabuľky). Zväzok iónov sa najprv urýchľuje v lineárnom elektrickom urýchľovači a ióny sa potom oddeľujú v magnetickom separátore. V lineárnom urýchľovači sa ióny pohybujú medzi anódou A a katódou K, medzi ktorými je elektrické napätie  $U = 40 \text{ kV}$ . Magnetický separátor tvorí dvojica silných valcových magnetov s polomerom  $R = 60 \text{ mm}$  umiestnených nad sebou a oddelených medzerou. Ióny prechádzajú medzerou v rovine kolmej na os valcov. V medzere medzi magnetmi je homogénne magnetické pole s indukciou  $B = 0,5 \text{ T}$ .



Obr. B-4

Rýchlosť  $v_0$  iónov vystupujúcich z pecky je podstatne menšia od rýchlosti  $v$  na výstupe urýchľovača. Ióny po urýchlení vstupujú do separátora kolmo na os magnetov a vystupujú z neho pod rôznymi uhlami  $\alpha$ . Zo zmeraných uhlov  $\alpha$  možno určiť druh iónu.

- Určte rýchlosť  $v$  iónu na výstupe elektrického urýchľovača, ak ión má hmotnosť  $m$  a elektrický náboj  $ze$ , kde  $z$  je mocnstvo iónu a  $e$  elementárny náboj.
- Určte uhol  $\alpha$  vychýlenia iónu v separátore z pôvodného smeru, a hmotnosť  $m$  iónu zodpovedajúcu tomuto uhlu  $\alpha$ .

- c) Medzi separovanými iónmi vystupujúcimi zo separátora boli zistené výrazné maximum s uhlami odchýlenia  $\alpha_1 = 24,5^\circ$ ,  $\alpha_2 = 18,7^\circ$ ,  $\alpha_3 = 33,5^\circ$  a  $\alpha_4 = 26,2^\circ$ . Určte, o aké ióny ide? Aký uhol vychýlenia  $\alpha_H$  zodpovedá iónu  $H^+$ ?

Úlohu riešte všeobecne, potom pre požadované hodnoty.

### 7. Magnetické pole Zeme – experimentálna úloha

Indukcia magnetického poľa dlhého priameho prúdovodiča je v každom bode okolitého priestoru kolmá na smer prúdovodiča a má veľkosť  $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ , kde  $\mu_0$  je permeabilita vákuu,  $I$  je prúd vo vodiči a  $r$  je kolmá vzdialenosť bodu od vodiča.

*Úloha:*

Meraním overte závislosť indukcie magnetického poľa dlhého priameho vodiča, ktorým prechádza elektrický prúd, od vzdialenosti od osi vodiča.

Metóda merania:

Pri meraní využite magnetické pole Zeme a skutočnosť, že voľne otočná magnetka sa vždy nastaví do smeru výsledného magnetického poľa. Magnetku vytvorte tak, že do nádobky (nie kovovej!) s vodou opatrne vložíte malú zmagnetizovanú ihlu tak, aby zostala plávať. Magnetka sa natočí do smeru horizontálnej zložky magnetického poľa Zeme. Pod misku podložte papierový kotúč, na ktorý si zakreslíte uhlovú stupnicu. Môžete použiť aj kompas s uhlomernou stupnicou.

Kolmo nahor nad magnetku umiestnite dlhý medený vodič (približne 1,5 m dlhý s priemerom 1 až 2 mm) upevnený na drevenú tyč. Vodič pripojte ku zdroju konštantného elektrického napätia cez reostat na reguláciu prúdu vodičom a ampérmeter na meranie prúdu. Tyč nastavte pri odpojení zdroja do smeru magnetky. Po zapnutí zdroja sa vytvorí magnetické pole vodiča, ktoré je kolmé na smer magnetického poľa Zeme a v dôsledku toho sa magnetka vychýli z pôvodného smeru o uhol  $\varphi$ , pre ktorý platí  $\tan \varphi = B/B_Z$ , kde  $B_Z$  je horizontálna zložka indukcie zemského magnetického poľa. Nastavujte rôzne vzdialenosti  $r$  vodiča od magnetky a ku každej zmerajte uhol  $\varphi$ . Výsledky zostavte do tabuľky a zakreslite do grafu, pričom na vodorovnú os vyneste hodnoty  $1/r$ , na zvislú os hodnoty  $\tan \varphi$ .

Podľa teórie by mali jednotlivé body ležať na priamke. Odchýlky od priamky zdôvodnite.

Zo smernice priamky určte na základe zmeraného prúdu horizontálnu zložku magnetickej indukcie  $B_Z$ .

*Pozn.: Prúd nastavte tak, aby bol uhol dobre merateľný a počas merania ho udržiavajte konštantný. Vzdialenosť  $r$  meňte v rozsahu od 5 cm do 15 cm, prípadne aj väčšom.*

Úlohu môžete vhodne modifikovať v závislosti od dostupných pomôcok.



## Kategória C

### 1. Korčuliar

Korčuliar trénoval na veľkom zamrznutom jazere, kde mal vytvorenú dlhú priamu trať. Prvá časť trate mala dĺžku  $s_1 = 450$  m. Túto časť jazdil konštantnou rýchlosťou  $v_1$ . Potom voľne dobiehal až do zastavenia s konštantným zrýchlením veľkosti  $a = 0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Jazdu opakoval pre rôzne konštantné rýchlosti  $v_1$ , ktorými prechádzal prvý úsek trate. Zistil, že celkový čas  $t_c$  pohybu na celej trati až do zastavenia závisel od rýchlosti  $v_1$  rovnomerného pohybu v prvej časti trate.

Zistil, že pri určitej hodnote  $v_{1m}$  rýchlosti  $v_1$  bola hodnota času  $t_c$  minimálna ( $t_{cm}$ ).

- Zostrojte graf času  $t_c$  ako funkciu rýchlosti  $v_1$ .
- Z grafu určte rýchlosť  $v_{1m}$ , pre ktorú je čas  $t_c$  minimálny, a celkový čas  $t_{cm}$  pohybu korčuliara v tomto prípade. Hodnoty  $v_{1m}$  a  $t_{cm}$  určte výpočtom a výsledok porovnajte s hodnotami určenými z grafu.
- Určte celkovú dráhu  $s_{cm}$ , ktorú korčuliar za čas  $t_{cm}$  prešiel.

*Pozn.: Dbajte na dodržanie všetkých pravidiel pre správnu konštrukciu grafu.*

### 2. Pluto a Cháron

Astronomické pozorovania planéty Pluto, kedysi poslednej planéty Slnčnej sústavy, dnes predstaviteľ a skupiny tzv. trpasličích planét, nám za ostatné roky poskytli niektoré zaujímavé informácie:

- Pluto pozorujeme zo Zeme v tvare malého kotúča s uhlovým priemerom  $\beta = 0,084''$  (oblúkových sekúnd).
- V roku 1978 bol objavený Cháron, sprievodca planéty Pluto, ktorý zo Zeme vidíme ako kotúč s uhlovým priemerom  $\gamma = 0,043''$ .
- Zloženie, štruktúra a hustota oboch telies sú rovnaké.
- Najväčšia uhlová vzdialenosť medzi Plutom a Cháronom pozorovaná zo Zeme  $\alpha = 0,70''$ .
- Doba obehu Chárona okolo Pluta je rovná dobe rotácie Chárona okolo vlastnej osi aj dobe rotácie Pluta okolo vlastnej osi  $T = 6,4$  dňa (viazaná, resp. synchronizovaná rotácia).
- Sústava Pluto – Cháron rotuje okolo spoločného hmotného streda.
- Priemerná vzdialenosť Pluta od Slnka  $R = 5,8 \times 10^9$  km.

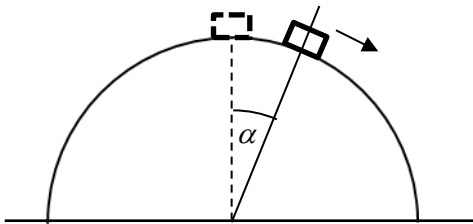
Pomocou uvedených informácií vyriešte nasledujúce úlohy.

- a) Určte pomer  $p = M_{\text{PC}}/M_{\text{Z}}$  hmotnosti  $M_{\text{PC}}$  sústavy Pluto - Cháron a hmotnosti Zeme  $M_{\text{Z}}$ . Hmotnosť Zeme  $M_{\text{Z}}$  určte zo známeho polomeru Zeme  $R_{\text{Z}} = 6\,400$  km, zrýchlenia voľného pádu pri povrchu Zeme  $g = 9,8$  m · s<sup>-2</sup>.
- b) Určte priemernú hustotu dvojice Pluto, Cháron.
- c) Určte dobu  $T_{\text{P}}$  obehu Pluta okolo Slnka, ak poznáte polomer orbitálnej trajektórie Zeme okolo Slnka  $R_{\text{ZS}} = 1,5 \times 10^8$  km.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre dané hodnoty.  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  N · kg<sup>-2</sup> · m<sup>2</sup>. Predpokladajte, že všetky telesá sú homogénne gule a všetky telesá sa pohybujú po kružnicových trajektóriách. Uvažujte vzdialenosť  $R_{\text{ZP}}$  Pluta od Zeme približne rovnakú ako vzdialenosť  $R$  Pluta od Slnka.

*Pozn.: Pluto a Cháron sa vzájomne obiehajú v rovine, ktorá je skoro kolmá na ekliptiku Slnčnej sústavy.*

### 3. Pohyb s trením



Obr. C-1

Na vodorovnej podložke sa nachádza pevná plastová polguľa. Polguľa sa môže po podložke šmýkať. Faktor trenia medzi polguľou a podložkou označíme  $f$ . Na vrchole polgule je položené teliesko, ktoré sa malým impulzom uvedie do klzavého pohybu po povrchu polgule. Trenie medzi telieskom a povrchom gule je veľmi malé a možno ho zanedbať. Postupný pohyb telieska po povrchu polgule opisuje uhol  $\alpha$

medzi sprievodičom, ktorý prechádza stredom polgule, a zvislým smerom, obr. C-1.

- a) Nakreslite, za predpokladu, že guľa sa ešte nepohla, obrázok polgule s telieskom, ktoré sa klže po jej povrchu. Do obrázku nakreslite vektory síl pôsobiacich na teliesko a odlišným spôsobom (inou farbou alebo čiarkovane) vektory síl, ktoré pôsobia na polguľu. Jednotlivé sily, ako aj pohyby telieska a polgule stručne opíšte.
- b) Určte uhol  $\alpha_{\text{m}}$ , pri ktorom teliesko stratí kontakt s polguľou za predpokladu, že sa polguľa na podložke nepohybuje.

Pri určitých podmienkach sa polguľa na podložke preklzne počas pohybu telieska po jej povrchu.

- c) Polguľa sa začne pohybovať, keď uhol  $\alpha$  telieska dosiahne hodnotu  $\alpha_p$ . Určte faktor trenia  $f$  ako funkciu uhla  $\alpha_p$  pre daný pomer  $p = M/m$  hmotností polgule a hmotnosti telieska.
- d) Zostrojte graf závislosti faktora trenia  $f$  od uhla  $\alpha_p$  pre pomer  $p = 5$ . Z grafu určte maximálnu hodnotu  $f_m$ , pri ktorej sa ešte polguľa pohne. Určte aj príslušný uhol  $\alpha_m$ , pri ktorom sa to stane.
- e) Z grafu určte uhol  $\alpha_p$ , pri ktorom dôjde k pohybu polgule pre daný pomer hmotností telies a dve hodnoty faktora trenia  $f_1 = 0,04$  a  $f_2 = 0,06$ .

#### 4. Plyn v spojených nádobách

Dve nádoby s rovnakým objemom  $V = 5,0$  l sú spojené krátkou rúrkou s ventilom. Najskôr je ventil zatvorený. V jednej nádobe sa nachádza hélium He s látkovým množstvom  $n_1 = 0,10$  mol a tlakom  $p_1 = 50$  kPa, v druhej dusík  $N_2$  s látkovým množstvom  $n_2 = 0,15$  mol a tlakom  $p_2 = 0,10$  MPa. Po otvorení ventilu sa plyny začnú pomaly premiešavať. V konečnom ustálenom stave s výslednou teplotou  $t_3$  sú obe nádoby naplnené homogénnou zmesou plynov.

- a) Určte teploty  $t_1$  a  $t_2$  plynov pred otvorením ventilu. Teploty vyjadrite v  $^{\circ}\text{C}$ .
- b) Určte tlak  $p_3$  a teplotu  $t_3$  zmesi plynov po ustálení rovnovážneho stavu.

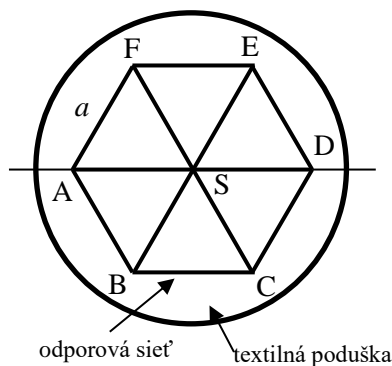
Predpokladajte, že steny nádob, rúrka a ventil nevedú teplo. Objem rúrky neuvažujte.

#### 5. Elektrická poduška

Šikovný dedko sa rozhodol vyrobiť babke na sedenie vyhrievanú dečku. Navrhol vložiť do kruhovej textilnej podložky šesťuholníkovú sieť z odporového drôtu, usporiadanú podľa obr. C-2. Dĺžka strany  $a = 20$  cm. Mal k dispozícii odporový drôt s dĺžkovým odporom  $r = 20 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$  a zdroj napätia  $U = 12$  V. Zdroj chcel pripojiť k uzlom A a D siete. Svojho vnuka, ktorý navštevoval gymnázium, požiadal o odpoveď na niektoré otázky.

Spolu s vnukom riešite nasledujúce úlohy:

- a) Určte tepelný výkon  $P$  celej siete.
- b) Určte tepelný výkon uvoľnený v jednotlivých vetvách AS, AF, FS a FE a na základe výsledkov posúďte ohrievanie celej plochy podušky.

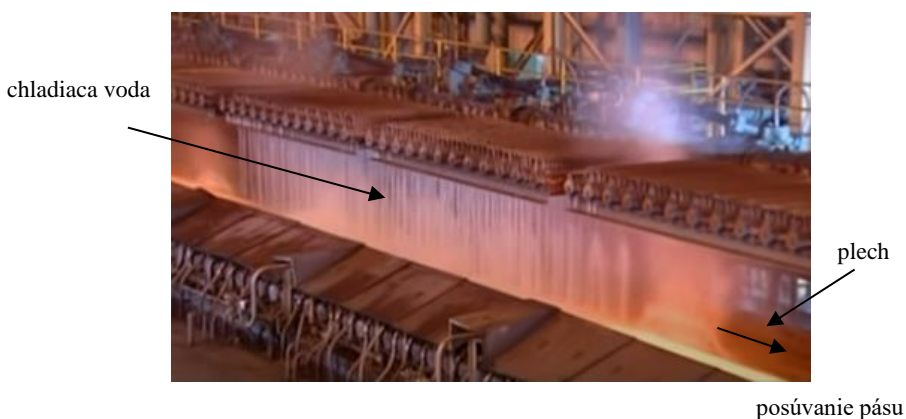


Obr. C-2

Pozn.: Pred riešením úloh si elektrickú sieť vhodne prekreslite a uvážte symetriu obvodu vzhľadom na os  $AD$ .

## 6. Chladenie plechu

Pri výrobe oceľového plechu sa používajú valcovacie stolice, ktorými sa postupne rozžeravený hranol mení na stále tenší pás, postupne až na pás plechu požadovanej hrúbky. Celý proces možno sledovať na videu: [\(1659\) How It's Made \(CZ Dabing\) - Nerezová Ocel - YouTube](#). Počas valcovania teplota ocele klesá. Výsledný plech ešte značnej teploty treba ochladiť na konečnú teplotu pre navinutie na cievku pre skladovanie.



Obr. C-3

Z valcovacieho stroja vychádza dlhý pás oceľového plechu s šírkou  $d = 2,0$  m a hrúbkou  $h = 4,0$  mm. Teplota vystupujúceho pásu je  $t_0 = 500$  °C. Pás opúšťa valcovací stroj konštantnou rýchlosťou  $v = 0,50$  m · s<sup>-1</sup>. Pás sa ochladzuje sprchovaním vodou s teplotou  $t_1 = 20$  °C, obr. C-3. Chladiace zariadenie pozostáva zo sústavy rovnobežných rúrok s otvormi, z ktorých strieka voda na horúci plech. Pri prechode pod sprchou sa plech postupne ochladzuje na výslednú teplotu  $t_2 = 150$  °C. Všetka voda dopadajúca na žeravý plech sa premení na paru.

Určte objemový prietok vody  $q$  v chladiacom zariadení.

Potrebné konštanty vyhľadajte v tabuľkách.

## 7. Vyšetrovanie kmitov fyzikálneho kyvadla – experimentálna úloha

V svojom okolí pozorujeme najrôznejšie predmety, ktoré kmitajú okolo bodu alebo osi závesu ako fyzikálne kyvadlo.

*Úlohy:*

- a) Vytvorte fyzikálne kyvadlo pomocou dlhej tenkej tyče (napr. drevenej). Do tyče vyvrtajte malé dierky, alebo tyč prepichnete ihlou, takže dostanete sériu otvorov pre umiestnenie osi otáčania kyvadla. Na tyči označte polohu ťažiska a zmerajte vzdialenosti  $r_n$  otvorov pre osku od ťažiska.
- b) Odvodte všeobecný vzťah pre dobu kmitu fyzikálneho kyvadla a vzťah upravte pre prípad kyvadla tvoreného tenkou tyčou, kmitajúcou okolo ľubovoľnej osi kolmej na tyč.
- c) Pre vašu tyč dĺžky  $L$  zostrojte graf teoretickej závislosti doby kmitu  $T$  od vzdialenosti  $r$  osi otáčania od ťažiska tyče.
- d) Odmerajte dobu kmitu kyvadla pre rôzne polohy osi otáčania (zvoľte min. 10 polôh osi pozdĺž jednej polovice tyče) a výsledky vyneste do grafu s krivkou teoretickej závislosti. Posúďte súhlas výsledkov merania s teoretickým výpočtom. Z krivky určte minimálnu periódu  $T_m$  a jej zodpovedajúcu vzdialenosť  $d_m$  osi otáčania od ťažiska.
- e) Z nameraných hodnôt určte moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os kolmú na tyč a prechádzajúcu ťažiskom. Výsledok porovnajte s hodnotu vypočítanou z teoretického vzťahu  $I_0 = (1/12) mL^2$ .

*Pozn.: Otvory urobte čo najmenšie, aby nenarušili významne homogenitu tyče. Vzhľadom na presnosť merania určte periódu z merania času dostatočne veľkého počtu kmitov kyvadla.*

**Kategória D****1. Vzťažné sústavy**

Celý rad astronomických úkazov súvisí s pohybom Galaxie, Slnka, Zeme a Mesiaca vo vesmíre. Astronómovia zistili, že Slnčná sústava obieha okolo centra Galaxie približne rýchlosťou  $v_S \approx 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  s dobou obehu  $T_S \approx 240$  miliónov rokov.

- a) Určte približnú vzdialenosť  $r_{SG}$  Slnka od centra Galaxie. Vzdialenosť vyjadrite v jednotkách ly (light year = svetelný rok).
- b) Z pohybu Slnka určte hmotnosť Galaxie, ak predpokladáte, že takmer celá hmota Galaxie je sústredená v jej centrálnej oblasti. Výsledok porovnajte s udávanou hodnotou (napr. na internete) a rozdiel zdôvodnite.

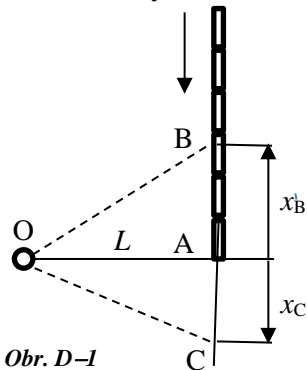
Pre opis dejov používame vzťažné sústavy, medzi ktorými majú osobitný význam inerciálne vzťažné sústavy, pre ktoré boli vyslovené Newtonove pohybové zákony.

Často používame laboratórnu vzťažnú sústavu, pevne spojenú so zemským povrchom.

- c) Určte zotrvačné sily, ktoré pôsobia na teleso jednotkovej hmotnosti, v dôsledku  
 i) pohybu Slnčnej sústavy okolo stredu Galaxie, ii) pohybu Zeme okolo Slnka  
 a iii) rotácie Zeme okolo vlastnej osi. Výsledky porovnajte s gravitačnou silou na  
 povrchu Zeme.
- d) Posúďte, ktorú zo vzťažných sústav možno považovať za inerciálnu a v akých  
 prípadoch.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre dané hodnoty. Nezadané hodnoty veličín vyhľadajte vo vhodných zdrojoch informácií.

## 2. Zmeškaný vlak



Kedysi jazdili na lokálnych tratiach vlaky s otvorenými plošinami na koncoch vozňov, na ktoré bolo možné naskočiť, aj keď sa vlak už pomaly rozbíhal. Kým rýchlosť vlaku voči nástupištu neprekročí  $v_1 = 12,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , naskočenie na plošinu sa považovalo za bezpečné.

Meškajúci cestujúci prichádzal k zastávke vlaku po ceste kolmej na železničnú trať. V zastávke už stál vlak s počtom  $N = 6$  vozňov, vrátane lokomotívy, pričom začiatok lokomotívy stál presne oproti ceste, po ktorej prichádzal cestujúci, obr. D-1. Dĺžka vozňa i lokomotívy  $d = 10 \text{ m}$ . V snahe stihnúť vlak, cestujúci začal bežať kolmo na vlak stálou rýchlosťou  $v = 8,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . V okamihu, keď bol v bode O vo vzdialenosti  $L = 50 \text{ m}$  od vlaku, začal sa vlak rozbíhať rovnomerne zrýchleným pohybom. Cestujúci dobehol k vlaku práve vo chvíli, keď okolo neho prechádzal stred vlaku, a snažil sa naskočiť na zadnú plošinu pred ním prechádzajúceho vozňa.

a) Určte zrýchlenie  $a$  a rýchlosť  $v_A$  vlaku v okamihu, keď cestujúci dobehol k vlaku (do bodu A). Bola rýchlosť vlaku dostatočne nízka pre bezpečné naskočenie do vlaku?

Aká situácia by nastala, keby sa cestujúci rozhodol naskočiť na plošinu posledného vozňa. Mal by dve možnosti, buď bežať po úsečke OB do bodu B naproti vlaku alebo po úsečke OC do bodu C v smere pohybu vlaku.

- b) Určte vzdialenosti  $x_B$  a  $x_C$  bodov B a C od bodu A. Určte rýchlosti  $v_B$  a  $v_C$  vlaku v okamihu, keď cestujúci dosiahne koniec vlaku v bode B, alebo v bode C. Uvážte, či naskočenie do idúceho vlaku je v jednotlivých prípadoch bezpečné.
- c) Ktorý z troch prípadov naskočenia v bodoch A, B, C sa javí pre cestujúceho ako najmenej riskantný. Svoju odpoveď zdôvodnite.

### 3. Gule v mori

V mori je slaná voda, ktorej hustota sa mení s hĺbkou. Do hĺbky približne  $h_1 = 300$  m sa mení hustota vody iba minimálne a má hodnotu  $\rho_1 \approx 1,0240 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . V prechodnej vrstve, do hĺbky približne  $h_2 = 1000$  m, hustota s narastajúcou hĺbkou rastie približne lineárne až na hodnotu  $\rho_2 \approx 1,0280 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . Vo väčších hĺbkach už zostáva hustota približne konštantná.

Z výskumnej lode, ktorá sa nachádzala nad oceánskou hĺbočinou, spustili do vody dve pevné duté kovové gule, vzájomne spojené tenkým spojovacím lankom s dĺžkou  $a = 25$  m. Guľa (1) mala hmotnosť  $m_1 = 14,50$  kg a priemer  $d_1 = 300,0$  mm, guľa (2) mala hmotnosť  $m_2 = 34,40$  kg a priemer  $d_2 = 400,0$  mm. Na guli (1) je malé očko, za ktoré je zavesená na tenkom vlákne, a na ktorom dvojicu gúl spúšťali do mora.

Najprv ponorili guľu (2), a guľu (1) držali tesne nad hladinou.

- a) Určte silu  $F_{L1}$ , ktorou je napínané spojovacie lanko medzi guľami, a silu  $F_{V1}$ , ktorou je napínané závesné vlákno.

Následne spustili aj guľu (1) tesne pod hladinu.

- b) Určte silu  $F_{L2}$ , ktorou je napínané spojovacie lanko medzi guľami a silu  $F_{V2}$ , ktorou je napínané závesné vlákno.

Dvojicu gúl spúšťali do veľkej hĺbky, až guľa (1) dosiahla hĺbku  $h_3$  pod voľnou hladinou, keď sila napínajúca závesné vlákno poklesla na nulovú hodnotu  $F_V = 0$ .

- c) Akou veľkou silou  $F_V$  je napínané nosné vlákno, keď guľa (1) je v prechodnej vrstve v hĺbke  $h$  pod voľnou hladinou?
- d) Určte hĺbku  $h_3$  a silu  $F_{L3}$ , ktorou je napínané spojovacie vlákno medzi guľami v okamihu, keď nosné vlákno prestalo byť zaťažované guľami ( $F_V = 0$ ).

Hmotnosť lanka a vlákna neuvažujte. Kovové gule sú pevné, nemenia svoje rozmery pod narastajúcim tlakom vody. Gravitačné zrýchlenie  $g = 9,807 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

### 4. Sánkari

Na kopci za mestom sa deti tešili z novej snehovej nádielky na svahu s dĺžkou 250 m a uhlom sklonu  $\alpha = 8,0^\circ$ . Traja kamaráti s hmotnosťami  $m_1 = 40,0$  kg,  $m_2 = 46,0$  kg

a  $m_3 = 55,0$  kg mali k dispozícii dvoje sane s rovnakou hmotnosťou  $m = 6,0$  kg – jedny prvého chlapca a druhé druhého chlapca. Išli sa spúšťať, pričom tretí chlapec si sadol raz k prvému, raz k druhému.

Najprv sa spustili obidve sane vedľa seba a merali si čas, za ktorý prešli celú dĺžku svahu.

Keď si sadol tretí chlapec k prvému (na jeho sane), prešli voľným pohybom dráhu  $d = 200$  m za dobu  $t_1 = 19$  s a na zvyšku svahu brzdili. Druhý chlapec zišiel po tej istej dráhe za čas  $t_2 = 22$  s.

- Určte faktory trenia  $f_1$  a  $f_2$  medzi snehom a sklznicami prvých a druhých sanií.
- Tretí chlapec si potom presadol k druhému chlapcovi (na druhé sane) a zjazd opakovali po tej istej dráhe dĺžky  $d$ . Za aký čas  $t_3$  prešli dráhu prvé sane a za aký čas  $t_4$  druhé sane?

Neskôr, dlhším špagátom spojili sane tak, aby na seba počas zjazdu zo svahu nenarážali. Tretí chlapec si opäť sadol raz k prvému, raz k druhému.

- V akom poradí spojili sane, aby špagát zostal počas celého zjazdu napnutý? Určte veľkosť  $F$  sily, ktorá špagát počas zjazdu napínala.
- Určte časy  $t_5$  a  $t_6$  zjazdu úseku svahu dĺžky  $d$ , ak tretí chlapec sedel s prvým alebo druhým chlapcom na ich saniach.

Predpokladajte, že sánky sa pohybujú na svahu  $d$  rovnomerne zrýchleným pohybom, odpor vzduchu neuvažujte. Tiažové zrýchlenie  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

## 5. Odpojené vagóny

Na vodorovnej pláni sa pohybovala po priamej trati vlaková súprava rovnomerným pohybom rýchlosťou  $v_0 = 80$  km/h. Súprava pozostávala z  $N = 60$  rovnakých vagónov, každý s hmotnosťou  $m = 50$  t (naložených uhlím). Vlak ťahala lokomotíva s hmotnosťou  $M = 100$  t, okamžitý výkonom jej motorov  $P = 300$  kW.

- Určte celkovú treciu silu  $F_m$  medzi poháňanými kolesami lokomotívy a koľajnicami.
- Určte faktor  $f_1$  valivého trenia vagónov.

V určitom okamihu došlo k pretrhnutiu spoja medzi vagónmi a odtrhlo sa  $n = 20$  vagónov. V okamihu prerušenia spoja sa automaticky zapínajú núdzové brzdy odtrhnutej časti. Odtrhnuté vagóny sa zastavili rovnomerne spomaleným pohybom na dráhe  $d = 250$  m.

- Určte faktor  $f_2$  trenia medzi brzdiacimi kolesami vagónov a koľajnicami.



- d) Na akú hodnotu  $v_1$  by sa zvýšila rýchlosť zvyšku vlaku po odtrhnutí jeho časti, ak by sa výkon lokomotívy nezmenil? Na akú hodnotu  $P_1$  by musel klesnúť výkon lokomotívy, aby sa zvyšok vlaku pohyboval naďalej pôvodnou rýchlosťou  $v_0$ ?

Uvažujte rovnaký faktor valivého trenia lokomotívy a vagónov,  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

## 6. Zrážky mincí

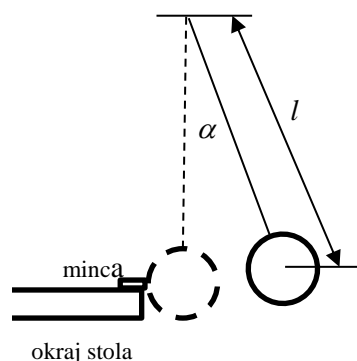
Dievčatá z prvého ročníka gymnázia počuli na hodine fyziky o zrážkach telies. Rozhodli sa urobiť si vo fyzikálnom laboratóriu pokus so zrážkou s euromincami. Najvhodnejšie sa im javili mince 0,10 € a 0,50 € z rovnakého materiálu, tzv. severského zlata. Je to zliatina zložená z 89 % Cu, 5 % Al, 5 % Zn a 1 % Sn (ide o % hmotnosti).

- a) Vyhľadajte hustoty jednotlivých kovov a vypočítajte hustotu  $\rho_{SZ}$  severského zlata.

Na internete si zistili, že 0,10 € minca má hmotnosť  $m_{10} = 4,10 \text{ g}$ , priemer  $d_{10} = 19,75 \text{ mm}$  a výšku  $h_{10} = 1,93 \text{ mm}$ . Minca 0,50 € má hmotnosť  $m_{50} = 7,80 \text{ g}$ , priemer  $d_{50} = 24,25 \text{ mm}$  a výšku  $h_{50} = 2,38 \text{ mm}$ .

- b) Z hmotnosti a rozmerov určte hustotu  $\rho_{10}$  a  $\rho_{50}$  oboch mincí. Hustoty porovnajte s hustotou  $\rho_{SZ}$  a rozdiely vysvetlite.

Zrážkový experiment urobili na hladkej vodorovnej doske laboratórneho stola. Zabezpečili aby začiatočná rýchlosť mincí bola vždy rovnaká. Postavili na kraj stola stojan a uchytili doň lanko so zavesenou guľou s hmotnosťou značne väčšou ako hmotnosť mincí, obr. D–2. Vzdialenosť bodu závesu gule od ťažiska gule je  $l = 50 \text{ cm}$ . Mincu položili na okraj stola tak, že málo prečnievala cez hranu stola. Potom guľu na lanku vychýlili vždy o uhol  $\alpha = 15^\circ$  a pustili. Nárazom uviedla mincu do pohybu a zarazila sa o hranu stola.



Obr. D–2

- c) Určte začiatočnú rýchlosť  $v_0$  mince po náraze gule.

Najprv pokus opakovali s oboma mincami. v oboch prípadoch mince zastavili v rovnakej vzdialenosti  $d_1 = 70 \text{ cm}$  od hrany stola.

- d) Určte faktor trenia  $f$  medzi mincami a povrchom stola.

Potom postavili na okraj stola 0,10 € mincu a druhú do dráhy mince do vzdialenosti  $d_2=30$  cm od okraja stola. Nárazom gule uviedli mincu do pohybu. Mince postavili tak, aby ich zrážka bola stredová a mince sa pohybovali po jednej priamke. Potom pokus opakovali s tým, že mince vymenili.

e) Určte vzájomné vzdialenosti  $d_3$  a  $d_4$  mincí po ich zastavení po zrážke v oboch prípadoch.

*Pozn.: Všetky zrážky považujte za dokonale pružné.*

## 7. Meranie hustoty telesa – experimentálna úloha

Úloha:

Zmerajte hustotu rôznych telies dvomi rôznymi metódami.

Zvoľte telesá z rôznych materiálov a rôznych tvarov, napr. valček, kocka, kameň, plastelína a pod.

*Odporúčané metódy merania*

- 1) Prvá metóda spočíva vo výpočte hustoty z hmotnosti a objemu telesa. Hmotnosť určte vážením. Objem telesa pravidelného tvaru určte z jeho rozmerov. Objem telesa nepravidelného tvaru určte ponorením do vody v odmernom valci a určením objemu vytlačenej vody.
- 2) Teleso zaveste na silomer a určte tiaž  $T_1$  telesa vo vzduchu. Potom zavesené teleso ponorte do vody a určte jeho tiaž  $T_2$  na silomere. Pomocou hodnôt  $T_1$ ,  $T_2$  a hustoty vody určte hustotu telesa.

Hustoty získané obidvomi metódami porovnajte a prípadné rozdiely zdôvodnite. Pre zvýšenie presnosti meranie viackrát opakujte a vypočítajte strednú hodnotu výsledkov pre danú metódu a dané teleso.

*Pozn.: Môžete vymyslieť aj inú metódu.*

---

63. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie A, B, C, D

Autori návrhov úloh:

Ivo Čáp A7, B7,C-7, D1,7

Lubomír Konrád A1-6, B1-6,C1-6, D2-6

Recenzia a úprava úloh a riešení:

Aba Teleki, Lubomír Mucha

Redakcia:

Ivo Čáp

Vydal:

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021

## INFORMÁCIE

---

### 51. MEDZINÁRODNÁ FYZIKÁLNA OLYMPIÁDA

Vilnius, Litva, 17. – 24. 7. 2021 (On-line)

[www.ipho2021.lt](http://www.ipho2021.lt)

### Správa o účasti družstva Slovenskej republiky

V dňoch 17. 7. až 24. 7. 2021 sa uskutočnila súťaž 51. ročníka Medzinárodnej fyzikálnej olympiády, IPhO 2021. Usporiadateľom súťaže bol Vilnius, Litva. Vzhľadom na epidemiologickú situáciu sa súťaž uskutočnila dištančne (on-line). Súťaže sa zúčastnilo 365 súťažiacich zo 76 krajín. Väčšina krajín bola zastúpená družstvom pozostávajúcim z 5 súťažiacich žiakov stredných škôl a dvoch vedúcich. Členmi národných tímov boli okrem študentov aj dozerajúci (invigilatori), ktorí organizačne zabezpečili súťaž vo vlastnej krajine. Slovenské družstvo súťažilo v Košiciach, v priestoroch Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach.

#### Slovenskú republiku reprezentovali:

Vedenie: prof. Ing. Ivo Čáp, CSc. – vedúci delegácie (Žilinská univerzita v Žiline),  
PaedDr. Lubomír Konrád, PhD. – pedagogický vedúci (Gymnázium Veľká okružná v Žiline),  
RNDr. Lubomír Mucha – invigilator (CVČ-RCM Košice),  
RNDr. Tomáš Lučivjanský, PhD. – invigilator (PrF UPJŠ Košice).

Súťažiaci: Csipes Jozef, 4. ročník, Gymnázium Grösslingová, Bratislava,  
Šimkovič Pavol, 4. ročník, Gymnázium Kukučínova, Poprad,  
Slavkovský Štefan, oktáva, Gymnázium Kukučínova, Poprad,  
Džavoronok Adam, 2. ročník, Gymnázium Poštová, Košice,  
Pivko Pavol, septima, Gymnázium Grösslingová, Bratislava.

#### Zostavenie súťažného družstva

Súťažné družstvo bolo zostavené z víťazov celoštátneho kola Fyzikálnej olympiády. V máji sa uskutočnilo on-line výberové sústredenie, v rámci ktorého sa uskutočnil výber družstva. Sústredenia sa zúčastnili víťazi celoštátneho kola FO SR. Výberové sústredenie zabezpečil RNDr. Mucha (Košice) a PaedDr. Konrád (Žilina).

### **Príprava súťažného družstva**

Prípravné sústredenie sa uskutočnilo od 6.7.2021 do 16.7.2021. V termíne od 6.7.2021 do 8.7.2021 boli súťažiaci v Košiciach a pracovali na experimentálnych úlohách. Teoretická časť prípravy prebiehala v on-line priestore od 9.7.2021 do 16.7.2021. Sústredenie zabezpečil RNDr. Mucha (Košice). Prípravného sústredenia sa zúčastnili piati členovia družstva a jeden náhradník.

Organizačne sústredenia zabezpečila CVC-RCM v Košiciach a PrF UPJŠ v Košiciach, odborne Slovenská komisia FO.

Za prípravu, realizáciu a odborný program sústredení zodpovedali RNDr. Ľubomír Mucha – podpredseda SK FO (Košice), RNDr. Tomáš Lučivjanský, PhD. (PrF UPJŠ Košice), doc. RNDr. Mária Kladviová, PhD. (TU Košice) a Ronald Doboš (Košice).

### **Finančné a organizačné zabezpečenie účasti na MFO**

Účasť družstva SR na 51. IPhO finančne zabezpečila IUVENTA v spolupráci s predsedom Slovenskej komisie FO prof. Ing. Ivom Čápom, CSc., organizačne RNDr. Ľubomír Mucha a RNDr. Tomáš Lučivjanský PhD. v spolupráci s PrF UPJŠ v Košiciach. IUVENTA uhradila účastnícky poplatok za delegáciu (piati súťažiaci) vo výške 2 500 € a výdavky spojené s ubytovaním a stravou študentov a technickým zabezpečením on-line súťaže.

### **Priebeh podujatia**

Organizátori v Litve zabezpečili týždenný program, ktorý pozostával z dvoch súťažných dní a on-line voľnočasových aktivít. Účasť na on-line akciách sa zabezpečila pomocou konferenčného nástroja ZOOM a pomocou prezentačného nástroja YOU TUBE.

Pre vlastnú súťaž usporiadatelia pripravili, v súlade so sylabom IPhO, zaujímavé a veľmi náročné úlohy, dve experimentálne (1. súťažný deň) a tri teoretické (2. súťažný deň). Pre experimentálnu časť súťaže organizátori zaslali pre každého súťažiaceho experimentálne zariadenie, ktoré bolo možné rozbaľiť pod dozorom kamery až deň pred začatím súťaže:

#### *Prvá experimentálna úloha – Neideálny kondenzátor*

Predmetom úlohy bolo meranie závislosti kapacity od napätia dvoch kondenzátorov, jedného s lineárnym a druhého s nelineárnym dielektrikom. Po očiachovaní termistora opakovanie merania závislosti  $C(U)$  pri rôznych teplotách. Poslednou úlohou bolo určenie hlavných príčin chyby merania.

*Druhá experimentálna úloha – Svetlo emitujúca dióda (LED)*

Úlohou bolo zmerať V-A charakteristiky LED pri rôznych teplotách a určenie dynamického odporu. V poslednej časti bolo úlohou zmerať závislosť teploty diódy od výkonu a určenie teplotného odporu diódy.

*Prvá teoretická úloha – planetárna fyzika*

V prvej časti študenti riešili tlakové pomery na podmorskom hrebeni. V druhej časti skúmali šírenie seizmických vln vo vrstevnatom prostredí zemskej kôry.

*Druhá teoretická úloha elektrostatická šošovka*

V prvej časti študenti riešili pohyb elektrónu v smere osi a kolmo na os nabitého kruhového prstenca, a určovali vratnú silu pri vychýlení elektrónu zo stredu prstenca. V druhej časti dopadal zväzok elektrónov na plochu ohraničenú prstencom a určovala sa ohnisková vzdialenosť takto vytvorenej šošovky. Overila sa platnosť šošovkovej zobrazovacej rovnice. V poslednej časti sa prstencem považoval za kapacitor, a riešil sa vplyv postupného nabíjania a vybíjania na ohniskovú vzdialenosť.

*Tretia teoretická úloha – Častice a vlny*

V prvej časti študenti riešili stavy častice v pravouhlej potenciálovej jame. V druhej časti vyšetrovali optické vlastnosti molekuly cyanínu Cy5. V tretej časti skúmali vlastnosti Bose-Einsteinovho kondenzátu. V poslednej časti sa zaoberali trojlúčovou optickou mriežkou.

Experimentálne úlohy boli veľmi pekné, ale pomerne časovo náročné. Podobne teoretické úlohy boli veľmi pekné, ale časovo veľmi náročné – okrem toho obsahovali časti, ktoré boli pre našich žiakov veľmi náročné.

Aj keď úlohy zodpovedali sylabu IPhO, v priemere nízka úspešnosť bola daná najmä značným obsahom úloh na daný súťažný čas. Najlepší riešiteľ zvládol experiment na 83%, ale teóriu na 99%, celú súťaž na 92,5%. Celkový bodový zisk nášho družstva 41 % je tak mierne podpriemerný (v teórii 36,7 %, v experimente 48,4 %). Slabšie sú výsledky z teórie, nakoľko tematike úloh sa na školách nevenuje patričná pozornosť, niekedy žiadna.

Úlohy sa nachádzajú na [www.ipho 2021.lt](http://www.ipho 2021.lt).

Riešenia študentov opravili nezávisle odborná komisia organizátorov i vedúci delegácie. Zosúladenie hodnotenia sa realizovalo formou moderácie za každú úlohu medzi korektormi a vedúcimi družstva.

Za riešenie úloh bolo možné získať maximálne 50 bodov (5-krát 10 b). Na základe bodového hodnotenia študentských riešení úloh zostavili organizátori poradie súťažiacich a medzinárodný výbor určil hranice pre jednotlivé druhy ocenenia. V zmysle štatútu IPhO hranica pre zisk zlatej medaily bola stanovená na 33 b., striebornej na 23,5 b. a bronzovej na 14,4 b. Hranica úspešnosti bola stanovená na 9,1 bodu. Celkove bolo udelených 45 zlatých medailí, 61 strieborných medailí, 94 bronzových medailí a 62 čestných uznání. Zvyšní 103 súťažiaci nespĺnili

podmienku úspešnosti. Výsledky jednotlivých úspešných súťažiach sa nachádzajú na stránke [www.ipho2019.org.il](http://www.ipho2019.org.il). Informácie o neúspešných riešiteľoch sa nezverejňujú.

Po organizačnej stránke bola súťaž výborne zvládnutá, neboli vznesené žiadne námietky voči objektívite súťaže.

### Výsledky súťaže jednotlivcov (prvá desiatka a zisk slovenských súťažiach z možných 50 bodov)

(celkový počet 362 súťažiach)

			Teória	Experiment	Celkove	Medaila
1.	Kyungmin Kim	Kórea	29,6	16,65	46,25 bodu	zlatá
2.	Zhihan Zhang	ČLR	29,6	16,5	46,1 bodu	zlatá
3.	Ming Jian	ČLR	29,1	15,9	45,0 bodu	zlatá
4.	Xiang Li	ČLR	29,4	15,2	44,6 bodu	zlatá
5.	Yinghao Ma	ČLR	28,5	15,4	43,9 bodu	zlatá
6.	Leo Yao	USA	27,8	15,75	43,55 bodu	zlatá
7.	Zhening Li	USA	29,2	14,24	43,44 bodu	zlatá
8.	Jiwoo Park	Kórea	28,9	13,45	42,35 bodu	zlatá
9.	Seunghyun Yeo	Kórea	26,9	15,25	42,15 bodu	zlatá
10.	Jingzhe Shi	ČLR	28,0	13,2	41,2 bodu	zlatá
.....						
<b>76.</b>	<b>Jozef Csipes</b>	<b>Slovensko</b>	<b>16,9</b>	<b>9,8</b>	<b>26,7 bodu</b>	<b>strieborná</b>
<b>114.</b>	<b>Pavol Pivko</b>	<b>Slovensko</b>	<b>12,1</b>	<b>9,4</b>	<b>21,5 bodu</b>	<b>bronzová</b>
<b>128.</b>	<b>Adam Džavoronok</b>	<b>Slovensko</b>	<b>11,9</b>	<b>8,25</b>	<b>20,15 bodu</b>	<b>bronzová</b>
<b>149.</b>	<b>Pavol Šimkovič</b>	<b>Slovensko</b>	<b>8,4</b>	<b>9,9</b>	<b>18,3 bodu</b>	<b>bronzová</b>
<b>166.</b>	<b>Štefan Slavkovský</b>	<b>Slovensko</b>	<b>5,7</b>	<b>11,0</b>	<b>16,7 bodu</b>	<b>bronzová</b>

### Neoficiálne poradie krajín podľa počtu získaných bodov z možných 250 bodov (celkove 76 krajín)

Určené zo zverejnených výsledkov úspešných súťažiach – 14 prvých a pre porovnanie ďalšie vybrané krajiny.

1.	ČLR	220,8 bodu	11.	Írán	144,8 bodu
2.	Kórea	207,9	12.	Japonsko	138,1
3.	USA	189,0	13.	Thajsko	131,2
4.	Rusko	185,8	<u>14.</u>	<u>Maďarsko</u>	<u>131,1</u>
5.	Taiwan	177,6	16.	Nemecko	126,0
6.	Rumunsko	164,2	<u>19.</u>	<u>Francúzsko</u>	<u>118,9</u>
7.	Vietnam	162,0	23.	Česká republika	103,9
8.	Hongkong	158,5	<b>24.</b>	<b>Slovensko</b>	<b>103,4</b>
9.	Singapur	151,0	<u>25.</u>	<u>Spojené kráľovstvo</u>	<u>103,1</u>
10.	Kazachstan	149,8	28.	Poľsko	102,2

**Poradie prvých 20 družstiev z európskych krajín (37 zúčastnených krajín):**  
(celkové poradie svet) / poradie Európa

Rusko (4)	1.	Bulharsko (26)	11.
Rumunsko (6)	2.	Taliansko (27)	12.
Maďarsko (14)	3.	Poľsko (28)	13.
Nemecko (16)	4.	Srbsko (29)	14.
Ukrajina (18)	5.	Chorvátsko (30)	15.
Francúzsko (19)	6.	Holandsko (33)	16.
Bielorusko (22)	7.	Litva (36)	17.
Česká republika (23)	8.	Slovinsko (37)	18.
<b>Slovensko (24)</b>	<b>9.</b>	Rakúsko (38)	19.
Spojené kráľovstvo (25)	10.	Moldavsko (39)	20.

**Poradie prvých 14 družstiev z krajín EU28 (26 zúčastnených krajín, neúčast' Írsko, Malta):**

(celkové poradie svet) / poradie EU

Rumunsko (6)	1.	Taliansko (27)	8.
Maďarsko (14)	2.	Poľsko (28)	9.
Nemecko (16)	3.	Chorvátsko (30)	10.
Francúzsko (19)	4.	Holandsko (33)	11.
Česká republika (23)	5.	Litva (36)	12.
<b>Slovensko (24)</b>	<b>6.</b>	Slovinsko (37)	13.
Bulharsko (26)	7.	Rakúsko (38)	14.

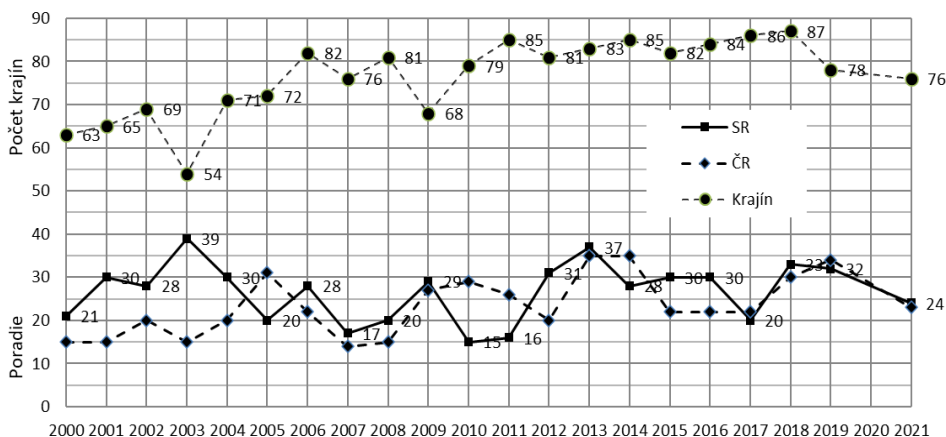
Výsledky slovenského družstva v 51. ročníku MFO predstavujú mierny nárast v porovnaní s priemerom za 5 predchádzajúcich ročníkov (27). Ziskom **jednej striebornej medaily a štyroch bronzových** zaujala slovenská reprezentácia umiestnenie v prvej tretine zúčastnených krajín (24/76), čo je lepší výsledok ako v minulom ročníku (32). V porovnaní krajín Európy a EU sa reprezentácia SR umiestnila približne v štvrtine krajín – Európa 9/37 a krajiny EU 6/26.

Historický prehľad ukazuje nasledujúca Tab. 1 a graf na Obr. 1.

Ako vidno z tabuľky, zisk medailí je uspokojujúci. Od historického priemeru poradia 27 od roku 2000 ide o mierny nárast, aj keď v minulosti boli dosiahnuté aj lepšie poradia (15. v roku 2010, 16. v roku 2011, 20. v roku 2016). Porovnávať sa možno s reprezentáciou Českej republiky, ktorá má dlhodobý priemer umiestnenia 23 a v tomto roku túto hodnotu kopíruje (23).

**Tab. 1:** Hodnotenie umiestnenia družstiev SR a ČR za obdobie 12 rokov

Rok	2021	2019	2018	2017	2016	2015	2014	2013	2012	2011	2010	2009
Umiestnenie družstva SR	24	32	33	23	20	30	28	37	27	16	15	29
Umiestnenie družstva ČR	23	34	30	36	35	22	35	35	19	26	29	27
Súťažiacich krajín	76	78	87	86	84	82	85	83	81	85	79	68
Medaily SR	SBBB B	SSB	BBB	ZBBB B	SBBB B	SBBB	SS BBB	BB BB	SSS B	ZZZ SB	SSS SB	ZBBB B

**Obr. 1:** Graf umiestnenia reprezentácie SR a ČR v rokoch 2000 až 2021

Zaujímavé je porovnanie relatívnej úspešnosti riešenia teoretických a experimentálnych úloh, celkovej úspešnosti a pomeru úspešnosti riešenia experimentálnej a teoretickej časti v rôznych skupinách krajín. Úspešnosť sa určila z priemerného zisku bodov k možnému maximálnemu počtu na jedného úspešného súťažiaceho. Výsledky sú skreslené, lebo nie sú zahrnuté body, ktoré získali neúspešní riešitelia, ale i tak majú určitú výpovednú hodnotu.

V prvom riadku je štatistika všetkých úspešných riešiteľov, v druhom riadku je výber 9 najúspešnejších krajín Východnej Ázie (Čína, Kórea, Singapur, Taiwan, Vietnam, Thajsko, Japonsko, Hongkong, Indonézia), ktoré mali všetkých 5 riešiteľov ocenených medailou (23 zlatých, 17 strieborných, 5 bronzových). Ďalej je riadok európskych krajín, krajín EU a v ďalších riadkoch úspešnosť slovenského družstva a jednotlivcov.



**Tab. 2:** Porovnanie celkovej priemernej úspešnosti riešenia úloh skupín a jednotlivcov

Krajiny	Úspešnosť			Pomer úspešnosti
	Experiment	Teória	Celkove	teor/exp
<b>Svet</b>	<b>38 %</b>	<b>47 %</b>	<b>44 %</b>	<b>1,22</b>
Východná Ázia (9)	55 %	72 %	65 %	1,31
Európa (37)	37 %	39 %	38 %	1,05
EU (26)	39 %	37 %	38 %	0,94
<b>SR</b>	<b>48 %</b>	<b>37 %</b>	<b>41 %</b>	<b>0,76</b>
Jozef Csipes	49%	56%	53%	1,15
Pavol Pivko	47%	40%	43%	0,86
Adam Džavoronok	41%	40%	40%	0,96
Pavol Šimkovič	50%	28%	37%	0,57
Štefan Slavkovský	55%	19%	33%	0,35

Z Tab. 2 vidieť, že krajiny Východnej Ázie (9 krajín) výrazne dominujú v teórii i v experimente. Európske krajiny za krajinami Východnej Ázie zaostávajú vo všetkých položkách. Výrazne vysoký je pomer úspešnosti teória/experiment (1,31). V európskych krajinách je to okolo 1,00.

Slovenská reprezentácia mala pomerne úspešnú experimentálnu časť (48%) ale v teórii je na európskom priemere (37%). Prví traja naši reprezentanti sú v celkovej úspešnosti nad priemerom Európy, štvrtý a piaty mierne pod ňou. Ako vidíme, pomer teória/experiment je (až na prvého) v neprospech teórie, najmä u štvrtého a piateho žiaka.

Úlohy boli fyzikálne pomerne náročné, aj keď neprekračovali rozsah sylabu IPHO, ale vyžadovali netradičný tvorivý prístup a taktiež rozsah úloh bol časovo veľmi náročný. Experiment, tiež časovo veľmi náročný, vyžadoval najmä zručnosť, a v tom až taký rozdiel nebol (svet, Európa, EU, SR).

### Hodnotenie účasti

- 3) Vývoj celkových výsledkov možno posudzovať podľa neoficiálneho poradia krajín, prípadne podľa zisku medailí a ďalších ocenení. Vývoj umiestnenia družstva SR (pre porovnanie i družstva ČR, ktoré má spoločné východiskové podmienky) za uplynulých 11 rokov je v Tab. 1 a od roku 2000 v nadväzujúcom grafe. Priemerné umiestnenie družstva SR je 27. miesto (za roky 2000 až 2021), čo pri priemernej účasti 77 krajín predstavuje umiestnenie približne v jednej tretine. Vidno tiež, že priemerné umiestnenie SR (27) a ČR (24) je približne rovnaké, čo zodpovedá rovnakým východiskovým podmienkam a podobnému

systému prípravy. V súčasnosti však v ČR majú na strednej škole viac hodín fyziky a matematiky a na maturitu majú väčšie požiadavky (SR má na maturitu cca 2/3 učiva v porovnaní s ČR). Poradia v jednotlivých rokoch kolíšu, keďže závisia od náhodného výskytu mimoriadne nadaných študentov (jednotlivcov) v jednotlivých rokoch, najmä v malých krajinách, ako sú naše, s obmedzenou základňou pre výber. V krajinách ako sú Čína, USA, Rusko a pod. je pravdepodobnosť nájdenia piatich mimoriadne nadaných študentov vysoká. Naproti tomu v malých krajinách sú možnosti obmedzené. **Najkritickejší je stav, keď je úroveň vzdelávania nízka, lebo v nemotivujúcom prostredí ani talent nepodrástie na najvyššiu úroveň.** Reprezentácia je potom odkázaná na mimoriadne talenty, ktoré sa aj napriek tomu presadia. Takých je však málo a nedá sa na to spoliehať.

- 4) Ak si uvedomíme, ako poklesla úroveň prírodovedného a osobitne fyzikálneho vzdelávania na Slovensku, nemožno očakávať lepšie výsledky. Ak nie je talent podchytený už na základnej škole, stratí sa najcennejšie obdobie jeho rastu, a ak nie je cieľavedome vychovávaný v tvorivom a náročnom prostredí, talent sa nerozvinie. Jednorazové sústreďenia, korešpondenčné semináre, súťaže a pod. pomôžu, motivujú, ale nenahradia sústavné a systematické pôsobenie školy. V tomto roku sa nepriaznivo prejavila aj virtuálna (on-line) výučba a príprava na súťaž. O zlom stave vzdelávania na Slovensku svedčí i to, že vyberáme družstvo zo stále menšieho okruhu žiakov, čo súvisí s klesajúcim záujmom škôl, resp. učiteľov, o starostlivosť o talenty, nakoľko táto práca nie je patrične ohodnotená a je časovo i odborne náročná.
- 5) V súvislosti s klesajúcou úrovňou matematického a fyzikálneho vzdelávania v školách na Slovensku klesá aj úspešnosť žiakov vo Fyzikálnej olympiáde, a s tým súvisí i pokles počtu žiakov, ktorí majú záujem o zapojenie do súťaže, nakoľko si prestávajú veriť. Reakciou učiteľov je tlak na znižovanie náročnosti úloh, najmä na základnej škole. Ak by sme podľahli tomuto tlaku, boli by sme spokojní, že máme veľa úspešných riešiteľov, ale na medzinárodnej úrovni budeme stále klesať. **Je tu otázka – chceme sa stať outsidermi v medzinárodných súťažiach podobne ako je tomu v medzinárodnom monitorovaní, napr. TIMSS, PISA?**

## Odporúčanie pre MŠ SR

V súvislosti s transformovaním školstva na Slovensku by sa mala väčšia pozornosť venovať osobitnej starostlivosti o mimoriadne talentovaných žiakov nielen v športe a umení, ale aj v matematike, prírodných a technických vedách. Vzhľadom na klesajúci záujem žiakov i učiteľov v tomto smere možno očakávať v blízkej budúcnosti ďalší pokles úspešnosti našich žiakov v medzinárodných prírodovedných súťažiach a celkovej konkurencieschopnosti absolventov našich škôl nielen v súťažiach, ale najmä v ich ďalšom uplatnení.

Významnou súčasťou práce s talentami musí byť **systemová práca v rámci základných, stredných a vysokých škôl, ktorá v súčasnosti neexistuje**. Táto práca sa však nestane realitou, ak nebude legislatívne zakotvená v zákone a následných vykonávacích predpisoch. Nestane sa realitou ak absentuje systém motivácie učiteľov túto nadštandardnú činnosť vykonávať a absentuje aj náležité ocenenie tejto práce. V súčasnosti badať na národnej úrovni skôr **trend útlmu podpory** tejto činnosti.

Zo skúseností z predchádzajúcich rokov vyplýva, že úspešná reprezentácia je podmienená kvalitnou viacročnou systematickou prípravou talentovaných študentov (a vo finále súťažného družstva), ktorú možno realizovať iba nad rámec bežnej školskej výučby. Odporúčame preto ministerstvu **podporovať systém sústredení** pre objavovanie a výchovu najlepších riešiteľov olympiád s perspektívou účasti v medzinárodnej súťaži.



***Obr. 2:** Pracovná skupina reprezentácie v súťažnej miestnosti (laboratórium Ústavu fyzikálnych vied Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach). Zľava: RNDr. Lubomír Mucha, Adam Džavoronok, Jozef Csipes, Štefan Slavkovský, Pavol Pivko, Pavol Šimkovič, RNDr. Tomáš Lučivjanský, PhD.*

## **Nasledujúci 52. ročník Medzinárodnej fyzikálnej olympiády**

52. ročník IPhO sa plánuje v **Minsku, Bielorusko**. Podrobnosti zatiaľ nie sú známe.

Podľa štatútu IPhO pozývajú organizátori národnú reprezentáciu so štandardným zložením 5 žiakov a 2 vedúci a ďalších členov ako pozorovateľov a hostí. Pre rok 2022 navrhujeme zloženie oficiálnej delegácie:

**5 žiakov + 2 vedúci.**

Predpokladaný účastnícky poplatok za celú navrhovanú delegáciu je **3 500 EUR**.

V Žiline dňa 27. 7. 2021

*Prof. Ing. Ivo Čáp, CSc.  
predseda SK FO a vedúci reprezentácie*

## 5. online Európska fyzikálna olympiáda (EuPhO)

19.6. - 26.6.2021

<https://eupho.ee/>

V dňoch 19.6. až 26.6.2021 sa uskutočnila súťaž 5. ročníka Európskej fyzikálnej olympiády – EuPhO 2021. Vzhľadom na epidemiologickú situáciu sa súťaž uskutočnila dištančne (on-line). Organizačne súťaž zabezpečovala Univerzita Ľubľana a po odbornej stránke medzinárodná akademická porota.

### Slovensko reprezentovali:

Súťažiaci: Csipes Jozef, 4. ročník, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, Šimkovič Pavol, 4. ročník, Gymnázium Kukučínova, Poprad, Slavkovský Štefan, 4. ročník, Gymnázium Kukučínova, Poprad, Džavoronok Adam, 2. ročník, Gymnázium Poštová, Košice, Pivko Pavol, septima, Gymnázium Grösslingová, Bratislava.

Vedúci: RNDr. Ľubomír Mucha, CVČ-RCM, Košice,  
RNDr. Tomáš Lučivjanský, PhD., UFV PF UPJŠ Košice.

Samotná súťaž prebiehala v dňoch 19.6.-20.6.2021. Slovenské družstvo súťažilo v priestoroch Oddelenia didaktiky fyziky Ústavu fyzikálnych vied na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach. Súťažiaci boli pod kontrolou kamier cez aplikáciu Zoom, a zároveň bola snímaná aj celá miestnosť, kde žiaci riešili úlohy.

Súťaže sa zúčastnilo 219 súťažiacich z 30 Európskych krajín a 16 krajín mimo Európy.

### Príprava súťažného družstva

Príprava prebiehala v on-line priestore od 14.6.2021 do 18.6.2021. Za prípravu, realizáciu a odborný program sústredení zodpovedali RNDr. Ľubomír Mucha (CVČ – RCM Košice) a RNDr. Tomáš Lučivjanský, PhD. (PF UPJŠ Košice).

### Finančné a organizačné zabezpečenie účasti na EuPhO

Účasť družstva SR na 5. EuPhO organizačne a finančne zabezpečila Iuventa v spolupráci s podpredsedom Slovenskej komisie FO RNDr. Ľubomírom Muchom. Iuventa uhradila účastnícky poplatok za delegáciu (piati súťažiaci) v celkovej výške 450 EUR, tiež náklady spojené s ubytovaním a stravou študentov, a náklady spojené s technickým zabezpečením on-line súťaže.

## Priebeh podujatia

Pre vlastnú súťaž medzinárodná akademická porota pripravila zaujímavé a veľmi náročné úlohy: tri teoretické a dve experimentálne úlohy. Úlohy preložili – dve hodiny pred začiatkom teoretickej časti a tiež dve hodiny pred začiatkom experimentálnej časti súťaže – RNDr. Tomáš Lučivjanský, PhD. (PF UPJŠ Košice) a doc. RNDr. Mária Kladivová, PhD. (FEI TU Košice).

V prvej teoretickej úlohe, z termodynamiky, bolo potrebné vypočítať stavové veličiny v jednotlivých častiach valca rozdeleného membránou, pričom z jednej strany bol do valca pomaly zasúvaný piest.

Druhá úloha bola z mechaniky. Z vlákna vytvorená slučka, ktorej dĺžka bola väčšia ako obvod valca, bola nasunutá na valec. Na voľný koniec vlákna pôsobila sila v smere rovnobežnom s osou valca. Hľadala sa kritická dĺžka slučky, pri ktorej sa pôsobením danej sily vlákno pretrhne.

V tretej úlohe z optiky mali žiaci k dispozícii dva obrázky gule nasnímanej pomocou digitálneho fotoaparátu. Na prvom bola nasnímaná guľa podsvietená dichromatickým svetlom s dvomi úzkymi spektrálnymi čiarami, a na druhom bola guľa osvetlená bielou LED diódou. Guľa bola zo skla, a bolo potrebné vypočítať indexy lomu skla pre dané vlnové dĺžky spektrálnych čiar.

Experimentálne úlohy riešili pomocou simulačných programov. Žiaci simulovali experiment, a program im zobrazoval hodnoty, ktoré by odčítavali na meracích prístrojoch. V prvej experimentálnej úlohe hľadali pomocou kompasu smer natočenia ukrytého drôtu voči danej súradnej sústave, ak vedeli nastavovať veľkosť a aj smer prúdu prechádzajúci drôtom. V druhej úlohe určovali tepelné vlastnosti neznámeho kovu, z ktorého bola vyrobená kovová tyč, pričom tyč bola na jednom konci zohrievaná a nachádzala sa v okolí s konštantnou teplotou.

Za každú teoretickú úlohu a aj experimentálne úlohy mohli získať maximálne 10 bodov, teda celkovo 50 bodov.

Riešenia študentov opravila odborná medzinárodná porota, ktorá pripravila na každú úlohu veľmi podrobne autorské riešenie aj s podrobným rozdelením bodov za jednotlivé časti úlohy.

Zosúladenie hodnotenia poroty s bodmi, ktoré si udelili súťažiaci spolu s vedúcim sa realizuje formou moderácie. Tu je zásadný rozdiel medzi IPhO (Medzinárodná fyzikálna olympiáda) a EuPhO. Súťažiaci si sami moderujú svoje riešenia. Vedúci družstva je len v úlohe poradcu.

Na základe bodového hodnotenia študentských riešení úloh zostavili organizátori poradie súťažiacich a medzinárodná akademická porota určila hranice pre jednotlivé druhy ocenenia. V zmysle štatútu EuPhO hranica pre zisk zlatej medaily bola stanovená na 23,5 b., striebornej na 16,2 b. a bronzovej na 10,9 b. Hranica úspešnosti bola stanovená na 8,3 bodu. Celkove bolo udelených 15 zlatých medailí, 30 strieborných

medailí, 66 bronzových medailí a 27 čestných uznání. Predávanie medailí sa uskutočnilo 26.6.2021 o 14:00 hod. nášho času, taktiež online formou. Výsledky jednotlivých úspešných súťažiacich sa nachádzajú na stránke <http://eupho.ee>. Informácie o neúspešných riešiteľoch sa nezverejňujú. Organizátori pošlú ocenenia vedúcemu družstvu.

Po organizačnej stránke bola súťaž dobre zvládnutá, neboli vznesené žiadne námietky voči objektívite súťaže.

### Výsledky súťaže jednotlivcov (prvá trojka a slovenskí súťažiaci).

súťažiaci	Krajina	Celkove	Medaila
1. Štefan Vlad	Rumunsko	41,3 bodu	zlatá
2. Alexander Prodanov	Bulharsko	33,1 bodu	zlatá
3. Cristiaana Andreeva	Rumunsko	31,0 bodu	zlatá
⋮	⋮	⋮	⋮
40. Pavol Pivko	Slovensko	17,8 bodu	strieborná
⋮	⋮	⋮	⋮
55. Jozef Csipes	Slovensko	14,9 bodu	bronzová
⋮	⋮	⋮	⋮
79. Štefan Slavkovský	Slovensko	13,1 bodu	bronzová
⋮	⋮	⋮	⋮
Pavol Šimkovič	Slovensko	7,3 bodu	
Adam Džavoronok	Slovensko	4,0 bodu	

### Neoficiálne poradie európskych krajín

1. Rumunsko	149,4 b
2. Rusko	108,3 b
3. Maďarsko	107,9 b
4. Bulharsko	99,4 b
5. Taliansko	91,2 b
6. Srbsko	83,0 b
7. Turecko	76,9 b
8. Poľsko	72,7 b
⋮	⋮
14. Slovensko	45,8 b

Poradie krajín sa nevyhlasuje, a bolo zostavené na základe získaných bodov len úspešných súťažiacich.

### Hodnotenie účasti

Tohtoročná online EuPhO už po druhýkrát sa riešila v on-line priestore. Získali sme o jednu medailu viac ako v minulom roku. Samotná súťaž však ukázala, že riešenie úloh na EuPhO si vyžaduje veľkú kreativitu. Na druhej strane je potrebné zdôrazniť, že úlohy boli veľmi náročné – na zisk zlatej medaily stačilo získať menej ako 50% bodov. Bez špeciálnej prípravy na takéto súťaže nemôžeme pomýšľať v budúcnosti na úspechy.



*Obr. 1: Slovenské družstvo na 5. ročníku EuPhO (zľava): Tomáš Lučivjanský, Štefan Slavkovský, Jozef Csipes, Pavol Šimkovič, Pavol Pivko, Adam Džavoronok, Lubomír Mucha.*

### Nasledujúci 6. ročník Európskej fyzikálnej olympiády

6. ročník EuPhO sa uskutoční **v Slovinsku v Lubl'ane** koncom mája 2022.

Podľa štatútu EuPhO pozývajú organizátori národnú reprezentáciu so štandardným zložením 5 žiakov a 2 vedúci a ďalších členov ako pozorovateľov a hostí. Pre rok 2022 navrhujeme zloženie oficiálnej delegácie:

**5 žiakov + 2 vedúci.**

Predpokladaný účastnícky poplatok za celú navrhovanú delegáciu je **1 500 EUR**.

*RNDr. Lubomír Mucha  
vedúci delegácie*



## JUBILEUM

---

### Životné jubileum prof. RNDr. Jozefa Fuliera<sup>1</sup>, CSc.

V tomto jesennom období sa významný člen Akademickej obce FPV UKF v Nitre, pán prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc. z Katedry matematiky FPV dožil významného životného jubilea – 70 rokov.

Pri tejto príležitosti mu dekan Fakulty prírodných vied UKF v Nitre prof. RNDr. František Petrovič, PhD. udelil Striebornú medailu Fakulty prírodných vied UKF v Nitre a nám, jeho kolegom z katedry, ako aj ostatným členom slovenskej matematickej obce, pripadla milá povinnosť mu k jubileu srdečne zablahoželať aj touto formou.

Pán profesor Fulier sa narodil 22. septembra 1951 v Hlohovci-časti Šulekovo. Maturoval v roku 1970 na Strednej všeobecnovzdelávacej škole v Hlohovci a následne absolvoval vysokoškolské štúdium na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave v odbore učiteľstvo v aprobácii matematika-fyzika, ktoré úspešne ukončil v roku 1975.

Po krátkom pôsobení na pozícii odborného asistenta na Vysokej škole dopravy a spojov v Žiline, neskôr na Vysokej škole poľnohospodárskej v Nitre, nastúpil na miesto odborného asistenta na Katedru matematiky vtedajšej Pedagogickej fakulty v Nitre, dnes už Fakulty prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre. Z uvedeného vyplýva, že pán profesor Jozef Fulier aktívne pôsobí dodnes na našej vysokej škole už plných 44 rokov.

Počas pôsobenia na našej alma mater rozvíjal svoj talent a vedeckú prácu v matematike. Externú vedeckú aspirantúru úspešne absolvoval na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave a v roku 1986 mu bol udelený titul „kandidát fyzikálno-matematických vied“ v odbore matematická analýza.



*prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.*

---

<sup>1</sup> Kontaktná adresa jubilanta: Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied UKF v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, 949 01 Nitra, **email:** [jfulier@ukf.sk](mailto:jfulier@ukf.sk)

V roku 1997 sa na Fakulte prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre úspešne habilitoval a získal titul „docent“ v odbore teória vyučovania matematiky. Následne, v roku 2004 na základe úspešne ukončeného inauguračného konania mu bol priznaný titul „profesor“ v teórii vyučovania matematiky.

Významná pedagogická erudovanosť sa prejavila v učiteľskej práci pri príprave budúcich učiteľov matematiky i doktorandov, keďže pán prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc. pôsobil viac než dve desaťročia ako garant učiteľských študijných programov prvého a druhého stupňa, a tiež ako garant a predseda odborovej komisie doktorandského študijného programu teória vyučovania matematiky.

Vednú oblasť matematiky obohatil i množstvom odborných a vedeckých publikácií. Svoje organizačné schopnosti využil pri svojom pôsobení v riadiacich štruktúrach na úrovni fakulty a aj univerzity:

- prodekan pre vzdelávanie na FPV UKF v Nitre v rokoch 1993-1996; 1996-1999
- vedúci Katedry matematiky v roku 1994;
- vedúci Katedry matematickej analýzy, geometrie a didaktiky matematiky 1999-2002,
- prorektor UKF pre rozvoj univerzity v rokoch 2002 – 2006.

Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc. sa počas svojej kariéry vysokoškolského pedagóga aktívne zapájal do práce s talentovanou mládežou a v tejto činnosti je stále aktívny. Stále pôsobí vo funkcii predsedu Krajskej komisie matematickej olympiády pre Nitriansky kraj a je tiež členom Slovenskej komisie MO s celoštátnou pôsobnosťou. Navyiac, je aj dlhoročným členom redakčnej rady časopisu *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*. Nepretržite sa viac ako tri desaťročia angažuje v celoslovenskom Výbore Slovenskej matematickej spoločnosti JSMF pri SAV, je členom Ústredného výboru JSMF a v poslednom období pracuje ako predseda, resp. podpredseda Pobočky JSMF v Nitre (s pôsobnosťou pre celý Nitriansky kraj).

Významnou udalosťou v živote pána profesora Fuliera bolo udelenie jedného z najvyšších rezortných ocenení v oblasti školstva, Malej medaily sv. Gorazda, ktorou v roku 2017 ocenil minister školstva, vedy, výskumu a športu SR jeho prínos k rozvoju vzdelávania na Slovensku a prínos k celkovému progresu slovenského školstva. Pán prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc. je nepochybne významnou osobnosťou slovenskej didaktiky matematiky a teórie vyučovania matematiky.

*Do ďalších rokov mu prajeme hlavne pevné zdravie  
a ešte veľa tvorivých síl a energie.*

*Gabriela Pavlovičová, Dušan Vallo<sup>2</sup>*

---

<sup>2</sup> Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied UKF v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, 949 01 Nitra  
e-mail: [gpavlovičová@ukf.sk](mailto:gpavlovičová@ukf.sk), [dvallo@ukf.sk](mailto:dvallo@ukf.sk)

Jednota slovenských matematikov a fyzikov  
Matematický ústav SAV  
Ústav informatiky SAV

---

### **Adresa redakcie**

#### **Matematická a informatická časť**

Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok  
(e-mail: obzory@ku.sk)

#### **Fyzikálna časť**

Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra  
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

#### **Objednávky a predplatné vybavuje**

JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava  
(e-mail: kalina@math.sk)

## **OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2021 ročník 50**

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Vedeckí redaktori: Jozef Doboš

Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki

Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková

Správca [www.omfi.ukf.sk](http://www.omfi.ukf.sk): Martin Drlík

Zástupca vydavateľa: Martin Kalina

Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Náklad: 550 kusov

Periodicita vydávania: štvrťročník

IČO vydavateľa: 00 178 705

Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava

Dátum vydania periodickej tlače: apríl 2021

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené

Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava

č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

## OBSAH

Jozef D o b o š : O riešení nerovnic s absolútnou hodnotou.....	1
Zdeněk P ů l p á n : Informace pro fuzzy množiny a intuicionistické fuzzy množiny .....	9
Zadania úloh 37. ročníka Olimpiády v informatike (Michal Anderle, Michal Forišek).....	20
Texty úloh 1. kola 63. ročníka Fyzikálnej olympiády (šk. r. 2021-2022) kategórie A, B, C, D.....	33
INFORMÁCIE	
51. Medzinárodná fyzikálna olympiáda, Vilnius, Litva, 17.-24.7.2021 (online) (Ivo Čáp).....	57
5. online Európska fyzikálna olympiáda, 19. – 26.6.2021 (Ľubomír Mucha) .....	67
JUBILEÁ	
Životné jubileum prof. RNDr. Jozefa Fuliera, CSc.....	71

## CONTENTS

Jozef D o b o š : On Solving Absolute Value Inequalities.....	1
Zdeněk P ů l p á n : Information for Fuzzy Sets and Intuitionistic Fuzzy Sets .....	9
Tasks of the 37 <sup>th</sup> Olympiad in Informatics (Michal Anderle, Michal Forišek).....	20
Tasks of the First Round of the 63 <sup>rd</sup> Physics Olympiad in School Year 2021 – 2022, Categories A, B, C, D .....	33
51 <sup>st</sup> International Physics Olympiad, Vilnius, Lithuania 17. – 24.July 2021 (Online) (Ivo Čáp).....	57
The Fifth European Physics Olympiad 19. – 26. June 2021 (Online) (Ľubomír Mucha) .....	67
JUBILEE	
The Life Anniversary of Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.....	71