

OBSOBY

4/2020 (49)

MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2020 ročník 49

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 4/2020 Volume 49

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Zná m, Beloslav Riečan et Daniel Klavanec

Editors in Chief: Jozef D o b o š (Mathematics and Computer Sciences)
Daniel K l u v a n e c (Physics)

International Editorial Board:

Anatolij D v u r e č e n s k i j (Slovakia)	Štefan L u b y (Slovakia)
Gábor G a l a m b o s (Hungary)	László N á n a i (Hungary)
Juraj H r o m k o v i č (Switzerland)	Adam P l o c k i (Poland)
Hans J o r d e n s (Netherland)	Zdeněk P ů l p á n (Czech republic)
Martin K a l i n a (Slovakia)	Ladislav Emanuel R o t h (USA)

Executive Editors: Štefan T k a č i k (Mathematics and Computer Sciences)
A b a T e l e k i (Physics)

Editorial Board:

Mathematics and Computer Sciences:

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Peter Maličký	Iveta Scholtzová
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Mariana Marčoková	Milan Turčáni
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Milan Matejdes	Peter Vrábel
	Tomáš Lengyelfalusi	Martin Papčo	

Physics:

Jozef Beňuška	Stanislav Holec	Viera Lapitková	Vladimír Šebeň
Ivo Čáp	Anna Jankovychová	Milan Noga	Boris Tomášik
Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó	Bohumil Vybíral

Reviewers:

Mathematics and Computer Sciences:

Ružena Blašková	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan
Radoslav Harman	Martin Papčo	Marián Trenkler
Mária Kmeťová	Iveta Scholtzová	Dušan Vallo

Physics:

Peter Demkanin	Peter Hanisko	Marián Kíreš	Arnold Pompoš
Jozef Hanč	Ján Klíma	Miroslava Ožvoldová	Mária Rakovská

Riešenie racionálnych nerovnic metódou intervalov

Jozef Doboš

Abstract [Solving Rational Inequalities using Method of Intervals]: In this paper, we would like to show how it is possible to solve rational inequalities in school Mathematics.

Key words: solving rational inequalities

Súhrn: V tomto článku chceme ukázať, ako možno riešiť racionálne nerovnice v školskej matematike.

Kľúčové slová: riešenie racionálnych nerovnic

MESC: H30

Impulzom pre napísanie tohto článku bol konferenčný príspevok [2], v ktorom začínajúca učiteľka pútavým spôsobom popísala svoje skúsenosti s vyučovaním racionálnych nerovnic. Je poučné uvedomiť si, že ak so žiakmi riešime príliš veľa veľmi podobných úloh, namiesto upevňovania správnych návykov si žiaci môžu vytvárať vlastné zjednodušené postupy, ktoré však nemusia fungovať pri ďalších úlohách.

Naučíme sa používať metódu intervalov pri riešení racionálnych nerovnic, ktoré pre tento účel majú byť zapísané v jednom z nasledujúcich tvarov:

$$\underbrace{\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0,}_{\text{ostré racionálne nerovnice}} \quad \underbrace{\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0,}_{\text{neostré racionálne nerovnice}} \quad (1)$$

kde $P(x)$ a $Q(x)$ sú mnohočleny premennej x . Pokiaľ daná racionálna nerovnica nie je zapísaná v požadovanom tvare, najskôr ju do takéhoto tvaru upravíme. Pritom používame iba ekvivalentné úpravy.

Úlohu na riešenie neostrej racionálnej nerovnice môžeme rozdeliť na dve alternatívy: na ostrú racionálnu nerovnicu a na racionálnu rovnicu. Pretože

$$\begin{aligned} a \geq b &\text{ práve vtedy, keď } a > b \text{ alebo } a = b, \\ a \leq b &\text{ práve vtedy, keď } a < b \text{ alebo } a = b. \end{aligned}$$

Na záver potom stačí zjednotiť obidva nájdené obory pravdivosti.

Preto sa najskôr zameriame na ostré racionálne nerovnice. Pripomeňme si, že v menovateli zlomku nemôže byť nula. Ak teda číslo x je riešením danej ostrej racionálnej nerovnice, potom platí $Q(x) \neq 0$. Pretože potom $Q^2(x) > 0$, danú ostrú racionálnu nerovnicu môžeme vynásobiť mnohočlenom $Q^2(x)$. Tým prevedieme danú ostrú racionálnu nerovnicu na algebraickú nerovnicu, ktorá je s ňou ekvivalentná:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x)Q(x) > 0; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x)Q(x) < 0. \quad (2)$$

Pozrime si nasledujúcu ukážku.

Úloha 1. Riešte nerovnicu (pozri [3])

$$2 + \frac{3}{x+1} > \frac{2}{x}. \quad (3)$$

Riešenie. Nerovnicu (3) upravíme do jedného z tvarov uvedených v (1). Najskôr prenesieme výraz z pravej strany na ľavú a potom ľavú stranu upravíme na spoločného menovateľa:

$$\begin{aligned} 2 + \frac{3}{x+1} &> \frac{2}{x}, \\ 2 + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x} &> 0, \\ \frac{2x(x+1) + 3x - 2(x+1)}{x(x+1)} &> 0, \\ \frac{2x^2 + 2x + 3x - 2x - 2}{x(x+1)} &> 0, \\ \frac{2x^2 + 3x - 2}{x(x+1)} &> 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Vzhľadom na (2) môžeme nerovnicu (4) prepísať do tvaru

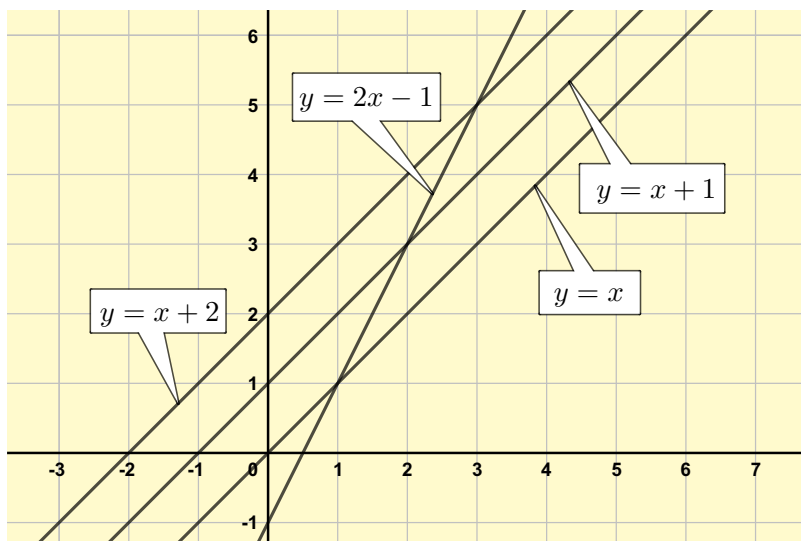
$$x(x+1)(2x^2 + 3x - 2) > 0. \quad (5)$$

Ešte je vhodné rozložiť kvadratický trojčlen $2x^2 + 3x - 2$ na súčin lineárnych dvojčlenov. Nerovnica (5) potom bude mať tvar

$$x(x+1)(x+2)(2x-1) > 0. \quad (6)$$

Nulové body mnohočlena $p(x) = x(x + 1)(x + 2)(2x - 1)$ zrejme sú $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}$. Pretože nerovnica (6) je ostrá, žiadne z týchto čísel nie je jej riešením. Môžeme sa o tom presvedčiť aj tak, že urobíme skúšku správnosti. Po dosadení každého z týchto čísel do nerovnice (6) dostaneme nerovnosť $0 > 0$, ktorá zrejme nie je pravdivá.

Každý z lineárnych dvojčlenov v nerovnici (6) je tvaru $kx + q$, kde $k > 0$. Už zo základnej školy vieme, že ak $k > 0$, potom funkcia $y = kx + q$ je rastúca. Nech x_0 je nulový bod tohto lineárneho dvojčlena (t. j. koreň rovnice $kx + q = 0$). Potom tento lineárny dvojčlen nadobúda kladné hodnoty napravo od bodu x_0 a záporné hodnoty naľavo od bodu x_0 .



Teraz už máme všetko pripravené na vyriešenie našej nerovnice.

O číslach $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}$ už vieme, že žiadne z nich nie je riešením našej nerovnice. Tieto čísla vyčleňujú na reálnej osi intervaly $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; \frac{1}{2})$ a $(\frac{1}{2}; \infty)$.



Najskôr preskúmame interval $(\frac{1}{2}; \infty)$. Všetky čísla z tohto intervalu ležia napravo od všetkých nulových bodov nášho mnohočlena $p(x)$, preto každý z lineárnych dvojčlenov v nerovnici (6) nadobúda v intervale $(\frac{1}{2}; \infty)$ kladné hodnoty. Odtiaľ vyplýva, že každé číslo z intervalu $(\frac{1}{2}; \infty)$ je riešením nerovnice (6).

Teraz sa pozrieme na interval $(0; \frac{1}{2})$. V tomto intervale každý z lineárnych dvojčlenov v nerovnici (6) nadobúda kladné hodnoty, okrem lineárneho dvojčlena $2x - 1$, ktorý tam nadobúda záporné hodnoty. Preto mnohočlen $p(x)$ nadobúda v intervale $(0; \frac{1}{2})$ záporné hodnoty (ako súčin troch kladných hodnôt a jednej zápornej hodnoty). Odtiaľ vyplýva, že žiadne číslo z intervalu $(0; \frac{1}{2})$ nie je riešením nerovnice (6).

Tak isto preskúmame postupne aj intervaly $(-1; 0)$, $(-2; -1)$ a $(-\infty; -2)$. Môžeme si všimnúť, že pri tomto postupe sprava doľava (od jedného intervalu k druhému) práve jeden z lineárnych dvojčlenov mnohočlena $p(x)$ zmení znamienko. Na tom je založený tento skrútený postup: do oboru pravdivosti nerovnice (6) zaradíme najskôr interval, ktorý je najviac vpravo a potom každý druhý interval pri prechode cez číselnú os sprava doľava.

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (3) je množina

$$M = (-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (\frac{1}{2}; \infty).$$

Poznámka. Pri riešení predchádzajúcej úlohy sme tiež zistili, že oborom pravdivosti nerovnice $x(x+1)(x+2)(2x-1) < 0$ je množina $P = (-2, -1) \cup (0; \frac{1}{2})$.

Postup z riešenia úlohy č. 1 môžeme použiť pri riešení racionálnych nerovnic, ktoré vieme upraviť do tvaru

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0, \quad (7)$$

kde $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Čísla x_1, x_2, \dots, x_n vyčleňujú na reálnej osi intervaly $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, \dots , $(x_n; \infty)$. Potom do oboru pravdivosti nerovnice (7) zaradíme interval, ktorý je najviac vpravo, t.j. interval $(x_n; \infty)$, ako aj každý druhý interval pri prechode cez číselnú os sprava doľava.

Na druhej strane, obor pravdivosti racionálnej nerovnice, ktorú vieme upraviť do tvaru

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) < 0 \quad (8)$$

(kde $x_1 < x_2 < \dots < x_n$), tvoria práve tie intervaly, ktoré sme pri riešení nerovnice (7) vynechali. Začneme teda druhým sprava a postupne pridávame každý druhý interval pri prechode cez číselnú os sprava doľava.

V ďalšom sa pozrieme na ostré racionálne nerovnice, ktoré sa nedajú tak priamočiaro upraviť do tvaru (7), resp. (8). Začneme nasledujúcou dôležitou ukážkou.

Úloha 2. Riešte nerovnicu

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + 2x - 15} < 0. \quad (9)$$

Riešenie. Pretože platí $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$, čísla $x = -5$ a $x = 3$ sú koreňmi kvadratického trojčlena $x^2 + 2x - 15$. Teda nemôžu byť riešeniami nerovnice (9). Jednoducho preto, že v menovateli zlomku nemôže byť nula.

Pretože platí $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$, čísla $x = 3$ a $x = 4$ sú koreňmi kvadratického trojčlena $x^2 - 7x + 12$. Ako vidíme, číslo $x = 3$ je zároveň aj koreňom kvadratického trojčlena $x^2 + 2x - 15$. Preto nesmieme zabudnúť, že sme už rozhodli o jeho vylúčení. Môžeme si to potvrdiť aj skúškou správnosti. Po dosadení čísla $x = 3$ do nerovnice (9) dostávame na ľavej strane nedefinovaný výraz $\frac{0}{0}$.

Nerovnicu (9) môžeme prepísať do ekvivalentného tvaru

$$\frac{(x + 5)(x - 3)}{(x - 3)(x - 4)} < 0. \quad (10)$$

Nasledujúci okamih je pre korektné riešenie nerovnice (9) kľúčový. Totiž po vykrátení lineárnym dvojčlenom $x - 3$ dostaneme nerovnicu

$$\frac{x + 5}{x - 4} < 0. \quad (11)$$

Táto však nie je ekvivalentná s nerovnicou (9). Ako sme videli vyššie, číslo $x = 3$ nie je riešením nerovnice (9). Ale je riešením nerovnice (11), o čom sa môžeme presvedčiť skúškou správnosti. V skutočnosti je nerovnica (9) ekvivalentná s nasledujúcou sústavou nerovnic:

$$\begin{cases} x \neq 3, \\ \frac{x + 5}{x - 4} < 0. \end{cases}$$

Túto sústavu riešime tak, že nájdeme množinu riešení nerovnice (11) a potom z tejto množiny odstránime číslo $x = 3$. Nerovnicu (11) môžeme riešiť rovnakým spôsobom, ako sme riešili úlohu č. 1. Množinou riešení nerovnice (11) je interval $(-5; 4)$. Z tohto intervalu teraz odstránime číslo $x = 3$, čím dostaneme množinu riešení nerovnice (9). *Odpoveď:* Oborom pravdivosti nerovnice (9) je množina $M = (-5; 3) \cup (3; 4)$.

Veľmi podobný problém budeme riešiť aj v nasledujúcej úlohe.

Úloha 3. Riešte nerovnicu (pozri [3])

$$(x + 1)(x - 3)^2(x - 5)(x - 4)^2(x - 2) < 0. \quad (12)$$

Riešenie. Korene mnohočlena $p(x) = (x + 1)(x - 3)^2(x - 5)(x - 4)^2(x - 2)$ sú $x = -1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ a $x = 5$. Pretože nerovnica (12) je ostrá, žiadne z týchto čísel nie je jej riešením. Môžeme sa o tom presvedčiť aj tak, že urobíme skúšku správnosti. Po dosadení každého z týchto čísel do nerovnice (12) dostaneme nerovnosť $0 < 0$, ktorá zrejme nie je pravdivá.

Aby sme previedli nerovnicu (12) do tvaru (8), potrebujeme ju predeliť mnohočlenom $(x - 3)^2(x - 4)^2$. To je možné za predpokladu, že $x \neq 3$ a $x \neq 4$. Totiž, pre každé reálne číslo $x \neq 3$ platí $(x - 3)^2 > 0$ a podobne, pre každé reálne číslo $x \neq 4$ platí $(x - 4)^2 > 0$. Dostávame tak nerovnicu

$$(x + 1)(x - 5)(x - 2) < 0. \quad (13)$$

Nerovnica (13) však nie je ekvivalentná s nerovnicou (12). Napríklad číslo $x = 3$ je riešením nerovnice (13), ale nie je riešením nerovnice (12). V skutočnosti je nerovnica (12) ekvivalentná so sústavou nerovnic

$$\begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq 4, \\ (x + 1)(x - 5)(x - 2) < 0. \end{cases}$$

Túto sústavu riešime tak, že nájdeme množinu riešení nerovnice (13) a potom z tejto množiny odstránime čísla $x = 3$ a $x = 4$. Oborom pravdivosti nerovnice (13) je množina $(-\infty; -1) \cup (2; 5)$. Z tejto množiny teraz odstránime čísla $x = 3$ a $x = 4$, čím dostaneme množinu riešení nerovnice (12).

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (12) je množina

$$M = (-\infty, -1) \cup (2; 3) \cup (3; 4) \cup (4; 5).$$

Pripomeňme si, že kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ nemusí mať reálne korene (ak má záporný diskriminant). V takom prípade pre každé reálne číslo x platí $ax^2 + bx + c > 0$ (ak $c > 0$), resp. pre každé reálne číslo x platí $ax^2 + bx + c < 0$ (ak $c < 0$).

Tento poznatok môžeme využiť pri riešení nerovnic obsahujúcich takéto kvadratické trojčleny. Ukážeme si to na nasledujúcej úlohe.

Úloha 4. Riešte nerovnicu

$$\frac{1 + x^4}{1 - x^4} > 0. \quad (14)$$

Riešenie. Pretože $1 - x^4 = (1 - x^2)(1 + x^2) = (1 - x)(1 + x)(1 + x^2)$, nerovnicu (14) môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{1 + x^4}{(1 - x)(1 + x)(1 + x^2)} > 0. \quad (15)$$

Pretože pre každé reálne číslo x platí $1 + x^2 > 0$, nerovnicu (15) môžeme prenásobiť výrazom $1 + x^2$. Podobne, pretože pre každé reálne číslo x platí $1 + x^4 > 0$, nerovnicu (15) môžeme predeliť výrazom $1 + x^4$. Dostaneme tak nerovnicu

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} > 0,$$

ktorú prenásobíme mnohočlenom $(1-x)(1+x)$. Tak dostávame nerovnicu

$$(1-x)(1+x) > 0,$$

ktorú upravíme do tvaru (8) tak, že ju prenásobíme číslom (-1) . Dostávame nerovnicu

$$(x-1)(x+1) < 0,$$

ktorej oborom pravdivosti je interval $(-1; 1)$.

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (14) je interval $I = (-1; 1)$.

Na záver uvedieme na ukážku riešenie jednej neostrej racionálnej nerovnice.

Úloha 5. Riešte nerovnicu

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + 2x - 15} \leq 0. \quad (16)$$

Riešenie. Ako sme povedali vyššie, riešenie neostrej racionálnej nerovnice môžeme rozdeliť na dve alternatívy: na ostrú racionálnu nerovnicu a na racionálnu rovnicu.

Ostrú nerovnicu sme vyriešili v úlohe č. 2, preto nám zostáva iba vyriešiť racionálnu rovnicu

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + 2x - 15} = 0. \quad (17)$$

Rovnica (17) má jediný reálny koreň $x = 4$. Množinu riešení nerovnice (16) dostaneme tak, že k oboru pravdivosti nerovnice (9) pridáme koreň rovnice (17).

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (16) je množina

$$M = (-5; 3) \cup (3; 4) \cup \{4\} = (-5; 3) \cup (3; 4].$$

Intervaly označujeme podľa normy STN EN ISO 80000-2.

Teda $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.

Viac o metóde intervalov si môžete prečítať v knihe [1], ktorá je voľne dostupná na mojej webstránke.

Literatúra – References

- [1] Doboš, J.: Rovnice a nerovnice, Bolchazy-Carducci Publishers, Inc., Wauconda, Illinois 60084 USA, 2003. <http://web.science.upjs.sk/jozefdobos/publikacie/>
- [2] Holečková, R.: *Překvapení pro začátečníky*, In: Cesty k matematice II, Sborník konference, Jana Hromadová, Antonín Slavík (ed.), Matfyzpress, Praha, 2016, 42–46. <http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2016/sbornik.pdf>
- [3] Peller, F., Šáner, V., Eliáš, J., Pinda, Ľ.: Matematika krok za krokem na EU, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava, 2002.

PodĎakovanie: Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/0265/17 Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: jozef.dobos@upjs.sk

ERRÁTA

V príspevku (Obzory matematiky, fyziky a informatiky č. 1/2020, str. 25) Eriky Fec-kovej Škrabulákovej *Erupcie pre matematikov* bolo priezvisko jednej z osobností prednášajúcich v uplynulých rokoch na konferencii v Herľanoch uvedené nesprávne. Správne znenie je takéto: „*Nemecko: ... Prof. Dr. M. Lukáčová – Medvid'ová...*“

Hrozný problémů ve školské matematice (1. část)

Jan Kopka

Abstract [Clusters of Problems in School Mathematics]: We describe a teaching method called “The Creation of Clusters of Problems.” The method has two phases. First, we set up a basic problem in the given area, which we then solve together with the students. In the next phase we create similar problems. The solutions of these problems are usually not much different from the solution to the basic problem from Phase One. It is advisable to have students participate both in creating new problems and in solving them. The theoretical part is completed by creating clusters usable in school mathematics and also by methodical notes.

Key words: Problem, cluster of problems, game, winning strategy, constructive task, homothety, central symmetry, axial symmetry, translation symmetry, rotation symmetry

Souhrn: V článku popisujeme výukovou metodu nazývanou „Tvoření hrozných problémů“. Metoda má dvě fáze. Nejprve zadáme vhodný základní problém, který spolu se studenty vyřešíme. V následující fázi vytváříme podobné problémy, jejichž řešení se obvykle příliš neliší od řešení základního problému z první fáze. Je vhodné, když se vytváření nových problémů a jejich řešení účastní i studenti. Teoretická část je doplněna vytvářením hrozných použitelných ve školské matematice a metodickými poznámkami k nim.

Klíčová slova: Problém, hrozný problémů, hra, vítězná strategie, konstruktivní úloha, stejnolehlost, středová souměrnost, osová souměrnost, posunutí, otočení.

MESC: A30, A40, B20

Dobré problémy a houby určitého druhu mají něco společného, rostou ve shlucích. Pokud najdete jeden, měli byste se rozhlédnout. Je velká šance, že blízko budou další.

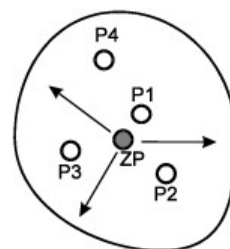
G. Polya v knize How to solve it

V tomto článku chceme ukázat, jak se chovat, pokud se nám podaří vyřešit nějaký matematický problém. Teoretické povídání doprovodíme konkrétními ukázkami. Uva-

žovaná metoda by se asi měla vzhledně nazývat *metoda generovaných problémů*. Jde o metodu při níž postupně vytváříme soubor navzájem příbuzných problémů. Proto jsme se rozhodli pro užívání „češtějšího“ názvu *metoda vytváření hroznu problémů*, který je jistě přijatelný i pro školskou matematiku. Na začátku pár teoretických slov o uvedené metodě. O této metodě se čtenář může dočíst např. v knížkách [6] a [8].

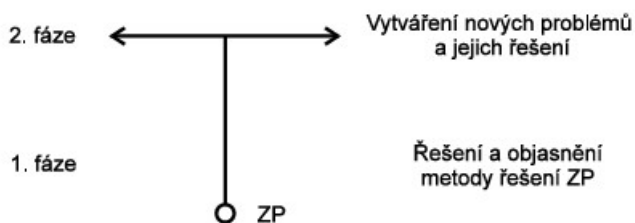
Metoda spočívá v tom, že v probírané oblasti matematiky vytipujeme vhodný výchozí problém, který budeme se studenty řešit. Při tom studentům poskytneme pouze tolik pomoci, kolik je nezbytně nutné. Když jsme společně problém vyřešili a studenti měli dostatek času, aby metodu řešení problému skutečně pochopili, můžeme začít vytvářet nové problémy, které jsou podobné původnímu problému. Pokud se nám podaří po určitém tréninku vtáhnout do procesu vytváření problémů i studenty, je to jenom dobře. Nesmíme však svou netrpělivostí tuto činnost studentů uspěchat.

První nové problémy se obvykle ve slovním vyjádření nebudou příliš lišit od původního problému a současně i metody řešení těchto problémů budou obvykle stejné nebo velmi podobné metodě řešení původního problému. Po vyřešení několika nových problémů se však studovaná oblast stane pro studenty mnohem známější, dalo by se říci přímo familiernější, a oni pak budou podnikavější a začnou vytvářet problémy, které se od původního problému budou víc a víc vzdalovat (viz obrázek 1).



Obrázek 1

Také metody řešení těchto problémů mohou vyžadovat stále větší úpravy metody řešení prvního problému. Vyřešením základního problému se „energetický“ dostáváme na vyšší hladinu a v ní pak vytváříme nové problémy (viz obrázek 2).



Obrázek 2

Poznamenejme ještě, že nové problémy obvykle tvoříme následovně: problém v sobě obsahuje skryté parametry a dosazováním nových hodnot za tyto parametry obdržíme nové problémy. Čtenáře na to upozorníme při probírání konkrétních příkladů (viz např. hrozen Hra u kulatého stolu). Můžeme je však tvořit i jinak. Svým kantorským citem musíme odhadnout, jak dlouho budeme nové problémy vytvářet. Pokud se studenti začnou nudit, je dobré skončit.

Při použití této metody můžeme rozlišit dvě fáze (viz obrázek 2). *První fáze* spočívá v tom, že vyřešíme úvodní problém a poskytneme žákům dostatek času, aby dobře pochopili metodu jeho řešení. *Druhá fáze* spočívá v tom, že začneme vytvářet pomocí prvního problému nové problémy a že se snažíme vyřešit je pomocí metody, kterou jsme objevili při řešení tohoto prvního problému. Výchozí problém je tak nejen nositelem určité metody řešení, ale zároveň slouží k vytváření nových problémů. Proto tento problém nazveme *základní problém*. Základní problém spolu se všemi problémy, které jsme pomocí něho vytvořili (a obvykle i vyřešili), budeme nazývat *hrozen (strapek) problémů*.

Vrátíme-li se k obrázku 1, vidíme, že bychom mohli metodu vytváření hroznů problémů popsat populárně ještě jednou, např. takto: Po vyřešení základního problému vytváříme a řešíme nejprve jeho „nejbližší sousedy“ a potom se od základního problému v různých směrech vzdalujeme a vytváříme a řešíme i „vzdálenější sousedy“.

Samozřejmě se může stát, že vytvoříme problém, který nebudeme schopni vyřešit. Je známo, že někdy podobně znějící problémy mají rozdílné metody řešení. Při používání metod vedoucích k rozvoji tvůrčích schopností člověka a k jeho samostatnosti je to však zcela přirozený jev. Naše zkušenosti ze školské praxe však ukazují, že takovéto situace nevznikají příliš často. Ještě bychom rádi upozornili na to, že vytváření každého hroznu bychom měli vhodně motivovat, aby studenti měli zájem se práce v rámci daného hroznu aktivně zúčastnit. Někdy je samotný základní problém natolik obsahově zajímavý, že sám představuje i motivaci. Jindy může motivaci představovat problém, který budeme řešit později při vytvoření hroznu.

Těchto několik vět úvodem by mělo stačit. Další poznámky budeme vkládat mezi jednotlivé hrozny a něco si ponecháme až na samotný závěr. U hroznů, bude-li to nutné, uvedeme i matematický rámec, do něhož je hrozen vložen, nebo uvedeme alespoň předpokládané matematické znalosti. Dále budeme pojednání o hroznech prokládat metodickými poznámkami, neboť jsme je všechny vyzkoušeli i ve školské praxi. Věříme, že na uvedených příkladech se čtenář může uvažovanou metodu naučit a navíc něco z toho může využít i ve školské praxi.

A nyní již přistupme k ukázkám. Začneme příkladem, který uvedl před lety ve svém článku [10] prof. Erich Wittmann z univerzity v Dortmundu a který jsme si upravili podle našich potřeb. V tomto znění je hrozen uveden např. v knížce [5].

Hrozen 1: Hra u kulatého stolu¹

Hrozen je motivován přímo základním problémem a nepožaduje téměř žádné předběžné matematické znalosti (stačí intuitivně chápat středovou souměrnost).

¹Tento hrozen je uveden v knížkách [5], [8].

Hra: Dva hráči A a B mají dostatek mincí stejné velikosti, aby mohli hrát hru u kulatého stolu. Hra má tato pravidla:

1. Hráči pokládají mince střídavě na stůl tak, aby se nepřekrývaly.
2. Hráč, který jako první nemůže položit svoji minci na stůl, prohrává.

Než začneme hrát, bylo by vhodné dohodnout se (definovat), co znamená *položit minci* na stůl.

V podstatě jsou možné dvě definice:

- a) celá jedna strana mince leží na ploše stolu,
- b) mince na stole „drží“ (může trochu přesahovat i přes okraj stolu).

Přijměme v celé další části definici a). Obecnější definice b) samozřejmě může vést na některých místech k jiným závěrům. Na tuto rozdílnost čtenáře upozorníme.

Studenti si mohou hru zahrát a pak jim sdělíme, že *existuje vítězná strategie* pro hráče, který první pokládá minci na stůl. Dohodněme se, že označení první hráč a hráč A znamená totéž. Obdobně znamená totéž druhý hráč a hráč B . Vzhledem k přijaté definici a) bychom však měli dodat, že vítězná strategie pro prvního hráče může existovat pouze tehdy, když stůl je dostatečně velký, aby se na něj vešla alespoň jedna mince.² V případě definice b) by tato podmínka z pochopitelných důvodů odpadla. A nyní již přistupme k základnímu problému našeho budoucího hroznu.

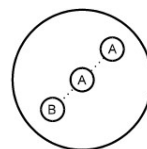
Problém

Zahrajte si hru na modelu stolu a pokuste se objevit vítěznou strategii prvního hráče (hráče A).

Poznámka. Studenti si před zadáním problému vystříhli z tvrdšího papíru kruhy o průměru 16 cm a přinesli si buď mince nebo nějaká stejně velká kolečka dvou barev. Problematiku jsme zkoušeli na základní a střední škole, ale i na škole vysoké. Hra zaujala nejen žáky a studenty, ale i jejich učitele. Byli jsme překvapeni, že např. i někteří z žáků šestého ročníku vítěznou strategii po určité, ne příliš dlouhé době objevili. Dodejme však, že zdaleka ne všichni řešitelé z řad dětí, ale i dospělých, byli při objevování vítězné strategie úspěšní. Proto zdůrazněme, že pokud někdo vítěznou strategii neobjeví, pak bychom ho měli k objevení této strategie dovést, tzn. měli bychom mu dostatečně pomoci. To, že student neobjevil strategii sám, mu samozřejmě nikterak nebrání, aby se aktivně zúčastnil pozdějšího vytváření nových problémů a jejich řešení. Než však k tomu může dojít, musí mít dostatek času, aby metodu řešení základního problému skutečně pochopil. Jako velmi účinná pomoc (po určité době snažení) se ukázala otázka: Které místo v kruhu má zvláštní postavení?

²Tato podmínka bude normálním lidem připadat přinejmenším podivná, neboť stoly obvykle tuto podmínku splňují. My ji však vyslovit musíme, neboť se chováme tak, jak se v matematice sluší.

Řešení. Hráč *A* položí svoji první minci do středu stolu a každou další minci vždy středově souměrně s mincí svého protihráče. Touto strategií si zajistí, že může položit minci vždy, když ji může položit protihráč *B* (viz obrázek vpravo).



Tím končí první fáze naší metody a můžeme proto přistoupit k fázi druhé. Zopakujme, že v této fázi buď sami nebo lépe ve spolupráci se studenty vytváříme pomocí základního problému problémy nové a snažíme se je vyřešit pomocí již známé vítězné strategie prvního hráče. V tomto demonstračním příkladě však nebudeme jednotlivé problémy přímo vypisovat. Spíše se zaměříme na to, abychom ukázali několik možných skupin těchto nových problémů.

První variace základního problému: změna tvaru stolu

Co se stane s vítěznou strategií prvního hráče, pokud ke hře užijeme stůl jiného tvaru? Může to být postupně stůl čtvercový, obdélníkový, trojúhelníkový, lichoběžníkový, stůl ve tvaru podkovy atd. (viz následující obrázek).



Řešení. Úlohu řešíme pro každý stůl zvlášť a potom získané poznatky zobecníme. Vítězná strategie prvního hráče je zřejmě použitelná pro každý stůl, který má desku středově souměrnou.

Poznamenejme, že nyní jsme do tvarové proměnné stolu v zadání hry dosazovali různé tvary stolů.

Druhá variace základního problému: deska stolu s otvory

Počet otvorů v desce stolu může být různý a různé může být i jejich rozmístění. Zabývejme se zde jenom nejjednodušší situací, kdy středově souměrný stůl má jeden kruhový otvor, a to právě uprostřed (např. kulatý zahradní stůl s otvorem pro slunečník). Co se v tomto případě stane s vítěznou strategií prvního hráče?

Řešení. Vítězná strategie z prvního hráče přechází tentokrát na druhého hráče. První hráč musí položit minci někam mimo středový otvor a druhý hráč pokládá středově souměrně s mincí protihráče. Poznamenejme, že v případě výše uvedené definice b) by záleželo na velikosti uvažovaného otvoru. Pokud by byl průměr otvoru menší než průměr mince, existovala by v případě použití definice b) vítězná strategie pro prvního hráče stejně jako u základního problému.

Nyní jsme plnou plochu stolu nahradili plochou s otvorem. Tady bychom asi nemluvili o nahrazení parametru nějakou konkrétní hodnotou.

Třetí variace základního problému: více stolů

Hrajte naši hru na větším počtu stejných středově souměrných (kruhových) stolů. Existuje vítězná strategie pro některého z hráčů?

Řešení. Uspořádejme pro přehlednost stoly tak, že je přiřazíme k sobě a jejich středy budou na přímce. Pokud budeme uvažovat tři stoly, pak existuje vítězná strategie pro prvního hráče. Ten první minci položí do středu prostředního stolu a další pak vždy středově souměrně podle tohoto středu s mincí protihráče. Obdobně to může dělat i při hře na pěti stolech a obecně při hře na jakémkoliv lichém počtu stolů. Shrňme: Při lichém počtu stolů existuje vždy vítězná strategie pro prvního hráče.

Jestliže uvažujeme dva stoly, pak první hráč nemůže podle definice a) položit minci na místo, v němž se stoly dotýkají (střed vzniklého útvaru). Musí tedy položit svoji minci jinam, a potom druhý hráč začne pokládat mince středově souměrně podle bodu dotyku stolů s mincemi prvního hráče. Existuje proto vítězná strategie pro druhého hráče. Toto se dá zobecnit pro libovolný sudý počet stolů. Shrňme: Při sudém počtu stolů existuje vždy vítězná strategie pro druhého hráče.

Je zřejmé, že pokud bychom při sudém počtu stolů uvažovali definici b), pak by první hráč mohl položit minci na prostředek útvaru a existovala by tak vítězná strategie pro něj. V tuto chvíli je pěkně vidět, jak moc záleží při řešení tohoto problému, a obecně v matematice, na definicích.

V tomto případě je parametr obsažený v problému číselný, totiž počet stolů, a my jsme za něj dosazovali jednak lichá a potom sudá přirozená čísla.

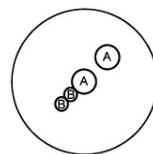
Čtvrtá variace základního problému: mince různé velikosti

Co se stane s vítěznou strategií hráče A , jestliže hráči mají mince různé velikosti?

Nechť má

- a) hráč A větší mince než hráč B ,
- b) hráč B větší mince než hráč A .

Řešení. V případě a) nelze použít vítěznou strategii hráče A , neboť hráč B může snadno vytvořit situaci, kdy hráč A postupující podle této strategie nemůže položit svoji minci (viz např. situace na obrázku vpravo)



V případě b) je vítězná strategie pro hráče A použitelná. Pokud totiž mohl hráč A pokládat svoje mince při stejné velikosti s mincemi hráče B , bude mít vždy dostatek místa na pokládání, pokud jsou jeho mince menší.

V případě vytváření těchto problémů byla parametrem velikost mincí.

Jistě by bylo možné vymyslet další variace základního problému. Čtenář se o to může pokusit sám.

Poznámka. Po probrání tohoto hroznu bychom chtěli čtenáře upozornit na to, že pomocí zajímavého problému z rekreační matematiky můžeme se studenty dělat skutečnou matematiku. Obměňujeme základní problém a při řešení aplikujeme známou metodu na novou situaci. Definujeme a ukazujeme, jak různě formulované definice mohou vést k různým výsledkům. Vyslovujeme podmínky, za nichž má dané tvrzení smysl. Experimentujeme a výsledky experimentování zobecňujeme. Využíváme pojmy středově souměrný útvar a zobrazení zvané středová souměrnost atd. Chováme se tedy jako matematikové, ale rámec úvah je pro studenty přijatelný, protože se pohybují v oblasti, kde si vše dokáží dobře představit.

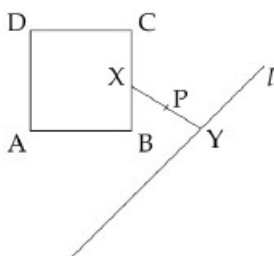
Další hrozen již do oblasti rekreační matematiky patřit nebude.

Hrozen 2: Geometrická zobrazení³

Tento hrozen z oblasti geometrie jsme úspěšně vyzkoušeli na střední škole, a to v době, kdy byla probrána *shodná zobrazení* a *stejnolehlost*, a kdy jsme chtěli tato geometrická zobrazení zopakovat. Vzhledem k opakování uvedeného tématu není potřeba zabývat se problematikou motivace. Po prostudování řešení jednotlivých problémů si čtenář jistě uvědomí, že používaná zobrazení jsou různá, ale postup těchto řešení je stejný.

Problém 1 (Základní problém)

Je dán čtverec $ABCD$, přímka l a bod P (viz obrázek 3). Sestrojte úsečku XY takovou, že bod X leží na hranici čtverce $ABCD$, bod Y leží na přímce l a bod P je jejím středem.



Obrázek 3

Řešení. I když je problém poměrně jednoduchý, uděláme i rozbor.

³Tento hrozen je uveden v knížkách [6], [8].

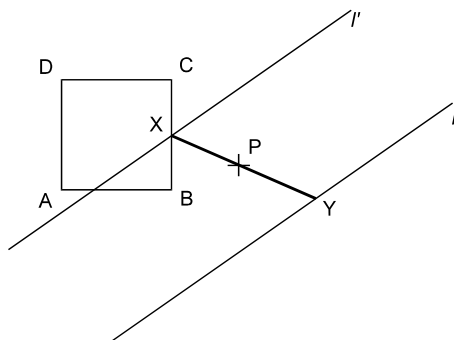
Rozbor. Předpokládejme, že úloha má řešení, a že na obrázku 3 je jedno takové řešení vyznačeno. Je zřejmé, že se jedná o úlohu o dvou neznámých bodech X, Y . Budeme hledat podmínky pro tyto body. Ze zadání víme, že jsou souměrné podle bodu P , tzn. že např. bod X je obrazem bodu Y ve středové souměrnosti se středem P . My ale bod Y neznáme. Zato víme, že Y leží na přímce l , a proto jeho obraz, tj. bod X , musí ležet na obrazu přímky l , tj. na přímce l' , ve středové souměrnosti se středem P . Proto již můžeme vyslovit podmínky pro oba neznámé body.

a) Bod X leží na hranici čtverce $ABCD$ (viz zadání).

Bod X leží na přímce l' , která je obrazem přímky l ve středové souměrnosti se středem P , tzn. $S(P) : l \mapsto l'$.

b) Bod Y je obrazem bodu X ve středové souměrnosti se středem P , tedy $S(P) : X \mapsto Y$.

Konstrukce. Sestrojíme přímku l' středově souměrnou s přímku l podle bodu P . Jestliže přímka l' protne hranici čtverce $ABCD$ v bodě X , pak bod X je jedním krajním bodem hledané úsečky. Sestrojíme přímku XP a její průsečík s přímku l označíme Y (v případě, že bod P leží na přímce l , tzn. přímka XP je totožná s přímku l , platí navíc, že $|PY| = |PX|$). Bod Y je druhým krajním bodem hledané úsečky (viz obrázek 4).

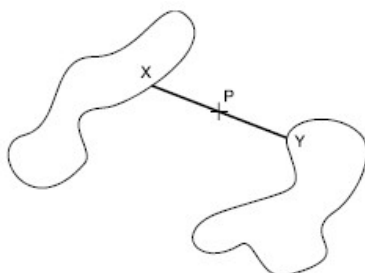


Obrázek 4

Důkaz. Bezprostředně vyplývá z konstrukce. Protože je úloha nepolohová, měli bychom udělat i diskusi. Zřejmě bude existovat právě tolik řešení, kolik má přímka l' společných bodů s hranicí čtverce $ABCD$. Nemusí proto existovat žádné řešení nebo existuje jedno, dvě či nekonečně mnoho (pokud některá strana čtverce leží na přímce l'). \square

Je dobře vidět, že v centru této konstrukce je zobrazení zvané *středová souměrnost*.

Pokud žáci dobře pochopili metodu řešení základního problému, můžeme přistoupit k vytváření nových problémů. Můžeme v základním problému nahradit čtverec $ABCD$ i přímkou l nějakými jinými obrazy a vše ostatní ponechat. Ideově ukazuje náš další problém obrázek 5.



Obrázek 5

Problém 2

Je dán trojúhelník ABC (nebo jiný geometrický obrazec), obdélník $KLMN$ (nebo jiný obrazec) a bod P . Sestrojte úsečku XY takovou, že bod X leží na hranici trojúhelníka ABC , bod Y na hranici obdélníka $KLMN$ a bod P je jejím středem.

Řešení. Metoda řešení je stejná jako u základního problému.

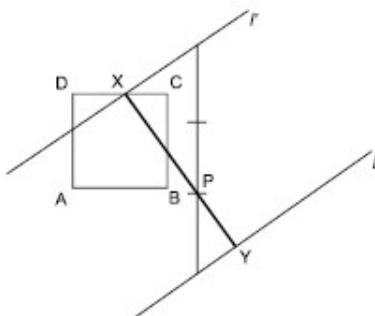
V tuto chvíli je zřejmé, že metoda řešení objevená při řešení prvního problému, v jejímž centru stojí středová souměrnost, vůbec nezávisí na tom, jaké dva obrazce zadáme. Nyní zaměníme v základním problému např. podmínku pro polohu bodu P na hledané úsečce XY .

Problém 3

Je dán čtverec $ABCD$, přímka l a bod P . Sestrojte úsečku XY takovou, že bod X leží na hranici čtverce $ABCD$, bod Y na přímce l a bod P dělí úsečku XY v poměru $2:1$, tzn. $|XP| = 2|PY|$.

Řešení. Nyní budeme postupovat rychleji. Sestrojíme přímku l' , která je obrazem přímky l ve stejnolehlosti se středem P a koeficientem -2 (viz obrázek 6). Zbývá část řešení je obdobná jako u základního problému.

Je dobře vidět, že v centru řešení problému 3 bylo geometrické zobrazení zvané *stejnolehlost*. Polohu bodu P na úsečce XY (a později na přímce XY) můžeme libovolně měnit. Základem řešení bude stále stejnolehlost.



Obrázek 6

Problém 4

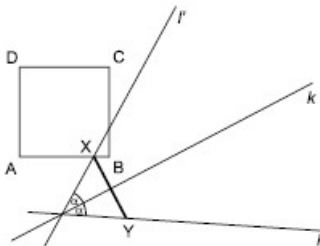
Je dán čtverec $ABCD$, přímka l , bod P a libovolné kladné reálné číslo a . Sestrojte úsečku XY tak, že bod X leží na hranici čtverce $ABCD$, bod Y na přímce l a pro bod P úsečky XY platí: $|XP| = a|PY|$.

Nyní nahradíme bod P přímkou k .

Problém 5

Je dán čtverec $ABCD$, přímka l a přímka k . Sestrojte úsečku XY takovou, že bod X leží na hranici čtverce $ABCD$, bod Y na přímce l a přímka k je osou úsečky XY .

Řešení. Sestrojíme přímku l' , která je obrazem přímky l v osové souměrnosti s osou k . Jestliže přímka l' protne hranici čtverce $ABCD$ v bodě X , pak bod X je jedním krajním bodem hledané úsečky. Sestrojíme bodem X kolmici k přímce k a její průsečík s přímkou l označíme Y (v případě, že přímka k je kolmá k přímce l , tzn. uvažovaná kolmice je totožná s přímkou l , pro Y navíc platí $|Yk| = |Xk|$). Bod Y je druhý krajní bod hledané úsečky (viz obrázek 7).

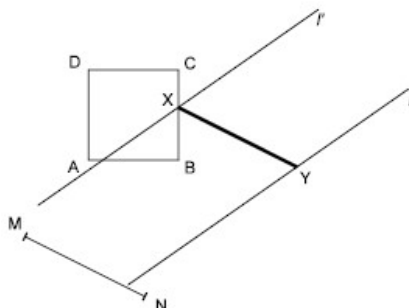


Obrázek 7

V centru konstrukce byla tentokrát *osová souměrnost*. Nyní nahradíme bod P úsečkou MN .

Problém 6

Je dán čtverec $ABCD$, přímka l a úsečka MN . Sestrojte úsečku XY takovou, že bod X leží na hranici čtverce $ABCD$, bod Y na přímce l a úsečka MN je s úsečkou XY shodná a rovnoběžná.



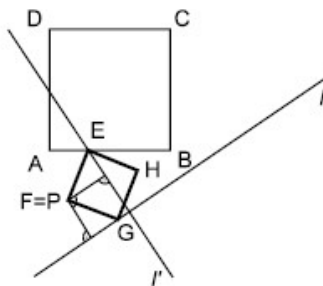
Obrázek 8

Řešení. Sestrojíme přímku l' , která je obrazem přímky l v posunutí určeném vektorem \overrightarrow{MN} nebo vektorem \overrightarrow{NM} . Zbylá část konstrukce je zřejmá (viz obrázek 8).

V centru této konstrukce bylo zobrazení zvané *posunutí*. Doposud jsme měnili zadané prvky a podmínky základního problému. Ukažme, že je možné změnit i požadovaný objekt.

Problém 7

Je dán čtverec $ABCD$, přímka l a bod P . Sestrojte čtverec $EFGH$ takový, že bod E leží na hranici čtverce $ABCD$, bod G leží na přímce l a bod F je totožný s bodem P .



Obrázek 9

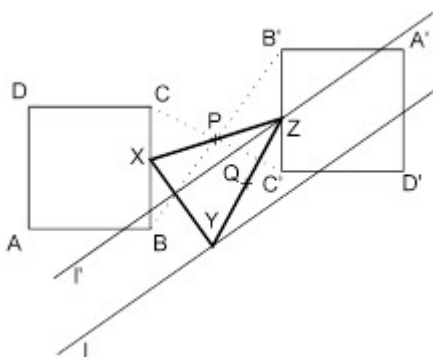
Řešení. Sestrojíme přímku l' , která je obrazem přímky l v otočení se středem P o pravý úhel (proti nebo po směru pohybu hodinových ručiček). Zbylá část konstrukce je zřejmá (viz obrázek 9).

V centru této konstrukce bylo zobrazení zvané *otočení*. V posledním problému změním jak zadané prvky a podmínky, tak i požadovaný objekt.

Problém 8

Je dán čtverec $ABCD$, přímka l a dva body Q, P . Sestrojte trojúhelník XYZ takový, že bod X je na hranici čtverce $ABCD$, bod Y je na přímce l a body P, Q jsou po řadě středy stran XZ a YZ .

Řešení. Sestrojíme čtverec $A'B'C'D'$, který je obrazem čtverce $ABCD$ ve středové souměrnosti se středem P a přímkou l' , která je obrazem přímky l ve středové souměrnosti se středem Q . Vrchol Z musí ležet na obou těchto obrazech. Další část konstrukce je již zřejmá (viz obrázku 10). Je vidět, že jsme dvakrát použili středovou souměrnost, neboli dvakrát jsme použili postup obsažený v základním problému.



Obrázek 10

V centru tohoto řešení bylo použití dvou *středových souměrností*.

Jiný způsob řešení můžeme získat, když si uvědomíme, že PQ je střední příčka v hledaném trojúhelníku XYZ . Strana XY je proto dvakrát delší než úsečka PQ a navíc je s ní rovnoběžná. Bod X tak můžeme získat jako průsečík hranice čtverce $ABCD$ a přímky q , která vznikne posunutím přímky l o vektor $2\overrightarrow{QP}$ nebo $2\overrightarrow{PQ}$. Další část konstrukce je již zřejmá.

V centru tohoto druhého řešení je *posunutí a středové souměrnosti*.

Poznámka. Tady se dá hezky ukázat, že složením dvou středových souměrností (zde se středy Q, P) vznikne posunutí (zde určené vektorem $2\overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{YX}$). Demonstrujme toto tvrzení pomocí vrcholů trojúhelníka XYZ (viz obrázek 10). Obrazem bodu Y ve středové souměrnosti se středem Q je bod Z a obrazem bodu Z ve středové souměrnosti se středem P je bod X . Složením těchto středových souměrností v daném pořadí dostaneme posunutí, které převádí bod Y do bodu X .

Čtenář si může vytvořený hrozen problémů rozšířit o další více či méně podobné problémy. Může si však také vybrat jen některé z uvedených problémů nebo si je může podle potřeby jinak seřadit. Pokud např. učitel se studenty probral jenom shodnosti, pak bude muset vypustit problémy 3 a 4, které se řeší pomocí stejnolehlosti.

Dva různé způsoby řešení problému 8 pěkně ukazují, že i při vytváření hroznů problémů je možné některé problémy řešit různě. Při nalezení různých metod řešení určitého problému je občas vhodné tyto metody porovnat.

L i t e r a t u r a – R e f e r e n c e s

- [1] Cofman, J.: *What to Solve?* New York, Oxford University Press, 1990.
- [2] Frobisher, L. and writing team: *Maths Investigation*. Oxford, Heinemann, 2003.
- [3] Kopka, J.: *Isolated and Nonisolated Problems*. In: *Teaching of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press, 1992.
- [4] Kopka, J.: *New Approachs to Problems and Investigation in School Mathematics*. In: *Selected Topics from Mathematical Education*, Department of Teacher Education University of Oslo, 1996.
- [5] Kopka, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem, Acta universitatis Purkynianae 40, 1999.
- [6] Kopka, J.: *Ako riešiť matematické problémy*. Ružomberok, VERBUM, 2010.
- [7] Kopka, J., Feissner, G.: *How to Penetrate into Mathematics Actively*. In: *Matematyka VIII*. Czestochowa, WSP.
- [8] Kopka, J.: *Umění řešit matematické problémy*. Praha, HAV, 2013.
- [9] Polya, G.: *How to Solve It?* Princeton, Princeton University Press, 1973.
- [10] Wittmann, E.: *Complementary Attitudes in Problem Solving*. In: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 4., 1971.

Adresa autora:

Přírodovědecká fakulta Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem,
 Pasteurova 3632/15, 400 96 Ústí nad Labem
 e-mail: jan.kopka@ujep.cz

László Rátz – učiteľ géniov

Vojtech Bálint

Abstract [László Rátz – teacher of geniuses]: When we say “he was a mathematician”, we usually mean someone who has contributed to mathematics as a scientific discipline. In this sense, Rátz was not a mathematician, so he is less well known in the Slovak and Czech mathematical communities. However, he was undoubtedly one of the best high school mathematics professors, who taught at perhaps the best high school, so during his 35-year career he taught many brilliant students as well many excellent Hungarian mathematics teachers. They passed on this quality in Slovakia in the interwar and post-war period. Let us remember this teacher on the occasion of the 90th anniversary of his death.

Key words: Rátz, mathematician, teacher

Súhrn: Keď povieme „bol to matematik“, obvykle máme na mysli niekoho, kto prispel k matematike ako vedeckej disciplíne. V tomto zmysle Rátz matematik nebol, preto je v slovenskej aj českej matematickej komunite menej známy. Bol však nepochybne jedným z najlepších stredoškolských profesorov matematiky, ktorý učil na možno najlepšej strednej škole, a teda počas svojej 35-ročnej kariéry aj mnoho geniálnych žiakov. A týka sa to tiež vynikajúcich maďarských učiteľov matematiky, ktorí na Slovensku v medzivojnovom ale aj povojnovom období odovzdávali túto kvalitu ďalej. Pripomeňme si teda tohto učiteľa pri príležitosti 90 rokov od jeho smrti.

Kľúčové slová: Rátz, matematik, učiteľ

MESC: A30, A50

László Rátz sa narodil 9. apríla 1863 v meste Sopron. Základnú aj strednú školu absolvoval v štátnej škole vo svojom rodnom meste, ale posledné dva ročníky pred maturitou absolvoval na miestnom evanjelickom lýceu, pretože maturita na jeho pôvodnej škole by mu neumožnila študovať na ktorejkoľvek univerzite.

V Soproni na lýceu Rátza učil matematiku János István Renner obávaný učiteľ, ktorý často vyučoval v otázkach, Sokratovskou metódou, a neraz aj Sokratovskou iróniou. S látkou postupoval radšej pomaly, aby všetci jeho žiaci získali dobré základy. Na hodinách udržoval priam vojenskú disciplínu, ale napriek týmto vlastnostiam bol rešpektovaný, ba až obľúbený, pretože bol spravodlivý a odborne mimoriadne erudo-

vaný. A práve to si žiaci (v tej dobe) vážili najviac. Táto charakteristika sa v nemalej miere podobá na to, ako neskôr spomínali na Rátza – učiteľa jeho slávni žiaci.¹ Je to v podstate prirodzené, lebo Rátz odovzdával to, čo ako žiak pochytil od svojho učiteľa.

Rátz po maturite (1882) študoval v rokoch 1883 – 87 na Univerzite v Budapešti (dnes ELTE). Po absolvovaní 4 ročníkov svojej štúdiá v Budapešti prerušil a od 8. októbra 1887 do 7. augusta 1888 študoval filozofiu na Berlínskej univerzite, potom od 31. októbra 1888 prírodné vedy v Štrasburgu. Od septembra 1889 strávil jeden rok ako adept učiteľstva na Hlavnom prípravnom gymnáziu Budapeštianskej Univerzity. Po absolvovaní pedagogických a odborných skúšok získal v novembri 1890 diplom učiteľa predmetov matematika a fyzika.



László Rátz

Od 1. septembra 1890 Rátz pôsobil na Hlavnom evanjelickom gymnáziu augsburského vyznania v Budapešti ako zastupujúci profesor, potom od 1. septembra 1892 ako riadny profesor. Učil matematiku a deskriptívnu geometriu. Škola sa v roku 1904 presťahovala do novej budovy v mestskej časti Városligeti fasor a stala sa všeobecne známou a slávnou pod názvom Fasori gymnázium. V roku 1909 Rátza zvolili za riaditeľa tohto gymnázia a z titulu funkcie sa automaticky stal členom tak Cirkevnej, ako aj Školskej rady. Aj keď funkčné obdobie riaditeľa bolo 6 rokov, Rátz po 5 rokoch abdikoval na túto funkciu. Spôsobil tým všeobecné prekvapenie, lebo tak učiteľský zbor ako aj nadriadené orgány boli maximálne spokojné s jeho riadiacou prácou. Rátz sa však chcel naplno venovať len učeniu a podľa jeho vlastných slov funkcia riaditeľa mu odoberala príliš veľa energie. Jeho spolupracovníci charakterizovali situáciu tak, že Rátz síce prestal byť riaditeľom, ale stále zostal ich vodcom, pretože vo veciach vyučovania sa jeho názor už dávno stal určujúcim. Prejavilo sa to okrem iného aj tak, že po jeho abdikácii ho menovali doživotným čestným riaditeľom gymnázia a tiež doživotným čestným členom Cirkevnej rady.

Rátz bol mimoriadne všestranný. Ako turista navštívil nórske fjordy a prešiel aj ľadovce v priesmyku Bernina, vyše 15 rokov viedol spevácke a hudobné teleso gymnázia a usporadúval výlety so svojimi žiakmi.²

¹Rátz veľmi často používal rýchlo položený sled otázok, ktoré mal mimoriadne dobre premyslené a pripravené, ale nepoužíval Sokratovskú iróniu.

²Vo svojom ručne písanom životopise starostlivo uviedol všetky miesta, ktoré so svojimi žiakmi navštívil: Fiume (dnes Rijeka v Chorvátsku), Pula, Triest, jaskyňa v Adelsbergu (dnes Postojna v Slovinsku), Benátky, Florencia, Pisa, Szeged, Temesvár, Košice, Zádielska dolina, Dobšiná, Krásna Hôrka,

Všetkým svojim žiakom bol k dispozícii v podstate nepretržite, ale obzvlášť s veľkým nasadením sa venoval tým mimoriadne nadaným. Mal totiž schopnosť rozpoznať nevidaný talent. Jancsimu (Neumannovi) dával mimoriadne hodiny, za ktoré nevezal peniaze od Neumannovho otca, ktorý bol bankárom, Jencimu (Wignerovi) požičiaval matematické knihy, ktorých obsah potom na ďalšom stretnutí spolu podrobne prebrali. Keď si Rátz myslel, že už nedokáže týmto výnimočným študentom nič nové z matematiky povedať, urobil to, čo by spravil málokto stredoškolský profesor: požiadala dvoch univerzitných profesorov, Józsefa Kürscháka (1864–1933) a Mihály Fekete (1886–1957), aby sa týmto študentom venovali. Keď boli Wigner a Neumann už vo vyšších ročníkoch gymnázia, tak ich Rátz neraz pozval v sobotu popoludní do kaviarne, kde si dali kávičku v spoločnosti univerzitných profesorov (Beke, Szegő, Fekete), čo bolo pre mladých študentov obzvlášť veľké vyznamenanie.



Fasori v roku 1905

Keď si Rátz myslel, že už nedokáže týmto výnimočným študentom nič nové z matematiky povedať, urobil to, čo by spravil málokto stredoškolský profesor: požiadala dvoch univerzitných profesorov, Józsefa Kürscháka (1864–1933) a Mihály Fekete (1886–1957), aby sa týmto študentom venovali. Keď boli Wigner a Neumann už vo vyšších ročníkoch gymnázia, tak ich Rátz neraz pozval v sobotu popoludní do kaviarne, kde si dali kávičku v spoločnosti univerzitných profesorov (Beke, Szegő, Fekete), čo bolo pre mladých študentov obzvlášť veľké vyznamenanie.

V roku 1894 Dániel Arany (1863–1945), mladý učiteľ gymnázia v Győri podľa vzoru časopisu *Mathematikai Lapok* vydávaného Maďarskou matematickou spoločnosťou začal úplne sám vydávať časopis *KöMaL* (*Középiskolai Matematikai Lapok*, teda Stredoškolské matematické listy). Jeho cieľom bolo „dať do rúk žiakov aj učiteľov matematiky obsahovo bohatú zbierku príkladov.“³

V roku 1896 začal Arany učiť v Budapešti a o vydávanie časopisu požiadali najuznávanejšieho stredoškolského profesora, teda Rátza. Na Rátzovu žiadosť však Arany pokračoval ako hlavný spolupracovník časopisu. Rátz zaviedol niektoré zmeny a od roku 1896 až po rok 1914 redigoval a vydával tento časopis, pričom mu venoval enormne veľa času a nemálo vlastných financií. Ukázalo sa, že jeho práca mala neoceniteľný význam a aj dlhodobý dosah – spomínal sa dokonca tzv. maďarský matematický a prírodovedecký zázrak. Do riešenia vypísaných úloh sa totiž zapojil veľký

Banská Štiavnica, Kremnica a na plachtenci oboplávali Balaton. Škola finančne podporovala výdaje chudobnejších študentov.

³Dániel Arany vyštudoval Univerzitu v Budapešti, potom pracoval ako asistent na lesníckej akadémii Selmezbánya (dnes Banská Štiavnica). V rokoch 1893–96 pracoval ako stredoškolský profesor v Győri a potom v Budapešti. Dnes je po ňom pomenovaná veľmi kvalitná súťaž pre žiakov 1. a 2. ročníka gymnázií. Napísal viacero kvalitných stredoškolských učebníc a tiež články o poisťovaní, o Simsonovej priamke a z teórie pravdepodobnosti. Zomrel spolu so svojou manželkou v r. 1945 v ghetto pri útoku na Budapešť. Ešte pred odchodom do ghetta stihol venovať svoju veľkú a veľmi cennú odbornú knižnicu Maďarskej matematickej spoločnosti.

počet budúcich špičkových matematikov, fyzikov, prírodovedcov a inžinierov, pričom mnohí z nich sa vyjadrili tak, že práve KöMaL ich naučil rozmyšľať a nebyť KöMaL-u, určite by robili v živote niečo iné. Na základe nižšie uvedeného zoznamu si dovoľíme dodať, že pre svetovú vedu by to bola škoda.⁴

Plánovaný cieľ vydať kvalitnú zbierku príkladov splnil Rátz aj tým, že knižne vydal vynikajúco spracované príklady z prvých 10 ročníkov KöMaL-u, a to Algebru v roku 1904 a Geometriu v roku 1905.⁵

Ukážka geometrických príkladov KöMaL spred vyše 120 rokov:

Príklad 1. V danom pravouhlom trojuholníku ABC zostrojte bod N tak, aby platilo $|\sphericalangle NAB| = |\sphericalangle NBC| = |\sphericalangle NCA|$. (KöMaL, november 1895, určená pre 14–15 ročných, ľahká.)

Príklad 2. Do gule s objemom V vpišeme pravidelný štvorsten, do neho guľu, do neho zase štvorsten a tak ďalej až do nekonečna. Vypočítajte súčet objemov všetkých guľí a tiež súčet objemov všetkých pravidelných štvorstenov. (KöMaL, máj 1896, úloha č. 198, určená pre maturujúci ročník, stredná ťažnosť.)

Príklad 3. Daný je trojuholník ABC a ľubovoľný bod E . Priamky AE , BE , CE pretínajú strany trojuholníka postupne v bodoch A' , B' , C' . Dokážte, že priesečníky C'' , A'' , B'' priamok AB a $A'B'$, BC a $B'C'$, CA a $C'A'$ ležia na jednej priamke. (KöMaL, september 1897, úloha č. 391, určená pre 16-17 ročných, ťažká.)

⁴Skrátený zoznam najvýznamnejších riešiteľov úloh KöMaL-u po 2. svetovú vojnu: Lipót Fejér (1880 – 1959) – matematická analýza, Frigyes Riesz (1880 – 1956) – funkcionálna analýza, Tódor Kármán (1881 – 1963), známy pod menom Theodor von Kármán – inžinier, teória prúdenia, Dénes König (1884 – 1944) – autor prvej monografie z teórie grafov, Alfréd Haar (1885 – 1933) – funkcionálna analýza, Marcel Riesz (1886 – 1969) – funkcionálna analýza, Jenő Wigner (1902 – 1995) – Nobelova cena za fyziku, János Neumann (1903 – 1957) – matematik, fyzik a tvorca moderných počítačov (podľa mnohých nositeľov Nobelových cien za fyziku mohol a mal za svoj vedecký prínos dostať tri Nobelove ceny, len pre pomalosť ich udeľovania by musel žiť dlhšie), Ferenc Kárteszi (1907 – 1989) – geometer, Ede Teller (1908 – 2003) – tvorca vodíkovej bomby, Pál Turán (1910 – 1976) – matematik, György Szekeres (1911 – 2005) – chemický inžinier, spolu s Erdősom spoluautor slávnej kombinatorickej vety z roku 1935, Tibor Gallai (1912 – 1992) – matematik, György Hajós (1912 – 1972) – matematik, Pál Erdős (1913 – 1995) – matematik, Béla Szökefalvi-Nagy (1913 – 1998) – matematik, János Surányi (1919 – 2006) – matematik, Imre Lakatos (Lipschitz) (1922 – 1974) – matematik, János Harsányi (1920 – 1995) – Nobelova cena za ekonómiu (ale rozvinul aj teóriu hier). Medzi úspešnými riešiteľmi boli aj žiaci z Lučenca (prvý ročník 1894 vyhral Mihály Seidner z Lučenca), Prešova, Nitry, Levoče, Nových Zámkov, Praha...

⁵L. Rátz, A Matematikai Gyakorlókönyv, A Középiskolai Matematikai Lapok tíz évfolyamában megjelent feladatok gyűjteménye, [Zbierka úloh z príkladov publikovaných v prvých 10 ročníkoch KöMaL] I. kötet: Algebra, Franklin Társulat, Budapest 1904; II. kötet: Geometria, Franklin Társulat, Budapest 1905.

V roku 1914 časopis zanikol, obnovil ho až v roku 1925 Andor Faragó, ktorý predtým spolupracoval s Rátzom. Do práce v tomto obnovenom časopise sa ale Rátz už nezapojil.

V dôsledku celoeurópskych snáh o jednotnú platformu prírodovedného vzdelávania sa otázka modernizácie vyučovania stala aktuálnou aj v Maďarsku. V tvorbe nových stredoškolských osnov sa angažovali a veľký podiel práce urobili mnohí z najpoprednejších matematikov tej doby, napr. Henri Poincaré a Felix Klein. V roku 1906 bola preto aj v Maďarsku zvolená reformná komisia za matematiku, ktorej predsedom sa stal univerzitný profesor Manó Beke (1862 – 1946), tajomníkom Rátzov gymnaziálny kolega (fyzik) Sándor Mikola (1871 – 1945), a tretím členom komisie sa stal László Rátz. Ako oficiálny člen tejto komisie sa zúčastnil konferencií ICMI (International Commission on the Teaching of Mathematics), ktoré sa konali 18. – 21. septembra 1911 v Miláne, 21. – 27. augusta 1912 v Cambridge (v rámci svetového kongresu matematikov) a 1. – 4. apríla 1914 v Paríži. Neskôr sa ukázalo, že práve Rátz odviezol obrovský kus práce, pretože sa schválili a používali učebné plány, ktoré on vypracoval a používal na svojej škole už od prvých rokov XX. storočia. V roku 1910 ho francúzske Ministère de l' instruction publique et des beaux-arts uctilo titulom *Officier d'Académie*⁶.

V spoluautorstve s Mikolom vznikla učebnica L. Rátz, S. Mikola *Az infinitezimális számítás elemei a középiskolában* [Prvky infinitezimálneho počtu na strednej škole], I. vydanie: Franklin Társulat, Budapest 1910; II. vydanie: Franklin Társulat, Budapest 1914. Zaradenie diferenciálneho a integrálneho počtu do osnov malo nesmierny význam aj pre výučbu fyziky, pretože bolo možné oveľa presnejšie a efek-

⁶Je pozoruhodné, že táto globalizácia začala už v roku 1893. Téza reformy: Nech je výučba matematiky taká, aby si študent uvedomil nesmierny kultúrny význam matematiky. V takom prípade je nádej, že matematické myslenie sa dostane aj do každodenného spoločenského života. Maturant musí vidieť prepojenie matematiky so životom, s rôznymi vedami a s celkovým chápaním sveta, preto musí byť matematika pretkaná meraniami a praktickými skúsenosťami. Dôležité je počítanie naspamäť a tréning odhadov. (Pre lepšie pochopenie odporúčam čitateľovi kapitolu 0 z knihy Alex Bellos: *Alexova dobrodružství v zemi čísel*, Dokořán s. r. o., 2015. Čitateľ sa okrem iného dozvie, že intuitívne sa u človeka vyvinuli odhady podielu, ale nie rozdielu, pričom aj podiel vnímajú mnohí len na veľmi nízkej úrovni, teda pre malé počty: miliónár aj miliardár sú proste veľmi bohatí, ale málokoho napadne, že ten druhý má 1000-krát viac peňazí, ako ten prvý.) Od prvej triedy gymnázií treba rozvíjať samovoľne získané poznatky a predstavy žiakov s dôrazom na funkčné myslenie, ktoré má byť hlavnou niťou. Učiteľ sa musí snažiť o vytvorenie jasných pojmov. Už v 2. a 3. triede gymnázií presadzovali pojem zlomku, ktorý je intuitívne deťom jasný. Už sem zaradili aj jednoduché grafické vyjadrenia. V 4. triede pridali praktické funkcie – hodnota cenných papierov v závislosti na čase, čas a teplota, tlak a zrážky, percento úmrť v závislosti od veku. V 5. triede sa riešili kvadratické nerovnosti, v 6. triede percentuálne výnosy a výnosy z výnosov, logaritmické a trigonometrické funkcie, do 7. triedy bola zaradená syntetická aj analytická geometria a tiež základy diferenciálneho počtu, do 8. triedy integrálny počet s dôrazom na výpočet objemu a obsahu objektov súvisiacich s guľou.

tívnejšie pracovať s pojmami rýchlosť, zrýchlenie, potenciál... Ukážka príkladov zo zbierky Rátz-Mikola z roku 1910:

Príklad 1. Do rovnostranného trojuholníka vpište rovnostranný trojuholník minimálneho obsahu.

Príklad 2. Z plechu chceme urobiť valcovitú nádobu s objemom 1 liter. Aké majú byť jej rozmery, aby sme spotrebovali čo najmenej plechu?

Príklad 3. Ktorý z valcov vpísaných do gule má maximálny objem? Určte pomer objemu gule a toho valca s maximálnym objemom!

Príklad 4. Zo štyroch rovnakých dosiek treba urobiť odvodňovací kanál maximálneho objemu. Dve dosky musia byť zvislé. Aký by mal byť uhol zvyšných dvoch?

V roku 1923 pri stom výročí založenia školy sa bývalí absolventi Fasori gymnázium rozhodli, že „opierajúc sa o storočnú tradíciu humanistického ducha tohto evanjelického gymnázia, s cieľom duševne aj hmotne podporovať žiakov gymnázia aj po ich odchode na univerzity“ založia Spolok bývalých absolventov. Pán profesor Rátz sa stal podpredsedom Spolku. O dva roky neskôr, po svojom odchode do dôchodku, chodieval Rátz za bývalými kolegami a mal obzvlášť veľkú radosť, že sa mohol cez Spolok často stretávať so svojimi bývalými žiakmi a tešiť sa z ich úspechov. Začiatkom septembra 1930 cestou z Karlových Varov ho postihla náhla mozgová príhoda. Zomrel v sanatóriu v Budapešti 30. septembra 1930.



*Wignerova pracovňa,
fotka Rátza je na stene uprostred*

Takto sa vyjadril Wigner, ale podobné vyjadrenia mali všetci Rátzovi žiaci: „Fasori gymnázium bola zrejme najlepšia škola v Maďarsku a určite patrila k najlepším na svete. Západné školy učili separované vedomosti, na mojej strednej škole boli vedomosti z jednotlivých predmetov silne previazané. Jej učitelia boli mimoriadne erudovaní a vyučovali s neuveriteľným nadšením. A vôbec najlepší učiteľ, ktorý ma kedy učil, bol László Rátz, ktorého fotku mám stále pred sebou v mojej pracovni.“

Literatúra – References

- [1] Dobos, K., Gazda, I., Kovács, L.: *A Fasori csoda* [Zázrak Fasori] (Rázt László – Mikola Sándor – Wigner Jenő – Neumann János), Budapest, 2002.
- [2] Némethné, P., K.: *Rázt László tanár úr* [Pán profesor László Rázt], Studia Physica Saviariensia XIII, Szombathely 2006. (Táto štúdia obsahuje aj Ráztov vlastnoručne písaný životopis z roku 1920.)

Pod'akovanie: Článok bol podporený grantom GAČR registračné číslo 18-00449S *Dopad první světové války na utváření a proměny vědeckého života matematické komunity.*

Adresa autora:

Nám. E. Fullu 21, 010 08 Žilina

e-mail: vojtech.balint@gmail.com

Zadania úloh

36. ročníka Olympiády v informatike

Informácie a pravidlá

Pre koho je súťaž určená?

Do kategórie B sa smú zapojiť len tí žiaci základných a stredných škôl, ktorí ešte ani v tomto, ani v nasledujúcom školskom roku nebudú končiť strednú školu.

Do kategórie A sa môžu zapojiť všetci žiaci (základných aj) stredných škôl.

Odovzdávanie riešení domáceho kola

Riešitelia domáceho kola odovzdávajú riešenia sami, v elektronickej podobe, a to priamo na stránke olympiády: <http://oi.sk/>.

Riešenia kategórie A je potrebné odovzdať najneskôr 15. novembra 2020.

Riešenia kategórie B je potrebné odovzdať najneskôr 30. novembra 2020.

Priebeh súťaže

Za každú úlohu domáceho kola sa dá získať od 0 do 10 bodov. Na základe bodov domáceho kola stanoví Slovenská komisia OI (SK OI) pre každú kategóriu bodovú hranicu potrebnú na postup do *krajského kola*. Očakávame, že táto hranica sa bude približne rovnať *tretine maximálneho počtu bodov*.

V krajskom kole riešitelia riešia štyri teoretické úlohy, ktoré môžu tematicky nadväzovať na úlohy domáceho kola. V kategórii B súťaž týmto kolom končí.

V kategórii A je približne najlepších 30 riešiteľov krajského kola (podľa počtu bodov, bez ohľadu na kraj, v ktorom súťažili) pozvaných do *celoštátneho kola*. V celoštátnom kole účastníci prvý deň riešia teoretické a druhý deň praktické úlohy. Najlepší riešitelia sú vyhlásení za víťazov. Približne desať najlepších riešiteľov následne SK OI pozve na týždňové výberové sústredenie. Podľa jeho výsledkov SK OI vyberie družstvá pre Medzinárodnú olympiádu v informatike (IOI) a Stredoeurópsku olympiádu v informatike (CEOI).

Ako majú vyzerat' riešenia úloh?

V praktických úlohách je vašou úlohou vytvoriť program, ktorý bude riešiť zadanú úlohu. Program musí byť v prvom rade korektný a funkčný, v druhom rade sa snažte aby bol čo najefektívnejší.

V kategórii B môžete použiť ľubovoľný programovací jazyk.

V kategórii A musíte riešenia praktických úloh písať v jednom z podporovaných jazykov (napr. C++, Pascal alebo Java). Odovzdaný program bude automaticky otestovaný na viacerých vopred pripravených testovacích vstupoch. Podľa toho, na koľko z nich dá správnu odpoveď, vám budú pridelené body. Výsledok testovania sa dozviete krátko po odovzdaní. Ak váš program nezíska plný počet bodov, budete ho môcť vylepšiť a odovzdať znova, až do uplynutia termínu na odovzdávanie.

Presný popis, ako majú vyzerat' riešenia praktických úloh (napr. realizáciu vstupu a výstupu), nájdete na webstránke, kde ich budete odovzdávať.

Ak nie je v zadaní povedané ináč, riešenia teoretických úloh musia v prvom rade obsahovať *podrobný slovný popis použitého algoritmu, zdôvodnenie jeho správnosti* a diskusiu o efektívnosti zvoleného riešenia (t. j. posúdenie časových a pamäťových nárokov programu). Na záver riešenia uveďte program. Ak používate v programe netriviálne algoritmy alebo dátové štruktúry (napr. rôzne súčasti STL v C++), súčasťou popisu algoritmu musí byť dostatočný popis ich implementácie.

Usporiadateľ súťaže

Olympiádu v informatike (OI) vyhlasuje *Ministerstvo školstva SR* v spolupráci so *Slovenskou informatickou spoločnosťou* (odborným garantom súťaže) a *Slovenskou komisiou Olympiády v informatike*. Súťaž organizuje *Slovenská komisia OI* a v jednotlivých krajoch ju riadia *krajské komisie OI*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia informatiky.

Celoštátne kolo OI, tlač materiálov a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou OI.

Covid-19

Krajské kolo súťaže je plánované na 19. januára 2021 a celoštátne na 24. – 27. marca 2021. V súčasnosti ešte nevieme zaručiť, či tieto kolá prebehnú tradičnou prezenčnou formou.

Slovenská komisia OI dôsledne sleduje aktuálny vývoj epidemiologickej situácie a v prípade potreby mu prispôsobí organizáciu súťaže. Domáce kolo súťaže určite prebehne v tradičnej podobe, keďže naň v súčasnosti platné opatrenia nemajú žiaden vplyv. O presnej forme a spôsobe organizácie ďalších kôl súťaže budú postupujúci súťažiaci informovaní priebežne.

A-I-1 Zatopené mesto

Toto je praktická úloha. Pomocou webového rozhrania odovzdajte funkčný, odladený program.

Kocúrkovom sa prehnala búrka a časť mesta zatopila. Kubík sa teraz potrebuje dostať zo školy domov. Plávanie zatopenými časťami mesta mu nerobí problém, ale nechce prechladnúť. Presnejšie, nesmie byť príliš dlho mokrý vonku – keď už sa raz namočí, potrebuje sa ponáhľať domov.

Kocúrkovo pozostáva z n križovatiek (očíslovaných 0 až $n-1$) a m obojsmerných ulíc. Každá ulica spája dve križovatky. Prejdenie ľubovoľnej ulice trvá 1 minútu.

Kubík sa potrebuje dostať z križovatky 0 na križovatku $n-1$. Niektoré križovatky (možno aj 0 a/lebo $n-1$) sú zatopené vodou.

Ďalej je dané číslo k , hovoríacie, že akonáhle sa Kubík prvýkrát namočí, musí sa dostať domov za najviac k minút. (Např. ak $k=1$, tak na Kubíkovej ceste domov môžu byť zatopené najviac posledné dve križovatky, pričom poslednou je určite križovatka číslo $n-1$.)

Zistite, či sa Kubík vie dostať domov, a ak áno, ako najrýchlejšie to vie spraviť.

Formát vstupu a výstupu

V prvom riadku vstupu sú čísla n , m a k . Druhý riadok obsahuje čísla z_0, z_1, \dots, z_{n-1} , pričom $z_i = 0$ ak je križovatka i suchá a $z_i = 1$ ak je zatopená. Zvyšok vstupu tvorí m riadkov, v každom sú čísla dvoch križovatiek spojených ulicou. Každá ulica spája dve rôzne križovatky. Každá dvojica križovatiek je spojená najviac jednou ulicou.

Vypíšte jeden riadok a v ňom jedno celé číslo: ak sa Kubík vie požadovaným spôsobom dostať domov, vypíšte najmenší počet minút, za ktorý to ide, inak vypíšte -1 .

Obmedzenia a hodnotenie

Vo všetkých vstupoch platí $n \geq 2$, $m \geq 0$ a $1 \leq k \leq n$.

sada	body	n	m	k	ďalšie obmedzenia
#1	2	10	45	10	
#2	1	10^5	10^6	1	
#3	1	10^5	10^6	10^5	$m \cdot k \leq 10^6$
#4	1	10^5	10^6	10^5	najviac 100 zatopených križovatiek
#5	1	10^5	10^6	10^5	najviac 100 zatopených križovatiek
#6	4	10^5	10^6	10^5	

Odozdané riešenie bude otestované na šiestich sadách vstupov. Body a maximálne hodnoty n , m , k pre ne udávame v predchádzajúcej tabuľke.

Príklady

vstup

```
5 4 2
0 1 0 0 0
0 1
1 2
2 3
3 4
```

výstup

-1

Zo školy domov vedie Kubíkovi len jedna cesta. Na križovatke 1 sa namočí a následne sa nevie dostatočne rýchlo dostať domov ($k = 2$, ale mokrému Kubíkovi to bude trvať 3 minúty).

vstup

```
5 4 1
0 0 0 1 1
0 1
1 2
2 3
3 4
```

výstup

4

Tento raz je Kubíkova cesta domov v poriadku, mokrý bude len minútu. Celkový čas cesty sú 4 minúty.

vstup

```
7 7 1
0 1 0 0 1 0 0
0 1
1 2
2 6
0 3
3 5
4 5
4 6
```

výstup

4

Zo školy domov vedú dve cesty. Cesta 0-1-2-6 je kratšia, ale nevyhovuje – Kubík bude prídlho mokrý vonku. Musí preto ísť dlhšou cestou: 0-3-5-4-6.

A-I-2 Román

Toto je praktická úloha. Pomocou webového rozhrania odovzdajte funkčný, odladený program.

Roman práve dopísal svoj prvý román. Keď vydavateľ uvidel rukopis, zalomil rukami a povedal, že je toho tak veľa, že to budú musieť rozdeliť na viac kníh a vydať postupne. Tu ale vystala závažná otázka: ako presne Romanov román rozdeliť?

Román má n kapitol. Každá z nich je veselá, smutná, alebo neutrálna. Vydavateľ si myslí, že je najlepšie, keď je kniha vyvážená – teda keď veselých kapitol obsahuje rovnako veľa ako smutných.

Vašou úlohou je rozdeliť celý Romanov román na knihy tak, aby čo najviac z nich bolo vyvážených.

Formát vstupu a výstupu

V prvom riadku vstupu je číslo n . V druhom riadku vstupu je postupnosť n čísel popisujúca jednotlivé kapitoly: 1 je veselá, 0 je neutrálna a -1 je smutná kapitola. Kapitoly sú dané v správnom poradí a toto poradie nesmiete meniť.

Na výstup vypíšete jediný riadok a v ňom jedno číslo: najväčší dosiahnuteľný počet vyvážených kníh.

Obmedzenia a hodnotenie

Odovzdané riešenie otestujeme na štyroch sadách vstupov. Body a maximálne hodnoty n pre ne sú nasledovné:

sada	body	n	d'alsie obmedzenia
# 1	1	2	
# 2	2	500	žiadna kapitola nie je smutná
# 3	3	500	
# 4	4	10^6	

Príklady

vstup	výstup
4 -1 -1 1 1	1

Nevieme vyrobiť viac ako jednu vyváženú knihu. Sú dva rôzne optimálne spôsoby delenia: buď dáme všetky kapitoly do jednej knihy, alebo román rozdelíme takto:

-1 | -1 1 | 1.

vstup	výstup
10 0 1 1 0 -1 -1 -1 -1 1 -1	3

Jedno optimálne delenie na knihy: 0 | 1 1 0 -1 -1 | -1 -1 | 1 -1. Tretia kniha nie je vyvážená ale zvyšné tri sú. Viac ako tri vyvážené knihy sa nedá dosiahnuť.

A-I-3 Celta

Toto je teoretická úloha. Pomocou webového rozhrania odovzdajte súbor vo formáte PDF, obsahujúci riešenie, spĺňajúce požiadavky uvedené v pravidlách.

Na trhovisku stojí n stánkov v jednom rade. Ich priečelia sú rôzne široké: i -ty stánok zľava má a_i centimetrov.

Máme celtu obdĺžnikového tvaru, ktorou by sme chceli stánky zakryť pred dažďom. Celta má práve takú šírku, aby dosiahla od prednej hrany stánkov po zadnú. Dĺžka cely je k centimetrov. Celtu nie je dovolené nijak deliť.

Súťažná úloha

Zadané sú čísla a_1, \dots, a_n a číslo k . Chceme úplne zakryť čo najviac stánkov. Navrhnite čo najefektívnejší algoritmus, ktorý nájde ľubovoľné jedno optimálne riešenie.

Formát vstupu a výstupu

V prvom riadku vstupu sú kladné celé čísla n a k . V druhom riadku vstupu sú medzerou oddelené kladné celé čísla a_1, \dots, a_n . Môžete predpokladať, že ich súčet sa zmestí do bežnej celočíselnej premennej.

Vypíšte jeden riadok a v ňom dve čísla. Ak sa nedá zakryť žiadny stánok, vypíšte „0 0“. Ak je optimálne zakryť d stánkov začínajúc ℓ -tým zľava, vypíšte „ $d \ell$ “.

Obmedzenia a hodnotenie

Plných 10 bodov môžu získať len riešenia s optimálnou časovou zložitou. (Nezabudnite na zdôvodnenie správnosti a odhad časovej zložitosti.)

Za riešenia, ktoré efektívne vyriešia ľubovoľný vstup s $n \leq 10^6$, môžete získať do 7 bodov. Za riešenia, ktoré efektívne vyriešia ľubovoľný vstup s $n \leq 5\,000$, môžete získať najvyššie 4 body. Ľubovoľné funkčné riešenie, bez ohľadu na rýchlosť, môže dostať aspoň 2 body.

Príklady

vstup	výstup
7 600 200 100 200 300 200 200 100	3 2

Stánky číslo 2, 3 a 4 majú dokopy šírku $100 + 200 + 300 = 600$ cm, máme teda presne dosť cely na ich zakrytie. Iné tiež správne výstupy pre tento vstup sú „3 1“ a „3 5“. V oboch týchto prípadoch ide o trojicu susedných stánkov, ktoré majú dokopy len 500 cm.

vstup

3 10
100 100 100

výstup

0 0

A-I-4 Externá pamäť

Toto je teoretická úloha. Pomocou webového rozhrania odovzdajte súbor vo formáte PDF, obsahujúci riešenie, spĺňajúce požiadavky uvedené v pravidlách. K tejto úlohe patrí študijný text uvedený na nasledujúcich stranách. Odporúčame najskôr prečítať ten a až potom sa vrátiť k samotným súťažným úlohám.

V pamäti máme číslo n . Na začiatku disku máme uloženú maticu rozmerov $n \times n$. Matica je uložená po riadkoch: teda najskôr sú uložené prvky z jej prvého riadku (zľava doprava), potom prvky z druhého riadku (opäť zľava doprava), a tak ďalej. Pre jednoduchosť môžete predpokladať, že n je násobkom b (veľkosti bloku).

Podúloha A (2 body): Rozcvička: vypíšte prvky tejto matice po riadkoch.

Podúloha B (3 body): Vypíšte prvky tejto matice po stĺpcoch – teda najskôr jej prvý stĺpec zhora dole, potom druhý stĺpec zhora dole, a tak ďalej.

Podúloha C (5 bodov): Otočte celú maticu o 90 stupňov doprava. Teda napr. jej ľavý horný prvok má skončiť v pravom hornom rohu, pravý horný prvok má skončiť vpravo dole, a tak ďalej. Na konci musí byť otočená matica uložená na disku tam, kde je teraz uložená pôvodná matica.

Ak vám to pri písaní programu pomôže, môžete v tejto podúlohe predpokladať, že do pamäte sa vám zmestí až rádovo b blokov – teda že môžete použiť až $O(b^2)$ pamäte.

Študijný text: Externá pamäť

V tomto ročníku olympiády budeme pracovať s dátami, ktoré sú tak veľké, že sa nám naraz všetky nezmestia do pamäte. Budeme teda písať programy pre počítač, ktorý má internú aj externú pamäť. Tie budeme pre jednoduchosť volať *pamäť* a *disk*. Práca s diskom je omnoho pomalšia ako práca s pamäťou.

K dátam v pamäti môžeme pristupovať priamo, tak ako sme zvyknutí z bežných algoritmov. Pamäť je však obmedzená, naraz sa do nej zmestí len m údajov. Každý údaj je nejaké rozumne veľké celé číslo.¹

¹Údaj si môžete pre jednoduchosť predstavovať ako 32-bitovú celočíselnú premennú. Formálne zvykneme dovoliť do týchto premenných ukladať čísla ktorých veľkosť je nanajvýš polynomiálna od veľkosti vstupu – teda napr. číslo n^3 sa ešte do premennej zmestí ale 2^n už nie.

Disk je neobmedzene veľký. Je rozdelený na *bloky*. Každý blok obsahuje b údajov. K týmto údajom nevieme pristupovať priamo. Vieme robiť len dva typy operácií: načítať blok z disku na konkrétne miesto do pamäte a uložiť konkrétny kus pamäte ako blok na disk.

Ak nebude povedané ináč, tak jediné, čo môžete predpokladať o parametroch m a b , je, že pamäť je dostatočne veľká na to, aby sa do nej naraz zmestilo konštantne veľa blokov. Ľubovoľný program, v ktorom použijete $O(b)$ pamäte, je teda v poriadku.

Práca s diskom a iné technické detaily

Konštantu b (veľkosť bloku) poznáme a môžeme ju používať v programoch.

Na čítanie z disku budeme v programoch používať funkciu `Read(blok)`, ktorá dostane poradové číslo bloku, ktorý má načítať, načíta jeho obsah do poľa a toto pole vráti na výstupe.

Na zápis na disk budeme používať funkciu `Write(blok, pole)`, ktorá obsah daného b -prvkového poľa zapíše do daného bloku na disku.

Analýza algoritmov

Pri analýze algoritmov v tomto modeli nás budú zaujímať dva hlavné druhy zložitosti. Prvým je klasická *časová zložitosť* – počet krokov výpočtu. Druhým je *komunikačná zložitosť* – počet volaní funkcií `Read` a `Write`.

Budeme sa snažiť hľadať algoritmy, ktoré budú mať (asymptoticky) rovnakú časovú zložitosť, ako by mal optimálny algoritmus na klasickom počítači (t.j. taký, ktorý má k dispozícii neobmedzené množstvo pamäte). Samozrejme, ak máme dva takéto algoritmy, lepší z nich je ten, ktorý má (asymptoticky) menšiu komunikačnú zložitosť.

Aby sme sa nemuseli zaoberať malými patologickými prípadmi, stačí sa pri analýze algoritmov zaoberať situáciou, kde veľkosť vstupu je rádovo väčšia ako veľkosť jedného bloku.

Teda ak napríklad spravíme nanajvýš $n/b + 3$ volaní funkcie `Read`, môžeme +3 prehlásiť za zanedbateľne malé v porovnaní s n/b a konštatovať, že komunikačná zložitosť je $O(n/b)$.

Zvlášť vás ešte chceme upozorniť na programy používajúce rekúziu. Nezabudnite, že každé volanie funkcie potrebuje záznam na zásobníku, a ten sa tiež nachádza v pamäti. Pri rekurzívnych algoritmoch treba teda aj hĺbku rekúzie rátať do pamäťovej zložitosti a hlavne si treba dať pozor na to, aby ste samotnou rekúziou neminuli priveľa pamäte.

Príklad: maximum

Prácu s diskom si vyskúšame na jednom z najjednoduchších možných príkladov. V pamäti máme číslo n . Na začiatku disku máme postupnosť n kladných celých čísel. Našou úlohou je nájsť najväčšie z čísel na vstupe.

Pre názornosť explicitne pripomíname, že postupnosť na disku je rozdelená do blokov: v prvom bloku je prvých b čísel, v druhom ďalších b , a tak ďalej. Dokopy teda vstup zaberá $\lceil n/b \rceil$ blokov na disku.

Riešenie bude priamočiare: postupne po jednom prejdeme všetky bloky. Každý blok načítame do pamäte a prejdeme všetky údaje v ňom. Následne ho už nebudeme potrebovať, takže pamäť, kde bol uložený, jednoducho prepíšeme nasledujúcim blokom.

Nižšie uvádzame ukážkovú implementáciu tohto riešenia v jazyku Python. (Vo svojich riešeniach môžete použiť ľubovoľný bežný programovací jazyk, detaily použitia funkcií Read a Write si vhodne zvolíte.)

```
# v pamäti už máme:
# - premennú N obsahujúcu počet údajov na vstupe
# - konštantu B označujúcu veľkosť bloku na disku

s = 0          # počet už spracovaných blokov zo vstupu
odpoved = 0   # doterajšie maximum

while s*B < N:
    data = Read(s)          # kým sme ešte nespracovali celý vstup
    pocet = min( B, N - s*B ) # načítaj ďalší blok z disku
    for i in range(pocet):  # zisti, koľko údajov z neho ešte patrí do vstupu
        odpoved = max( odpoved, data[i] ) # prejdi tie údaje a porovnaj s doterajším maximumom
    s += 1                  # posuň sa na nasledujúci blok

print(odpoved)
```

O tomto programe vieme povedať nasledovné:

- Jeho časová zložitosť je $O(n)$, teda lineárna od veľkosti vstupu. Na každý prvok vstupu sa raz pozrieme.
- Jeho komunikačná zložitosť je presne $\lceil n/b \rceil$.
- Naraz máme v pamäti len jeden blok a konštantne veľa pomocných premenných, pamäťovú zložitosť teda máme naozaj len $O(b)$.

Príklad: test symetrie

V pamäti máme číslo n . Na začiatku disku máme postupnosť n kladných celých čísel. Našou úlohou je zistiť, či ide o palindróm – teda či táto postupnosť čítaná odzadu vyzerá rovnako ako odpredu.

Ak by n bolo násobkom b , bola by implementácia riešenia celkom príjemná: stačilo by porovnať prvý blok s posledným, potom druhý s predposledným, a tak ďalej.

So všeobecným prípadom bude o čosi väčšia oštara. Nech teda n dáva po delení b nejaký nenulový zvyšok z . Potom prvý blok chceme porovnať sčasti s poslednými z údajmi (na začiatku posledného bloku) a sčasti s predchádzajúcimi $b - z$ údajmi (na konci predposledného bloku vstupu).

Predstavme si, že máme dvoch pracovníkov. Prvý číta vstup zľava doprava, druhý zároveň rovnakým tempom sprava doľava. Vždy, keď obaja prečítajú číslo, porovnajú si ich. Takto implementujeme aj naše riešenie, s tým, že každý pracovník si vždy, keď sa mu minú čísla v pamäti, vyžiada príslušný ďalší blok z disku. Prestaneme, keď sa obaja pracovníci stretnú v strede postupnosti.

Takéto riešenie bude zjavne mať časovú zložitosť $O(n)$, pamäťovú zložitosť $O(b)$ a komunikačnú zložitosť $O(n/b)$.

Príklad: reverz postupnosti

Na záver študijného textu sa pozrieme na príklad podobný tomu predchádzajúcemu. Ako by to vyzeralo, keby sme chceli postupnosť, zadanú na vstupe, v pamäti obrátiť? Zjavne stačí robiť to isté ako v predchádzajúcom riešení, s dvoma úpravami. Namiesto porovnania si pracovníci svoje čísla vymenia. A vždy pred tým, ako by načítali ďalší blok z disku, tak najskôr do toho minulého zapíšu čísla, ktoré dostali od kolegu.

Ešte si všimnime, že musíme byť opatrní pri spracovaní stredu postupnosti, aby sme zapísali správne vyzerajúci prostredný blok.

Nižšie uvádzame jednu možnú implementáciu jednoduchšej verzie tejto úlohy. V tejto implementácii predpokladáme, že n je násobkom veľkosti bloku, a teda len reverzujeme a medzi sebou vymieňame celé bloky.

```
assert N % B == 0
pocet_blokov = N // B # N celočíselne vydelené B

# kým máme aspoň dva bloky, vymeníme a reverzneme prvý a posledný z nich
for i in range(pocet_blokov // 2):
    lavy = Read(i)
    pravy = Read(pocet_blokov-1-i)
    Write( i, reversed(pravy) )
    Write( pocet_blokov-1-i, reversed(lavy) )

# ak nám v strede zvýšil jeden blok, ten len reverzneme
if pocet_blokov % 2 == 1:
    stredny = Read( pocet_blokov // 2)
    Write( pocet_blokov // 2, reversed(stredny) )"
```

Pre úlohovú komisiu Olympiády v informatike spracovali Michal Anderle (zaba@ksp.sk) a Michal Forišek (misof@ksp.sk).

Groundwater Physics

Sós Katalin, Bartyik Tamás, Nánai László

Abstract: Our series of articles [1-5] named “Physical Processes in the Nature”, launched from 2014 have the aim to provide concrete help to teachers in integrated science education. In the series, we gather phenomena and processes that illustrate the intertwining and fundamentally unified view of physics, biology and geography. The first article explained the soil physics, the second one the physical and chemical properties of water, the third the physics of oceans, seas, the fourth the physics of lakes and the fifth the rivers. In this article, we discuss the characteristics and processes of deep waters and their explanation.

Key words: water, groundwater, hydrogeology

Súhrn: Sériou našich článkov [1-4], ktoré sme zahájili v roku 2014 sme mali v úmysle pomôcť učiteľom vyučujúcich prírodné vedy integrovaným spôsobom. V sérii článkov sme popísali javy a deje, ktoré ilustrujú prepojenie fyziky, biológie a geografie, ako aj ich jednotné chápanie vychádzajúce zo samotných základov prírodných vied. Prvý článok objasnil fyziku pôdy, druhý objasnil fyzikálne a chemické vlastnosti vody, tretí fyziku oceánov, štvrtý fyziku jazier a piaty sa venoval riekam. V predkladanom článku sa zaoberáme s charakteristikami a procesmi podzemných vôd, ktoré vysvetľujeme.

Kľúčové slová: voda, podzemná voda, hydrogeológia

MESC: M50

Groundwater

Hydrogeology is the science of groundwater, which deals with, among other things, the appearance, physical chemical characteristics of groundwater, the forces acting on them, and the movements formed by the forces.

The importance of groundwater is shown by the fact that it accounts for 21,8% of the Earth's total freshwater supply and is still an important base for use.

In terms of depth layers, a significant part of the groundwater is above a depth of 30 km, deeper, than this, the water temperature is already above the critical temperature. The components of water are still found in the outer mantle, but neither water nor his constituents are present in the inner mantle and the nucleus.

The time for the water to be reached the surface layer is best measured by using isotope techniques.

The best known way to do this is to use cosmogenic isotopes (^3H , ^{14}C), when the time to reach subsurface layer is given based on the decrease in activity relative to surface waters. But it is also possible to determine by isotopic technique whether the groundwater receives the supply from the direction of the surface or from the deep waters. If it comes from the surface it contains cosmogenic tritium, as its half-time life is relatively short (12,26 years), and tritium cannot reach water at depth. [6]

A wide variety of groupings of groundwater are known, based on the grouping, according to [7]:

- Juvenile water entering into the hydrogeological cycle first time.
- Wild water (also known as meteoric water, which is already involved in the water cycle, i.e. it is deposited from the atmosphere on the surface of the Earth and sinks from here.

Juvenile water can be grouped as:

- Water from inside of the Earth rising to the surface by any of reason. The most frequent in the exhalation of water vapour from volcanoes.
- The solar water hydrogen arriving from the sun combines with atmospheric oxygen forming water. This is confirmed by the cloud layer at altitude of 60 km; the water from the Earth surface is not able to reach so high altitude.

Wild water densification:

- Condensation water is the water that is carried by the air entering into the Earth core, cooling there and condenses. This water has a great importance on the desert coast and small importance in the temperate soil.
- In filtration water which from keep from surface into the Earth's crust and leaves over a time. It has great importance in the supply of ground water.
- Fossil water was present as pre water and remained there. The oil's accompanying water could be called fossil water. This may leave his original place during consolidation or due to earthquakes.
- Crystallize water means water bounded in rocks in front of hydroxide or hydro-silicate.
- Sweat water is water that is formed on the way: the surface binds water chemically or physically then the rock sinks and the water content is distilled. Of course the distillation takes place in the layer where the temperature is between the boiling point and the critical temperature of the water i.e. 100°C and 375°C .

New theories for grouping are also existed: one of most important is the Deming theory (2002) with volcanism as main origin of juvenile water are appearing being caused new focus of grouping [8]:

- ocean waters,

- meteoric (atmospheric) water,
- water transformed from them.

Groundwater can also be grouped according to the determinants of water, such as

- in the case of crystalline water on base of determining bind,
- in the base of pore water on capillary forces and on the location of gaps between the particles e.g. second order binds,
- the fissure water located in the cracks of rocks the gravitational force is determining,
- the water belonging to cavities and caves, the role of gravity is significant.

More grouping are available also:

- on base of water movement are stagnant, flowing vapour forms and leaking waters
- on base of temperature; see several definitions on concepts for cold, hot and lukewarm water
- on base of chemical composition we see simple, mineral, medicinal water
- in the case of mineral water this consists more then 1000 mg/l solid particles or detectable amount of biologically active elements or highly dissolved gas compounds used for pharmaceutical purposes.

In practical sense the more important is the grouping by location:

- groundwater: below the surface but above the first impermeable layer which is significantly affects by meteorological factors,
- layer water trapped between two watertight layer is ~ 100 m deep therefore in a Hungarian practice the groundwater limit is determined at 20 m deep.[9]

Also groping could be done on base of supply and groundwater depth.[10] Types originated by rain, the groundwater level is a function of precipitation, located near the surface up to max. 1 m:

- infiltration type: water level is at 1-2 m, the water low fix and balanced,
- medium normal type: located at 2-4 m below the surface,
- deep depth normal type: The groundwater level is 5-8 m deep. This annual fluctuation is small, evaporation is no longer expected, only infiltration and outflow prevail,
- uninterrupted type: the groundwater level is 7-10 m deep evaporation and infiltration are negligible only underground influences are acting.

Fig 1. shown each type of typical depth. Also it can be seen that the yearly level due to level raising and decreasing, shows a sin type curve.

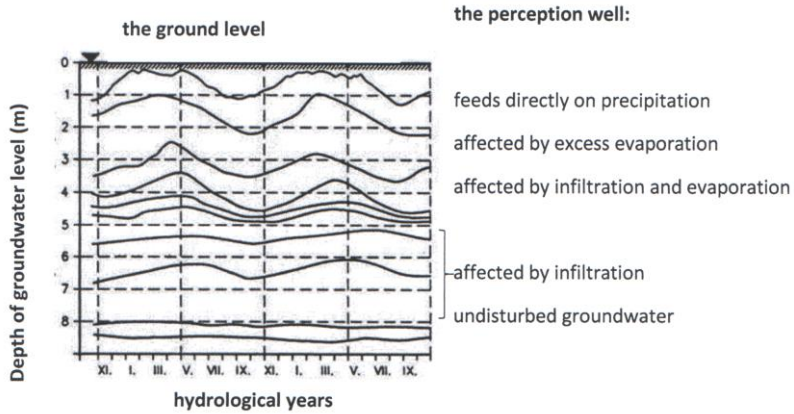


Fig. 1. Annual change in groundwater level related to each section.[10]

The stratification of the soil profile in term of water content is as follow:

- in the upper part there is a so-called aeration zone in which the water appears mainly as hanging water or hydrate cover,
- below this is the capillary zone,
- near the surface, the capillaries contain air in addition the water i.e. the pores are unsaturated when viewed against water,
- the capillaries of the deeper layers now contain only water i.e. they are saturated with respect to water.

The groundwater level, by precise definition is the depth of which unsaturated and saturated levels separate in the capillary.

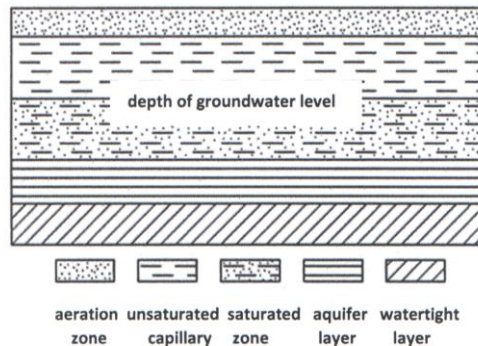


Fig. 2. Soil profiles based on water content.

The groundwater level is measured with specially installed wells or with wells not yet used for water supply. The water surface formed in the wells is always the same as the free surface of the groundwater in the environment. The annual water level fluctuation (in Hungary) is about 0.70-0.90 m, while the max. 2.30 m.

Floods of course results in greater level fluctuation, although this effect is not far from the rivers: usually 3-4 km along the Danube and 1,0-1,2 km along the Tisza.[9] The groundwater level depends on numerous external conditions, with the amount of precipitation and evaporation being the most important, but inflows and runoff can also play a role. In Hungary the max soil moisture is usually in early spinning, because from the middle of autumn to spring the amount of precipitation exceeds the water lost caused by evaporation, and the soil is filled. Despite meteorological events, vegetation-related effects should also be considered, especially during the summer months, when the water consumed by vegetation is significant. Therefore, the annual fluctuation of groundwater levels is highly region-dependent. [10]

The depth profile of soil moisture changes throughout the year. From autumn to spring, the so-called wetting profile is important: the moisture content of the soil decreases from top to bottom. The infiltrating water later reaches the deeper layers. The dehydration profile is typical from spring to autumn when the humidity increases downwards. [10]

The moisture content of the soil based on the restraining forces can be divided as:

- Hygroscope moisture content – this is the amount of water bound by the electrostatic forces of soil colloids. This multi-molecular water layer coats the surface of the soil's elementary particles. These include tightly bound water envelopes (adsorbed water) and looser adhesive water envelope (adhesive water).
- Water retained by the capillaries against the effect gravitational force is the capillary water and the pore water having a similar nature. They are weak so plants can partially absorb them.
- Water moving downwards due to gravity is the leaking (gravity water). It barely attaches to the ground so it is able to move by gravity downward.

In more compact, fine-grained soils (clay soils), most of the soil moisture is strongly bound to the soil particles because this part of the moisture is difficult to leave the soil. Looser soil have large particle sizes, large inter partial pores, so much of the water content is in the poorly bounded form.

The infiltration process is determined by these forces. In the case of precipitation the water first wets the soil particles forming water film on their surface. Upon further precipitation, the thickness of the water layer, the adhesive force decreases, and the water filling the gaps also appears. The downward movement starts when

the adhesive binding force of the film and the surface tension of the cover water become smaller than the effect of the gravitational force.[11]

The ground water can be open-mirror type. In that case the surface of that water is the contact with an air with pressure normal. Also could be sorted as mirror type, in that case on the surface water level on find a permeable layer.

If the groundwater layer is higher than the upper plane of the barrier layer, the water is under pressure.

In the case of double groundwater a lens barrier layer is built into the aquifer therefore part of the groundwater may be under pressure.

The surface of the groundwater roughly follows the topography as shown in Fig 3., but the particle size of rocks, the vegetation cover and the meteorological factors they are also determinants. If the case of coarse particle size and large roots or intensively evaporating roots, the groundwater level is lower.[12]

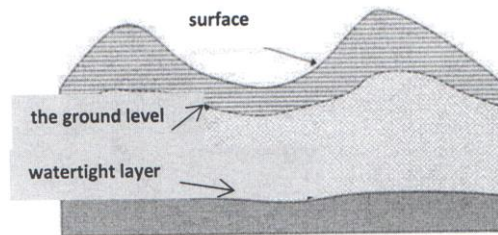


Fig. 3. Depth of the groundwater level and topography.[10]

The flow of groundwater can be determined by the method so-called „Hydrological triangle”. The water level waves measured at three points (wells) forming whose slope gives the direction of flow. Isotope tracer is also widely used to determine the velocity and direction of the flow:

- in the case of several well methods they are measuring the activity of central well related to out surrounding wells
- in the one well method we conclude data for velocity from the well activity changes.[9]

In addition the flow time of natural surface water flow could be determined by isotope technique, even the location of inflow. To do that, we have to know the activity of rainwater on a cosmogenic isotope. The measurements can be made at difference distances with sampling wells. For deep flow the activity decreases and the direction of flow can be given quite accountably based on the flow rates.[6]

The site of inflow can be determined by chemical methods, but it is necessary to take into account how the anion composition of the water changes from inflow to outflow. Initially the bicarbonate content is significant, then the sulphate and final-

ly the chloride content becomes predominant, while the oxygen content gradually decreases and the pH gradually increases.[13]

The groundwater movement – experimentally- is described by Darcy's law:

$$Q = KA \frac{h_A - h_B}{L}, \quad (1)$$

where Q is the volume of the water flow per unit time, A is the cross section of the flow field, L is the distance along flow between points A and B and K presents the leakage factor.[14]

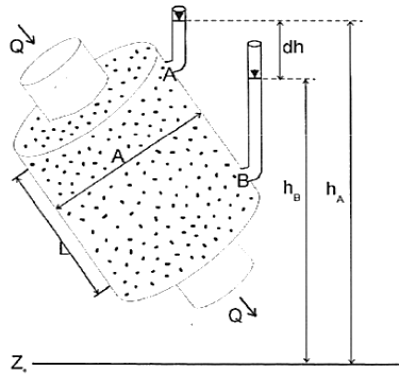


Fig. 4. Interpretation of Darcy's law.[14]

The leakage factor depends on the characteristics of the liquid and rock and decisive:

- the density of the liquid (ρ),
- the viscosity of the liquid (η),
- soil structure and particle size factor (C is determined experimentally),
- the diameter of the particles (d),
- gravitational acceleration at given location (g),
- The leakage factor is:

$$K = Cd^2 \frac{\rho g}{\eta} \quad (2)$$

By expressing K from (2) the Darcy's law become as

$$Q = \frac{ACd^2 (h_A - h_B)\rho g}{\eta L}. \quad (3)$$

The larger the flow cross section, the particle size (and thus the pore size) and the hydrostatic pressure gradient, and the less viscous the fluid, the more intense

the flow. With regards to the soil type, generally can be said the high permeability causes high flow and low permeability causes low flow.

The law, of course, is valid with high neglects i.e. takes into account only the internal friction. It does not take into account other forces influencing motion and is true only for laminar flow and can only be prescribed for steady states. However the real deep water flows correspond to these significations, so this law can be used very well in practical life.

An important feature is the temperature of groundwater which is known to be very high in Hungary where the stratified water is colder than 35 °C as drinking water. The warmer water is considered thermal. Water from wells with outlet temperature higher than 30°C called thermal water (wells of thermal water source “hév-víz”). Hévíz’s are located about in 70% territory of Hungary, thanks to the large geothermal gradients which is about one and half times more than world average 50 °C/km. This is due to the thin crust of the Pannonian Basin and the good thermal insulation sedimentary rock (sand, clay).[15] It should be mentioned that these water endowments are great promises as renewable energy utilizations., but it’s uses lags behind its importance. Connection to the heating system is the most common, but even in these cases geothermal energy can be considered an inexhaustible source of energy. After all, while capacity needs to be protected.[16]

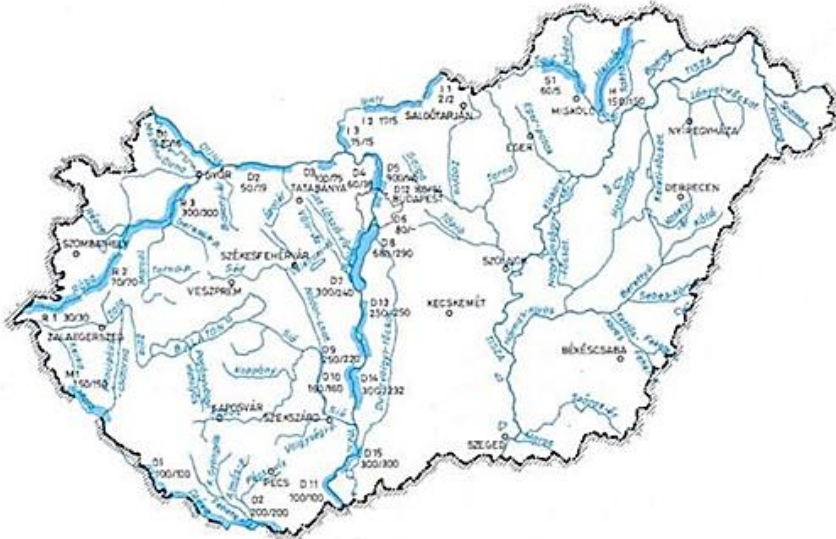


Fig. 5. Coastal filtered waters of Hungary – the grey area is the location of coastal filtered wells.
The number refer to the amount of water that can be extracted.[18]

The practical significance of coastal filtered waters is given by the fact that they provide a very good drinking water based, and their professional interest is that

they form a transition between surface and groundwater. These can be extracted from aquifers located next to surface watercourses, at which point they become groundwater. The condition of coastal filtered water is the close and direct connection of the water supply system with the water flow, the adequate permeability of the rock and good filtration capacity. The extracted water is essentially filled from the water stream. Thus, in the production of coastal filtered water, surface waters are filtered only by gravel, gravelly sand and sand in contact with them. Hungary's most significant coastal water resources are located along the Danube, Rába, Dráva, Ipoly, Sajó and Hernád rivers (Fig 5).[17]

Mention should also be made of the sources. Most springs are located where the waterproofing layer comes to the surface, at the boundary of which both groundwater and stratum water can burst to the surface. Three main types of resources are distinguished [19]:

- Falling springs: steams from steep rock walls. They are rich in water, their subsoil is stony and poor in vegetation. They most often occur in limestone mountains, e.g. the Szalajka Valley Rock Spring in Bükk.
- Breaking up springs: basin-like springs that are filled with water from below or from the side. They have a medium water circulation, their beds are sandy-muddy and rich in vegetation. They are common in volcanic bedrock mountains e.g. sources of the Zemplén Mountains.
- Swamp springs or spring bogs: they sweep through a thick layer of soil and therefore the area of the spring becomes swampy or flattened. They usually have low water yields and their beds are rich in vegetation. Typical mid mountains and hills, e.g. the Létrási spring in Bükk.
- Artesian wells which are also very common in Hungary represent important water acquisition sites. The first artesian well was drilled in 1126 (France, city Lille) in the country of Artois giving the name to artesian wells. The water from artesian wells comes from stratified water of average depth of 300-400 m. In contrast, drilled wells produce groundwater containing much more contaminants with varying water quality. Water would move from the basin-like aquifers to the surface under hydrostatic pressure, so if the upper barrier layer is drilled through, the aquifer will burst to the surface. If the resting water level rises towards the field level, we are talking about a positive artesian well, if it doesn't reach the field we are talking about a negative artesian well. Layered waters serve as very good drinking water as they are the least polluted waters due to the waterproofing layer and even contain minerals. It should be noted however, that the water supply of an artesian basin develops from precipitation over tens

of thousands of years, so a high degree of water uptake would consume the entire water supply.

- Due to basin nature of Hungary, roughly half of the 2,7 million m³ of deep water extracted annually is stratified water. The first artesian well was drilled in Transdanubia in Ugod in 1830. The area of the Great Plain is rich in artesian wells, as it consists of several sub-basins, and when the strata settled, a significant amount of water was trapped in the aquifers..[20]

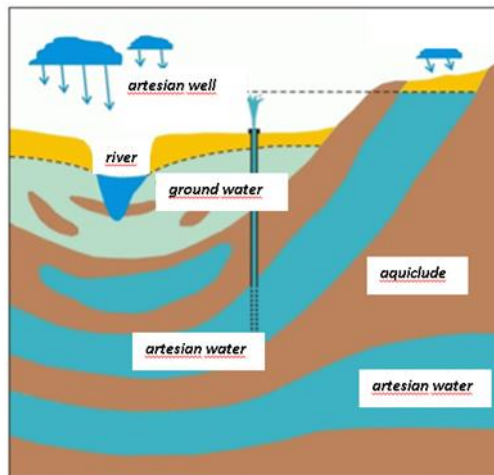


Fig. 6. Extraction of artesian water.[20]

Conclusions

The behaviour and status of groundwater, as explained above, depends on many physical factors. It also plays a significant role in agriculture and drinking water supply, making it an important topic in our daily lives. With this article, we have tried to help colloquia: how to connect the science of physics (including radioactivity) and geography. We also showed an example of how this knowledge can be applied in practice.

R e f e r e n c e s :

- [1] Sós Katalin, Nánai, László, Physical Processes in Nature - The Soil, *Obzory matematiky, fiziky a informatiky*, volume 43, number 4, pages 37-43, ISSN 1335-4981, 2014.
- [2] Sós Katalin, Nánai, László, The Physical Processes in Nature – The Water, *Obzory matematiky, fiziky a informatiky*, volume 45, number 1, pages 43-49, ISSN 1335-4981, 2016.
- [3] Sós Katalin, Bartyik Tamás, Nánai, László, Physical processes in Nature – Water 2. (Oceans, Seas), *Obzory matematiky, fiziky a informatiky*, volume 46, number 1, pages 37-48, ISSN 1335-4981, 2017.

- [4] Sós Katalin, Bartyik Tamás, Nánai, László, Physical Processes in Nature – The Water 3. Physics of Lakes, *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, volume 47, number 3, pages 25-34, ISSN 1335-4981, 2018.
- [5] Sós Katalin, Bartyik Tamás, Nánai, László, Physical Processes in Nature – The Water 4. Physics of Rivers, *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, volume 49, number 2, pages 35-43, ISSN 1335-4981, 2020.
- [6] Deák József: Természetes radioizotópok alkalmazása a felszínalatti vizek kutatásában. Magyar Geofizika, vol. XIV., no. 5-6
- [7] Juhász József: Hidrogeológia. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976.
- [8] Mádlné Dr. Szőnyi Judit et al: Hidrogeológia. Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 2013.
- [9] Hidrológia, hidrometria:
http://vpf.vizugy.hu/reg/ovf/doc/2.%20Hidrologia,%20hidrometria_A1.pdf
- [10] Gombos Béla: Hidrológia – Hidraulika. Szent István Egyetem, Gödöllő, 2011.
- [11] dr. Szilávik Lajos, Sziebert János, Zellei László: Hidrológia – Hidraulika. Szent István Egyetem, Gödöllő, 2002.
- [12] Thyll Szilárd: Vízszennyezés, vízminőségvédelem. DATE Viz- és Környezetgazdálkodási Tan-szék, Debrecen, 1998.
- [13] Toth J. 1999: Groundwater as a geologic agent: An overview of the causes, processes, and manifestations. *Hydrogeology Journal* 7, 1-14
- [14] Szanyi János, Kovács Balázs: Hidrogeológia: http://eta.bibl.u-szeged.hu/1496/28/129-1-Hidrogeol_BSC2.pdf
- [15] Korim K. (1972): Geological aspect of thermal water occurrences in Hungary. *Geothermics*, 1(3), pp 96-102.
- [16] Miklós Árpási (2003): Geothermal development in Hungary-country update report 2000-2002. *Geothermics*, 32. pp. 371-377.
- [17] Felszín alatti vizek:
http://www.agr.unideb.hu/ebook/vizminoseg/felszn_alatti_vizek.html
- [18] <http://www.aquadocinter.hu>
- [19] Felszín alatti vizek típusai:
<http://enfo.agt.bme.hu/drupal/sites/default/files/FELSZ%C3%8DN%20ALATTI%20VIZ EK%20T%C3%8DPUSAI.pdf>
- [20] Az artézi kutak: <http://agoramu.hu/wp-content/uploads/2017/05/0508-Artezi-kutak.pdf>

Author's addresses: Sós K., Department of General and Environmental Physics JGYPK
University of Szeged, Hungary, H-6725 Boldogasszony sgt. 6.
e-mail: soska@jgypk.u-szeged.hu
Bartyik T., Department of General and Environmental Physics JGYPK
University of Szeged, Hungary, H-6725 Boldogasszony sgt. 6.
Nánai L., Department of General and Environmental Physics JGYPK
University of Szeged, Hungary, H-6725 Boldogasszony sgt. 6.
e-mail: nanai@physx.u-szeged.hu

Texty úloh 1. kola 62. ročníka Fyzikálnej olympiády (šk. r. 2020-2021) kategórie A,B,C,D

Kategória A

1. Šikmý vrh

Ak vrhneme teleso v bode O šikmo nahor rýchlosťou v_0 pod uhlom α , pohybuje sa po zakrivenej trajektórii –*balistickej krivke*.

a) Znázorníte trajektóriu telesa a pre ľubovoľnú polohu telesa nakreslite vektory síl, ktoré na teleso pôsobia. Jednotlivé sily pomenujte a vyjadrite pomocou zodpovedajúcich vzťahov. Uveďte a fyzikálne zdôvodnite podmienky, ktoré treba splniť, aby bolo možné považovať trajektóriu za symetrickú podľa zvislej osi. Na dokumentovanie vášho riešenia uveďte niekoľko prípadov rôznych telies v tvare gule.

V ďalšom predpokladajte, že sú splnené podmienky pre symetrickú trajektóriu šikmého vrhu telesa.

b) Napíšte pohybovú rovnicu telesa a vyjadrite zvislé a vodorovné zložky rýchlosti a súradnice telesa počas jeho pohybu.

c) Určte vzdialenosť r od bodu vrhu O, radiálnu rýchlosť v_r telesa (rýchlosť zmeny vzdialenosti r) a uhol β , ktorý zvierajú vektory \mathbf{r} a \mathbf{v} , v ľubovoľnom bode trajektórie telesa ako funkcie času t .

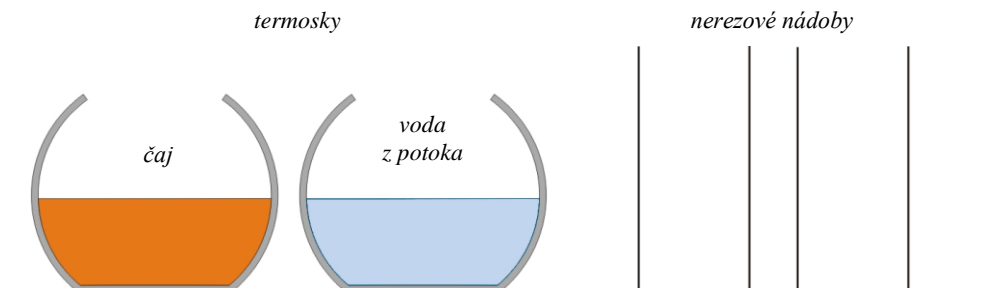
d) Určte podmienku pre uhol vrhu α , aby sa teleso počas celého pohybu vzdalovalo od bodu vrhu O.

e) Zostrojte grafy funkcií $r(t)$, $v(t)$ a $\beta(t)$ pre hodnoty $\alpha = 60^\circ$, $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a presvedčte sa, že vzdialenosť r počas celého pohybu rastie.

Uvažujte $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, teleso považujte za hmotný bod. Pre konštrukciu grafov použite vhodný počítačový program, napr. EXCEL.

2. Chladenie čaju

Žiaci vo fyzikálnom krúžku dostali za úlohu čo najviac ochladiť horúci čaj so začiatočnou teplotou $t_1 = 90^\circ\text{C}$ studenou vodou s teplotou $t_2 = 10^\circ\text{C}$, a pritom obe kvapaliny nemiešať. Čaj i voda s rovnakými objemami i hmotnosťami m sú v termoskách položené na stole, obr. A–1. Okrem toho majú k dispozícii dve tenkostenné nerezové nádoby, ktoré možno zasunúť do termosiek a teplomer. Po ponorení nerezovej nádoby do termosky až na dno obsah termosky cez okraj nevytečie.



Obr. A-1

Najprv použili najjednoduchšie riešenie. Studenú vodu naliali do nerezovej nádoby, tú ponorili do čaju a počkali, až sa teplota vody v nerezovej nádobe ustáli.

a) Určte teplotu t_3 čaju po ustálení teplôt.

Potom jeden zo žiakov dostal nápad použiť studenú vodu v dvoch dávkach. Najprv naliali časť studenej vody s hmotnosťou m_1 do nerezovej nádoby a ponorili ju do čaju. Po ustálení teploty, vodu preliali do druhej prázdnej nádoby a do prvej naliali zvyšok studenej vody, s ktorou opakovane chladili čaj. Po ustálení teploty opäť priliali vodu do druhej nádoby k vode z prvého chladenia.

b) Dokážte výpočtom, že týmto spôsobom sa dosiahne výsledná teplota čaju $t_{42} < t_3$. Určte pomer hmotností $x = m_1/m$ dávky studenej vody, pre ktorý sa dosiahne najnižšia teplota t_{42} . Určte výslednú teplotu t_{42} čaju a t_{52} vody v druhej nádobe po ukončení chladenia pre optimálny pomer m_1/m . Zistite, či možno druhou metódou dosiahnuť výslednú teplotu t_4 čaju nižšiu, ako je výsledná teplota t_5 chladiacej vody.

Potom druhého žiaka napadlo, že by mohol byť výsledný efekt ešte väčší, ak by sa studená voda rozdelila na viacero rovnakých dávok a chladenie sa vykonalo postupne jednotlivými dávkami, podobne ako v predchádzajúcom prípade.

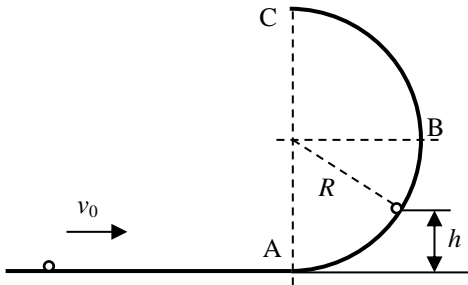
c) Odvodte vzťah pre výslednú teplotu t_4 čaju pri použití n rovnakých dávok.

Určte najnižšiu hranicu $t_{4\min}$ ku ktorej sa blíži teplota t_4 , ak sa použije táto metóda chladenia pre rozdelenie chladiacej vody na veľký počet dávok.

d) Po každej dávke sa voda vyleje do druhej nádoby. Určte výslednú teplotu $t_{5\max}$ všetkej chladiacej vody v druhej nádobe po ukončení chladenia.

Predpokladajte, že tepelná kapacita všetkých nádob je veľmi malá a že nedochádza k výmene tepla s okolím. Hmotnostná tepelná kapacita čaju a vody sú rovnaké a tiež hustota čaju a vody sú rovnaké.

Pozn. : Pre veľké hodnoty $n \rightarrow \infty$ platí $\left(n + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \approx 2,718$ (Napierova konštanta – základ prirodzených logaritmov).



Obr. A-2

3. Gul'ôčka na valcovej stene

Na vodorovnú podložku hladko nadväzuje pol valcová stena s polomerom R , obr. A-2. Po vodorovnej podložke sa pohybuje valivým pohybom (bez prešmykovania) oceľová gul'ôčka s polomerom $r \ll R$ s rýchlosťou v_0 postupného pohybu.

a) Analyzujte pohyb gul'ôčky a uvážte, aké možnosti môžu nastať pre rôzne hodnoty rýchlosti v_0 . Nakreslite obrázok

a pre uvedené možnosti, označte polohu gul'ôčky a nakreslite a opíšte vektory síl, ktoré pôsobia na gul'ôčku v inerciálnej sústave spojenjej s podložkou.

b) Určte výšku h nad vodorovnou podložkou, do ktorej zostáva gul'ôčka v kontakte so stenou.

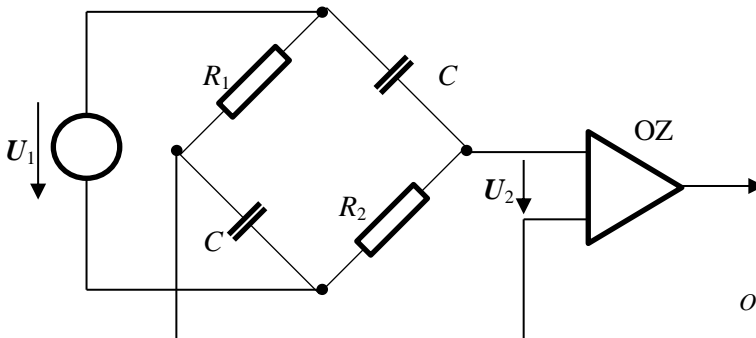
c) Určte maximálnu výšku H , do ktorej gul'ôčka vystúpi počas pohybu.

Riešte všeobecne a potom pre $R = 30 \text{ cm}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a tri rôzne hodnoty $v_{01} = 1,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_{02} = 2,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_{03} = 3,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Moment zotrvačnosti gul'ôčky vzhľadom na os prechádzajúcu jej stredom $J = (2/5)mr^2$, kde m je hmotnosť a r polomer gul'ôčky.

Predpokladajte, že gul'ôčka sa pohybuje valivým pohybom bez prešmykovania aj počas celého kontaktu s valcovou stenou.

4. RC mostík

Na obr. A-3 je schéma RC mostíka, ktorý sa používa na úpravu frekvenčného spektra signálu zdroja s napätím U_1 s konštantnou efektívnou hodnotou U_1 . Výstupný signál U_2 sa privádza na vstup operačného zosilňovača OZ s veľmi vysoko-



Obr. A-3

kým vstupným odporom, takže mostík možno považovať za nezaťažený.

V protiľahlých stranách mostíka sú zapojené dva kapacitory s rovnakými kapacitami C a rezistory s odporom R_1 a R_2 . Charakteristické uhlové frekvencie vetiev obvodu sú $\omega_1 = 1/(R_1C)$ a $\omega_2 = 1/(R_2C)$.

- Určte činný výkon P zdroja ako funkciu frekvencie f , resp. uhlovej frekvencie ω napätia U_1 zdroja.
- Určte komplexný napät'ový prenos $A_U = U_2/U_1$ filtra pomocou charakteristických uhlových frekvencií ω_1, ω_2 ako funkciu uhlovej frekvencie ω zdroja napätia.
- Zostrojte grafy frekvenčnej závislosti $P(\omega)$, absolútnej hodnoty $A_U(\omega)$ a argumentu $\varphi(\omega)$ napät'ového prenosu mostíka pre hodnoty $U_1 = 12\text{ V}$, $R = 100\ \Omega$, $\omega_1 = 2\pi \times 100\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ a $\omega_2 = 2\pi \times 1,00\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Uveďte, o aký typ filtra ide (horný priepust, dolný priepust, pásmový priepust, pásmová zádrž). Určte medzné frekvencie filtra pre pokles prenosu o 3 dB z maximálnej hodnoty.

5. Pozorovanie kameňa vo vode

Plavecký bazén má zvislé steny a konštantnú hĺbku $H = 1,5\text{ m}$. Bazén je naplnený až po horný okraj vodou. Dno bazéna je vydláždené od okraja štvorcovými kachličkami s dĺžkou strany $a = 30\text{ cm}$. Medzi kachličkami sú veľmi úzke medzery.

Chlapec sedí nad okrajom bazéna a pozoruje dno v smere kolmo na okraj bazéna. Jeho oči sú nad zvislou stenou vo výške $b = 70\text{ cm}$ nad hladinou.

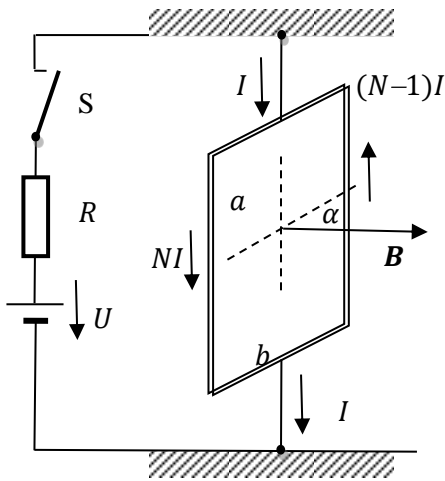
- Nakreslite obrázok a znázorníte v ňom všetky dôležité veličiny. V obrázku znázorníte lúče vychádzajúce z určitého bodu A na dne a zostrojíte zdanlivý obraz B tohto pozorovaného bodu.
- Chlapec pozoruje obraz sledovaného bodu A pod uhlom α vzhľadom na kolmicu k hladine vody. Odvodte funkciu $x = f(\alpha)$, ktorá vyjadruje vzdialenosť x bodu A od steny bazéna ako funkciu uhla α . Zostrojte graf tejto funkcie.
- Odvodte vzťah pre zdanlivú hĺbku h obrazu B bodu A ako funkciu uhla α . Zostrojte graf závislosti zdanlivej hĺbky h od vzdialenosti x bodu A od steny.
- Odvodte vzťah pre zdanlivú vzdialenosť d obrazu B bodu A od steny ako funkciu uhla α . Zostrojte graf závislosti zdanlivej vzdialenosti d od vzdialenosti x bodu A od steny.
- Určte zdanlivé hĺbky h_1 a h_{10} a zdanlivé vzdialenosti d_1 a d_{10} od steny spojov medzi prvou a druhou a desiatou a jedenástou kachličkou.

Index lomu vody $n = 1,33$; index lomu vzduchu $n_0 = 1,00$.

6. Kmity cievky s prúdom v magnetickom poli

Na zvislom vodivom a pružnom vlákne je upevnená obdĺžniková cievka s výškou a , šírkou b , z medeného drôtu s priemerom d s počtom $N - 1/2$ závitov (posledný

závit je iba polovičný), obr. A-4. Cievka sa môže vychýľovať okolo zvislej osi danej vláknom.



Obr. A-4

Cievka sa nachádza v homogénnom magnetickom poli s indukciou \mathbf{B} vo vodorovnom smere. Cievka je pripojená na elektrický zdroj s napätím U . Prúd I cievky je daný odporom R rezistora.

Pri vypnutom spínači S v pokojovom stave zvierá rovina cievky so smerom magnetického poľa nulový uhol α_0 ($\alpha_0 = 0$). Ak cievku vychýlime z rovnovážnej polohy o malý uhol α a uvoľníme, bude kmitať okolo rovnovážnej polohy s frekvenciou f_0 .

Po zapnutí spínača začne elektrickým obvodom prechádzať prúd I_1 .

a) Po ustálení kmitov cievky nová rovnovážna poloha cievky je daná uhlom α_1 vychýlenia zo začiatkovej polohy. Napíšte

rovniciu pre uhol α_1 .

- Po malom vychýlení z novej rovnovážnej polohy a uvoľnení začne cievka kmitať s frekvenciou f_1 . Určte frekvenciu f_1 ako funkciu uhla α_1 .
- Pre daný prúd I_1 uhol $\alpha_1 = f_a(B)$ je funkciou indukcie B a frekvencia $f_1 = f_b(\alpha_1)$ je funkciou uhla α_1 . Zostrojte grafy oboch funkcií pre dané hodnoty.
- Uvedeným spôsobom možno merať horizontálnu zložku B_h indukcie magnetického poľa. Určte indukciu B_h s použitím zostrojených grafov z nameraných hodnôt $I_1 = 2,0$ A, $f_0 = 10$ Hz a $f_1 = 300$ Hz a pre dané parametre cievky.

Úlohu riešte všeobecne a pre hodnoty: $N = 5$, $a = 10$ cm, $b = 10$ cm, $d = 0,20$ mm, $I_1 = 2,0$ A.

7. DVD – video disk – experimentálna úloha

Medzi vysokokapacitné média na ukladanie dát patrí DVD (Digital Video Disc). Dáta sa ukladajú na špirálovú stopu pomocou laserového lúča. Keďže schopnosť zaostrenia lúča je obmedzená vlnovou dĺžkou. CD (Compact Disc) využíva vlnovú dĺžku 780 nm, DVD 650 nm a Blue-Ray 405 nm. Jednotlivé média majú rastúcu kapacitu na 1 cm² plochy.

Štandardný DVD má kapacitu $C = 4,7$ GB (Giga Byte) dát uložených v jednej vrstve. Špirálová záznamová stopa sa začína na priemere $d_1 = 40$ mm a končí sa na priemere $d_2 = 115$ mm a dá sa na ňu uložiť 4,7 GB dát. DVD mechanika vyu-

žíva na zápis a čítanie záznamu systém CLV (Constant Linear Velocity) pri ktorom sa laserový lúč posúva po záznamovej stope konštantnou rýchlosťou v_L , pri ktorej sa dáta v objeme C uložia na disk za dobu $T = 55$ min. Podľa toho sa prispôsobujú otáčky disku aktuálnemu polomeru stopy od najväčšej hodnoty N_1 pre priemer stopy d_1 po najmenšiu N_2 pre polomer stopy d_2 .

Úloha:

1. Na základe merania počtu n závitov záznamovej špirály určte dĺžku L záznamovej stopy a dĺžku l úseku stopy, na ktorom je zaznamenaný 1 byte dát.
2. Určte rýchlosť v_L posunu laserového lúča pozdĺž stopy pri zázname dát a otáčky N_1 a N_2 disku.

Metóda:

Závity záznamovej stopy v danom mieste predstavujú priestorovú periodickú štruktúru s periódou δ . Na periodickej štruktúre dochádza k difrakcii vlnenia. S ohľadom na rozmery štruktúry je výhodné použiť svetlo lasera. Použité červené laserové ukazovadlo s vlnovou dĺžkou lúča $\lambda = 650$ nm. Pri kolmom dopade lúča na povrch disku dochádza k difrakcii, pričom pre uhol φ odchýlenia prvého difrakčného maxima platí $\sin \varphi = \lambda/\delta$.

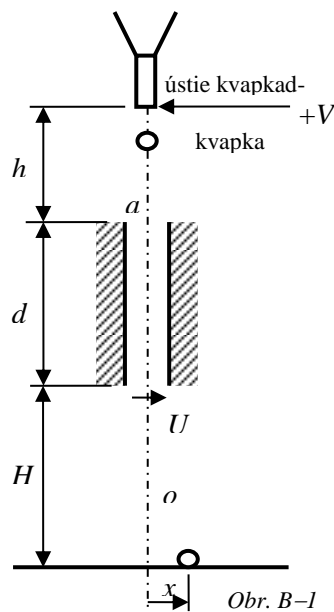
Navrhňte vhodné usporiadanie experimentu a zmerajte uhol φ . Meranie niekoľkokrát opakujte a meranie vyhodnoťte. Po určení hodnoty δ vypočítajte všetky požadované hodnoty veličín.

Kategória B

1. Pád kvapky v elektrickom poli

Vynaliezavosť žiakov nepozná medze. Úlohou, ktorú mali riešiť, bolo určenie hmotnosti kvapky vody z kvapkadla. Jedna z možností je predpokladať, že kvapky majú rovnakú hmotnosť, a stačí tak spočítať počet kvapiek a zvážiť nakvapkanú vodu. Majú však kvapky rovnakú hmotnosť? Na overenie vymysleli nasledujúcu metódu. Vyrobili si zariadenie podľa obr. B-1.

Ku kvapkadlu je pripojený elektrický zdroj, ktorý kvapky zelektrizuje na rovnaký potenciál $\varphi = 1800$ V. Kvapka po uvoľnení z kvapkadla padá voľným pádom. V hĺbke $h = 15$ cm vnikne medzi dve rovnobežné zvislé dosky so vzájomnou vzdialenosťou $a = 6,0$ mm, na ktoré je pripojený zdroj konštantného napätia $U = 1000$ V. Dĺžka



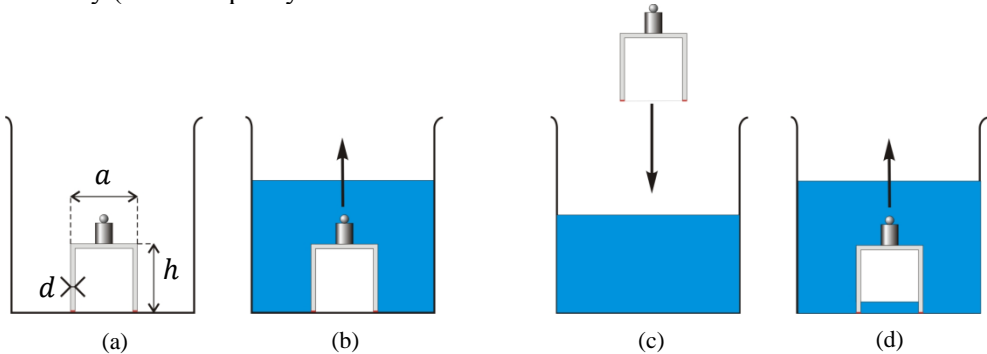
dosiek $d = 10$ cm. Od konca dosiek kvapka padá do hĺbky $H = 20$ cm na podložku a dopadne vo vzdialenosti x od osi sústavy.

- Opíšte pohyb kvapky a uveďte sily, ktoré na kvapku pôsobia počas pohybu.
- Určte náboj Q kvapky a vyjadrite ho ako funkciu hmotnosti m kvapky. Predpokladajte, že kvapky majú tvar gule.
- Určte hmotnosť m kvapky ako funkciu vzdialenosti x dopadu kvapky na podložku.
- Žiaci zistili meraním odchýlku $x = (3,5 \pm 0,5)$ mm. Pre dané hodnoty určte hmotnosť $m = \bar{m} \pm \Delta m$ kvapky. Určte stredný polomer r kvapky a overte, či sa kvapka nezachytí na dolnom okraji dosky.

Hustota vody $\rho = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, elektrické pole medzi doskami považujte za homogénne, okrajové efekty a odpor vzduchu neuvažujte.

2. Miska vo vode

Na pokus použijeme širokú nádobu s rovným hladkým dnom a výrazne menšiu sklenenú misku so štvorcovou podstavou, s vonkajšou dĺžkou $a = 50$ mm strany podstavy, výškou $h = 40$ mm, a hrúbkou steny i dna $d = 5,0$ mm. K dispozícii máme mosadzné závažie s hmotnosťou $m_z = 20$ g. Okraj misky je pogumovaný a hladký (ale nie lepkavý).



Obr. B-2 (obrázky sú len ilustračné).

V prvom prípade misku postavíme na dno nádoby hore dnom, a okraje dokonale priliehajú ku dnu nádoby..

- Určte veľkosť F_1 sily F , ktorou pôsobí miska na dno nádoby.
- Potom misku zaťažíme závažím, obr. B-2 (a). Do nádoby nalejeme do výšky $H = 25$ cm vodu tak, že miska i závažie sú pod voľnou hladinou vody v nádobe, obr. B-2 (b). Dotyk misky s dnom nádoby je vzduchotesný a vodotesný. Určte silu F_2 , ktorou pôsobí miska na dno nádoby. Určte silu F_3 , ktorou pôsobí miska na dno nádoby po odstránení závažia.

Potom misku z nádoby vyberieme nad hladinu vody, obr. B–2 (c), pomaly ju ponoríme dnom nahor naspäť na dno nádoby a zaťažíme závažím, obr. B–2 (d).

c) Určte silu F_4 , ktorou pôsobí zaťažená miska na dno nádoby.

d) Určte silu F_5 dosadením $m_z = 0$ do vzťahu pre F_4 , čo zodpovedá odstráneniu závažia. Čo sa stane s miskou po odstránení závažia?

V prípadoch a) až d) predpokladajte, že výška H hladiny sa pri pokusom mení zanedbateľne.

Potom predchádzajúci pokus opakujeme s tým, že meníme výšku H hladiny vody v nádobe.

e) Silu F_5 vyjadrite ako funkciu výšky H hladiny vody v nádobe. Zostrojte graf tejto funkcie a z grafu určte minimálnu výšku H_m vody, pri ktorej zostane miska po odstránení závažia ležať na dne.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty: hustota vody $\rho_v = 1,00 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, hustota skla $\rho_s = 2,23 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, hustota mosadze $\rho_m = 8,73 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, tiažové zrýchlenie $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, atmosférický tlak $p_0 = 101 \text{ kPa}$. Tiažovú silu vzduchu v miske neuvažujte.

3. Nádoba na naklonenej rovine

Ak postavíme fľašu s minerálkou na dosku a začneme jeden koniec dosky zdvíhať, pri určitom uhle sklonu dosky s vodorovnou rovinou sa fľaša prevráti. Ak vedľa seba postavíme tri rovnaké fľaše, jednu prázdnu, druhú naplnenú do polovice výšky a tretiu plnú, pri nakláňaní dosky začnú padať v určitom poradí.

a) Urobte jednoduchý pokus s tromi rovnakými fľašami od minerálky a zistite, v akom poradí sa prevrátia.

Výsledok pokusu zdôvodnite výpočtom. Pre jednoduchosť uvažujte tenkostennú nádobu v tvare pravidelného štvorbokého hranola s rovnakou hrúbkou steny i podstavy (dna), dĺžkou hrany štvorcovej podstavy $a = 10 \text{ cm}$, výškou $h_0 = 25 \text{ cm}$ a hmotnosťou $m_0 = 100 \text{ g}$.

Do nádoby nalejeme vodu do výšky H a nádobu uzatvoríme tenkou a pevnou fóliou, aby voda nemohla pri nakláňaní z nádoby vytiecť. Nádobu postavíme na dosku tak, že dve strany podstavy sú rovnobežné s okrajom dosky, ktorý po nakláňaní leží na vodorovnej podložke. Potom začneme druhý koniec dosky pomaly dvíhať a sledovať uhol α sklonu dosky vzhľadom na vodorovnú podložku. Pri dosiahnutí určitého medzného uhlu α_m sa nádoba prevráti. Uvažujte tri prípady: $H_1 = 0$ (prázdna nádoba), $H_2 = h_0$ (plná nádoba) a $H_3 = h_0/2$.

b) Určte vzťahy pre polohu ťažiska nádoby v jednotlivých prípadoch vzhľadom na nádobu (vzdialenosť h od dna a vzdialenosť x od geometrickej osi nádoby) ako funkcie uhlu α naklonenia dosky. Dokážte, že pre dané hodnoty posunutie ťažiska spôsobené naklonením hladiny možno zanedbať.

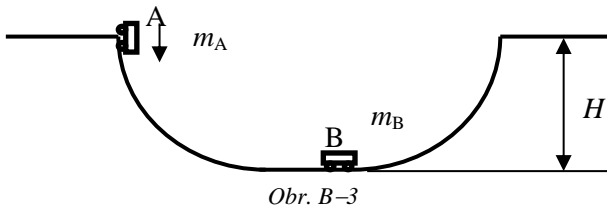
- c) Určte medzný uhol α_m prevrátenia nádoby v jednotlivých prípadoch. V treťom prípade použite zjednodušujúci predpoklad, že zmena polohy ťažiska v dôsledku naklonenia výsledok podstatne neovplyvní.
- d) Porovnajzte výsledky výpočtu s výsledkami úvodného pokusu.
- Hustota vody $\rho = 1,0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Hmotnosť fólie uzatvárajúcej nádobu je veľmi malá. Nádoba sa pri nakláňaní dosky na jej povrchu neprešmykuje.

4. Zohrievanie elektrického vodiča

K dispozícii máme dva plné valcové železné drôty z rovnakého materiálu s rovnakou dĺžkou $l = 50 \text{ cm}$. Prvý má priemer $d_1 = 0,20 \text{ mm}$, druhý $d_2 = 0,10 \text{ mm}$. Na začiatku majú drôty rovnakú teplotu rovnú teplote vzduchu v miestnosti $t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

- a) Po pripojení prvého drôtu na zdroj konštantného napätia $U_0 = 1,0 \text{ V}$ sa teplota drôtu ustáli na hodnote $t_1 = 80 \text{ }^\circ\text{C}$. Určte hodnotu koeficientu γ prestupu tepla medzi drôtom a okolitým vzduchom a prúd I_1 zdroja.
- b) Drôty spojíme paralelne a pripojíme na rovnaký zdroj napätia ako v prípade a). Určte hodnoty teploty t_2 prvého drôtu a t_3 druhého drôtu po ustálení a prúd I_2 zdroja.
- c) Drôty spojíme sériovo a pripojíme na rovnaký zdroj napätia ako v prípade a). Určte hodnoty t_4 a t_5 teploty drôtov po ustálení.

Rezistivita železa pri teplote t_0 je $\rho_{20} = 9,9 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, teplotný koeficient odporu železa $\alpha = 6,5 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Koeficient γ prestupu tepla medzi povrchom drôtov a okolím je vo všetkých prípadoch rovnaký. Na povrchu drôtov je veľmi tenká izolačná vrstva oxidu. Teplotnú rozťažnosť drôtov neuvažujte, teplotu drôtov uvažujte rovnakú v celom ich objeme.



5. Skateboardová rampa

Na hladkej skateboardovej U-rampe s výškou $H = 2,7 \text{ m}$ zakončenej na oboch stranách štvrt'valcovými stenami, obr. B-3, urobili pokus, na ktorý použili dva malé vozíky A a B s hmotnosťami m_A a m_B . Pomer hmotností vozíkov

označíme $p = m_A/m_B$.

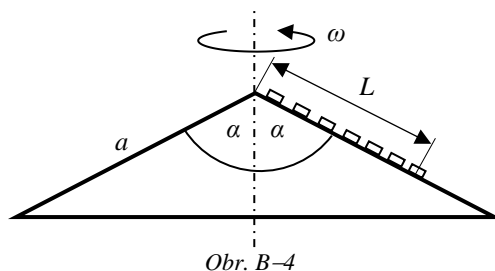
Na začiatku vozík B stál na dne rampy, vozík A bol voľne spustený z okraja rampy, ako je znázornené na obr. B-3. Potom na dne rampy dôjde k zrážke vozíkov.

V prvom prípade pri pomere $p = 3,0$ vozík B vystúpi po zrážke k okraju rampy do výšky H .

- Určte pomer $q = Q/E_0$, kde Q je strata mechanickej energie pri zrážke a E_0 začiatočná potenciálna energia vozíka A.
 - Určte výšku h_1 nad dnom rampy, do ktorej po zrážke vystúpi vozík A. V druhom prípade vozíky vymeníme a pokus opakujeme. Predpokladajte rovnaký pomer q pri zrážke.
 - Určte výšky h_A a h_B vozíkov A a B, do ktorej vystúpia po zrážke.
- Pozn.: Straty mechanickej energie pri pohybe vozíkov neuvažujte.*

6. Telieska na disku

Pevný disk v tvare kužeľa s vrcholovým uhlom 2α a stranou a , ktorý sa môže otáčať okolo zvislej osi, je posypaný drobnými telieskami, obr. B-4. Faktor trenia medzi telieskami a povrchom disku je f . Disk sa začne veľmi pomaly roztáčať, pričom telieska z jeho povrchu postupne odpadávajú.



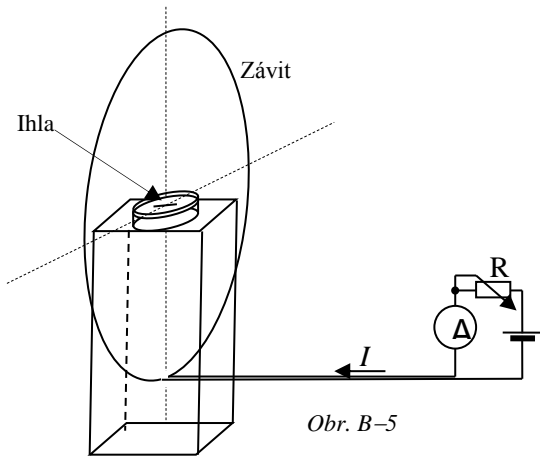
- Nakreslite obrázok s jedným telieskom ležiacim na povrchu rotujúceho disku a znázorníte sily ako vektory, ktoré pôsobia na teliesko v neinerciálnej vzťažnej sústave spojenjej s diskom. Vysvetlite, prečo niektoré telieska z disku odpadávajú a iné sa na disku udržia.
- Určte maximálnu uhlovú rýchlosť ω_m otáčania disku, do ktorej nebudú telieska z disku odpadávať.
- Pri zvyšovaní uhlovej rýchlosti $\omega > \omega_m$ sa postupne zväčšuje pás v dolnej časti disku vyprázdnený od teliesok. Odvodte vzťah pre dĺžku L strany časti kužeľa, na ktorej zostávajú telieska, ako funkciu uhlovej rýchlosti ω .

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty $\alpha = 75^\circ$, $a = 20$ cm, $f = 0,35$, $g = 9,8$ m \cdot s $^{-2}$, $\omega = 3,0$ rad \cdot s $^{-1}$.

Pozn.: Rottáčanie disku je veľmi pozvoľné, takže vplyv uhlového zrýchlenia disku na telieska je zanedbateľný.

7. Magnetické pole Zeme – experimentálna úloha

Vektor $\mathbf{B}_Z = \mathbf{B}_{Zh} + \mathbf{B}_{Zv}$ indukcie magnetického poľa Zeme je superpozíciou horizontálnej a vertikálnej zložky, leží v rovine, ktorá prechádza magnetickými pólmi Zeme a daným miestom pozorovania. Na povrchu Zeme zvierá určitý uhol s vodorovnou rovinou. Na orientáciu pomocou kompasu sa využíva zložka horizontálna.



Úloha:

Určte veľkosť B_{Zh} horizontálnej zložky indukcie \mathbf{B}_Z magnetického poľa Zeme pomocou skladania (superpozície) magnetického poľa Zeme a magnetického poľa vytvoreného elektrickým prúdom kruhového závit.

Metóda:

Ako indikátor smeru magnetického poľa použite zmagnetovanú ihlu jemne položenú na hladinu vody v nádobke, obr. B-5.

Na vytvorenie magnetického poľa vytvorte kruhový závit z hrubého medeného drôtu s priemerom približne $r = 25$ cm. Závit spojte so zdrojom konštantného napätia cez reostat na reguláciu prúdu I . Do obvodu zapojte ampérmeter. V strede závit má vektor \mathbf{B} indukcie magnetického poľa smer kolmý na rovinu závit a veľkosť

$$B = \frac{I}{2\mu_0 r},$$

kde $\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ je permeabilita vákua (magnetická konštanta).

Misku s ihlou umiestnite tak, aby stred ihly bol v strede závit. Urobte si vhodnú podložku z dreva alebo papiera. Pri nulovom prúde nastavte závit tak, aby ihla bola v rovine závit. Potom nastavujte rôzne hodnoty prúdu I a merajte uhol φ odchýlenia ihly z pôvodného smeru.

Vzájomne kolmé magnetické polia závit a Zeme sa skladajú, pričom platí

$$\tan \varphi = \frac{B}{B_{Zh}} = \frac{I}{2\mu_0 r B_{Zh}} = kI.$$

Merania zapíšte do tabuľky a zostrojte graf $\tan \varphi$ ako funkcie prúdu I . Ukážte, že namerané body ležia na priamke a určte konštantu k priamky.

Určte hodnotu B_{Zh} a porovnajte ju s hodnotou z internetu:

<http://www.ngdc.noaa.gov/geomag/magfield.shtml> (Magnetic Field Calculator)

Pozn.: Pri meraní odstráňte z blízkosti závit predmety ovplyvňujúce magnetické pole. Na napájanie závit použite dvojlinku alebo dva vodiče tesne pri sebe, aby sa potlačilo magnetické pole prívodov.

Kategória C

1. Barón Prášil

V roku 1786 vyšla v Nemecku kniha Gottfrieda Augusta Bürgera o neuveriteľných príhodách vojaka a cestovateľa baróna von Münchhausen, ktoré rozprával priateľom pri pive. U nás je známy ako Barón Prášil a bol predstavený najmä vo filme Karla Zemana z roku 1962.

Jeden z príbehov rozpráva o tom, ako sa Barón Prášil dostal do nepriateľského tábora na delovej guľi, na ktorú pri výstrele naskočil. Zamyslime sa nad touto príhodou.



Z vyvýšeniny vo výške $h_0 = 60$ m nad vodorovným terénom, na ktorom sa nachádzal nepriateľský tábor vo vodorovnej vzdialenosti $d_0 = 800$ m, vystreľovali kanóny pod uhlom $\alpha = 35^\circ$ vzhľadom na vodorovný smer ťažké železné guľe s priemerom $D = 20$ cm, ktoré dopadali do tábora. Barón Prášil rozprával, že sa dostal do nepriateľského tábora tak, že v okamihu výstrelu na guľu naskočil a nechal sa na guľu odniesť do tábora. Posúďte tento príbeh za predpokladu, že by sa mu skutočne podarilo na guľu naskočiť. Uvažujte hmotnosť baróna $M = 80$ kg.

- Určte rýchlosť v_0 , ktorou guľa opúšťa hlaveň.
- Určte, v akej vzdialenosti a od tábora by guľa s barónom dopadla.

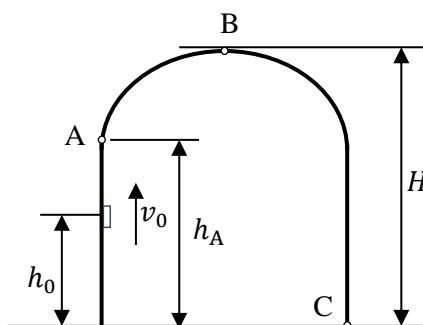
Pozn.: Hustota železa $\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, odpor vzduchu neuvažujte.

2. Moskovské metro

Jednou z najzaujímavejších staníc moskovského metra je stanica Majakovského. Jej charakteristickým prvkom sú nosné oblúky vystužené oceľou, obr. C-1 (a).



(a)



(b)

Obr. C-1

Žiaci použili čas čakania na vlak experimentom s mincou. Vo výške $h_0 = 1,50$ m mincu priloženú tesne k stĺpu bočného oblúka vyhadzovali pozdĺž stĺpa nahor. Skúmali, akou minimálnou rýchlosťou v_0 musia mincu vyhodiť, aby prešla po oblúku najvyšším bodom B vo výške $H = 4,00$ m a dopadla na podlahu v bode C na druhej strane oblúka, obr. C–1 (b).

Na obrázku (b) vidíme geometrické usporiadanie bočného oblúka. Zvislá stena stĺpa prechádza v bode A vo výške $h_A = 2,30$ m hladko do oblúka s polomerom krivosti $r_A = 1,40$ m. Polomer krivosti oblúka sa postupne zvyšuje až do maximálnej hodnoty $r_B = 2,10$ m v najvyššom bode B. Oblúk je symetrický podľa zvislej osi prechádzajúcej bodom B.

- Prekreslite obr. C–1 (b) do vášho riešenia. V obrázku nakreslite vektory síl, ktoré pôsobia na mincu v bodoch A a B oblúka v inerciálnej vzťažnej sústave spojenjej s podlahou.
- Určte najmenšiu hodnotu v_{0m} začiatočnej rýchlosti v_0 , aby minca prešla celým oblúkom a dopadla do bodu C na podlahe.
- Určte uhol α , o ktorý sa zmení smer vektora zrýchlenia mince v bode A pri prechode z povrchu stĺpa na povrch oblúka pri začiatočnej rýchlosti vrhu v_{0m} .

Tiažové zrýchlenie $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, povrch oblúka je veľmi hladký a ;trenie medzi mincou a oblúkom je veľmi malé.

3. Zrážka strely s guľou

Na vlákne je v pokoji zavesená homogénna guľa s hmotnosťou M . Do gule narazila strela s hmotnosťou m rýchlosťou v , ktorá sa pohybovala vo vodorovnom smere po priamočiarej trajektórii prechádzajúcej stredom gule. V dôsledku zrážky sa rýchlosť v strely zmenila na výslednú polovičnú hodnotu $v/2$ v pôvodnom smere pohybu.

Uvažujte dva prípady:

- strela preletela cez guľu,
 - strela do gule neprenikla.
- Pre jednotlivé prípady určte rýchlosť V gule po zrážke, pomer p tepla Q uvoľneného pri zrážke a začiatočnej kinetickej energie E_{k0} strely a podmienky, za ktorých môžu jednotlivé prípady nastať. Určte tiež rozsah hodnôt, ktoré môže nadobudnúť pomer p pre obidva prípady.
 - Čo možno povedať o vlastnostiach materiálov strely a gule v jednotlivých prípadoch?
 - Uveďte, ktorý z prípadov nastane, ak pomer $q = m/M$ má hodnotu $q_1 = 0,50$, $q_2 = 1,0$, $q_3 = 2,0$ a $q_4 = 3,0$. Pre jednotlivé hodnoty určte hodnoty pomeru p a rýchlosti V gule po zrážke.

Predpokladajte, že pri zrážke sa hmotnosti telies nezmenia.

4. Ťažisko nádoby

Ak postavíme fľašu s minerálkou na posuvný pás pri pokladni v obchode, stáva sa, že pri zapnutí posunu pásu sa fľaša prevráti. Vedľa nej stojaci pohár s kompótom sa však neprevráti.

- a) Stručne uveďte, od čoho závisí, či sa nádoba prevráti? Aký pohyb pásu spôsobí prevrátenie? Odpoveď fyzikálne zdôvodnite. Situáciu znázornite na obrázku a vyznačte v ňom sily pôsobiace na fľašu pri zapnutí pásu.

Uvažujme tenkostennú sklenenú valcovú nádobu, ktorá má rovnakú hrúbku $d = 2,0$ mm dna i valcových stien, vnútorný polomer $r = 50$ mm a výšku $H = 25$ cm.

- b) Určte hmotnosť m_0 prázdnej nádoby.
c) Nádoba stojí podstavou na vodorovnom stole. Určte výšku h_0 ťažiska nádoby nad povrchom stola.

Do nádoby začneme nalievat' vodu a vodorovnú hladinu zaistíme tenkým piestom s veľmi malou hmotnosťou.

- d) Určte výšku h ťažiska nádoby s vodou ako funkciu výšky x vody v nádobe.
e) Zostrojte graf výšky ťažiska h ako funkcie výšky x vody v nádobe.
f) Z grafu určte výšku x_m vody v nádobe, pri ktorej je výška h ťažiska najmenšia.

Porovnajte stabilitu nádoby prázdnej, plnej a naplnenej iba do polovice jej výšky.

Uvažujte $d \ll r$ a $d \ll h_0$. Hustota vody $\rho = 1,0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, hustota skla nádoby $\rho_s = 2,6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

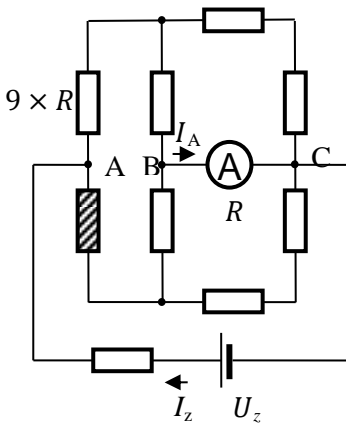
5 Balónik

Jurko sa v škole učil o vznášani balónov naplnených héliom. Rozhodol sa, že na princípe vznášania balónu si urobí jednoduchý barometer. Obstaral si balónik z veľmi jemného materiálu, sieťku z tenkého neroztťažného vlákna upletenú na povrchu gule s priemerom $r = 15$ cm. Balónik vložil do sieťky. Z bombičky do balónika napustil hélium na tlak $p_1 = 104$ kPa, ktorý je väčší ako atmosférický tlak okolitého vzduchu. Balónik naplnený héliom vyplnil priestor vymedzený sieťkou, guľu s polomerom r .

K balóniku pripevnil jedným koncom dlhú retiazku s dĺžkovou hmotnosťou $\mu = 5,0 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$. Voľnú časť retiazky dal do krabice na zem, odkiaľ ju mohol balónik pri svojom stúpaní vyťahovať. Po uvoľnení balónik pomaly vystúpil do ustálej výšky, pri ktorej bola dĺžka retiazky medzi balónikom a zemou h . Jurko očakával, že pri zmene atmosférického tlaku sa bude meniť dĺžka h zvislého úseku retiazky.

- a) Určte dĺžku h_0 retiazky, ak je balónik v rovnovážnej polohe pri normálnom atmosférickom tlaku okolitého vzduchu $p_0 = 101$ kPa a teplote $t_0 = 20,0$ °C.
b) Určte dĺžku h_1 retiazky, ak atmosférický tlak klesne na hodnotu $p_2 = 98$ kPa pri teplote $t_0 = 20,0$ °C.

c) Určte dĺžku h_2 retiazky, ak sa zmení teplota na hodnotu $t_2 = 25,0\text{ }^\circ\text{C}$ pri tlaku p_0 . Predpokladajte, že hmotnosť prázdneho balónika so sieťkou je veľmi malá v porovnaní s hmotnosťou visiacej retiazky. Teplota hélia i okolitého vzduchu je rovnaká. Mólová hmotnosť vzduchu $M_{\text{vz}} = 29,0\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, mólová hmotnosť hélia $M_{\text{He}} = 4,00\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.



Obr. C-2

6. Elektrický obvod

Na obr. C-2 je schéma elektrického obvodu, ktorý je tvorený zdrojom konštantného napätia $U_z = 12\text{ V}$ a deviatimi rezistormi s rovnakým odporom R . Vo vetve BC je zapojený ampérmetr s vnútorným odporom $R_A = 32\ \Omega$.

- Prúd ampérmetra $I_{A1} = 40\text{ mA}$. Určte prúd I_{z1} zdroja a odpor R rezistorov.
- Potom rezistor označený šrafovaním z obvodu vyradíme. Určte prúd I_{A2} ampérmetra a prúd I_{z2} zdroja v tomto prípade.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre dané hodnoty.

7. Tepelná kapacita – experimentálna úloha

Na Zemi je teplotne prijateľné prostredie pre život aj vďaka tomu, že zmeny teploty medzi dňom a nocou nie sú veľmi veľké. Je to spôsobené jednak pomerne krátkou periódou rotácie Zeme okolo jej osi a značnou schopnosťou zemského povrchu akumulovať teplo. Najväčší podiel na tejto schopnosti má voda. Je známe, že na mori kolíše teplota medzi dňom a nocou iba o niekoľko $^\circ\text{C}$, zatiaľ čo v púšti to môže byť až $30\text{ }^\circ\text{C}$. Vašou úlohou je preveriť tento jav v laboratórnych podmienkach.

Úloha 1: Na základe merania učte objemovú tepelnú kapacitu vody. Získanú hodnotu porovnajte s tabuľkovou hodnotou $c^* = 4,2 \times 10^6\text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$ a rozdiel zdôvodnite.

Úloha 2: Na základe merania určte objemovú tepelnú kapacitu piesku.

Úloha 3: Porovnajte rýchlosť chladnutia vody a piesku okolitým vzduchom. Výsledky merania posúďte a zdôvodnite v úvode spomenuté teplotné pomery v púšti.

Metóda:

K úlohe 1

Na meranie tepelnej kapacity vody použite vyhrievacie teliesko ponorené do vody. Ako vyhrievacie teliesko použite cievku z odporového drôtu alebo rezistor približne $10\ \Omega/10\text{ W}$ pripojený na zdroj konštantného jednosmerného napätia pri-

bližne 10 V. Vodu so zmeraným objemom nalejte do termosky z penového polystyrénu. Vykurovacie teliesko vložte do vody, pripojte zdroj a pomocou multimetra zmerajte prúd. Počas merania udržiavajte prúd konštantný. Teplomermi vloženým do vody merajte teplotu. Zdroj nechajte zapnutý až kým sa teplota zvýši približne o 20 °C a určte dobu zohrievania vody. Z nameraných hodnôt určte objemovú tepelnú kapacitu vody.

K úlohe 2

Pripravte si suchý jemný piesok. Zvážené množstvo piesku nasypete do odmerného valca. Určte hmotnosť a objem pisku. Piesok nechajte vo valci v miestnosti aspoň 1 hodinu, aby sa teplota piesku ustálila na teplote miestnosti. Teplotu miestnosti zmerajte. Do termosky nalejte vodu zohriatu na teplotu približne 60 °C. Zmerajte hmotnosť vody a jej teplotu. Do vody nasypete pripravený piesok a zmerajte výslednú teplotu po ustálení. Zvoľte hmotnosť piesku približne polovičnú v porovnaní s hmotnosťou vody. Z nameraných hodnôt určte objemovú tepelnú kapacitu piesku.

K úlohe 3

Použite dve rovnaké plastové vaničky od potravín. Do jednej nasypete suchý piesok až po okraj. Potom piesok vysypte do mikroténového vrečka a to vložte do väčšej nádoby so zohriatou vodou (približne 60 °C), aby sa piesok zohrial na teplotu vody. Teplotu vody s pieskom udržiavajte približne hodinu na rovnakej teplote. Teplotu vo vnútri piesku a teplotu vody kontrolujte teplomermi a sledujte, až sa teploty vyrovnajú. Keď sa teplota ustáli, vysypte piesok do jednej vaničky a do druhej nalejte po okraj vodu z nádoby (vaničky nechajte otvorené, aby mohli byť chladené vzduchom). Tak sa dosiahne rovnaký objem vody a piesku a rovnaká začiatočná teplota. Potom merajte v určitých časových intervaloch teplotu piesku a vody. Zaznamenajte i teplotu v miestnosti. Hodnoty zapisujte do tabuľky a po skončení zostrojte graf závislosti teploty piesku a vody od času. Určte čas, za ktorý poklesne rozdiel začiatočnej teploty a teploty miestnosti na polovicu pre piesok a pre vodu.

Pomôcky: Odporové teliesko s odporom približne 10 Ω a zaťažiteľnosťou 10 W, laboratórny zdroj konštantného jednosmerného napätia približne 10 V, multimeter. Polystyrénová termoska, odmerný valec, elektronické váhy, dva teplomery, varič, dve plastové vaničky, mikroténové vrečko, jemný suchý piesok (približne 1 kg).

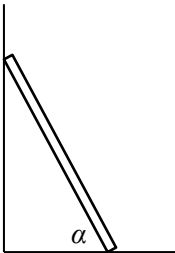
Kategória D

1. Križovatka

Do križovatky vzájomne kolmých ciest sa blížia dva automobily. Po hlavnej ceste automobil A konštantnou rýchlosťou $v_A = 90$ km/h, po vedľajšej automobil B rýchlosťou $v_B = 85$ km/h. Vodič automobilu B zbadá automobil A v okamihu $t = 0$, keď bola jeho vzdialenosť od križovatky $d_B = 350$ m. V tomto okamihu bola vzdialenosť automobilu A od križovatky $d_A = 400$ m.

- Vodič automobilu B usúdil, že križovatkou prejde bezpečne, ak bude pokračovať nezmenenou rýchlosťou v_B . Určte, či automobily prejdú bezpečne križovatkou. Za bezpečný považujeme prejazd križovatkou, pri ktorom je vzájomná vzdialenosť automobilov v okamihu prejazdu jedného z nich križovatkou najmenej $d_{\min} = 40$ m.
- Ak vodič automobilu B vo vzdialenosti $d_1 = 100$ m zistí, že by prejazd nezmenenou rýchlosťou nemusel byť bezpečný, rozhodne sa dať prednosť automobilu A a začne rovnomerne brzdiť. Určte zrýchlenie a automobilu B, aby prešiel križovatkou za automobilom A vo vzdialenosti, aby bola splnená podmienka bezpečnosti prechodu automobilov križovatkou, d_{\min} . Určte rýchlosť v_B^* , ktorú mal automobil v tomto prípade pri príchode na križovátku.

Rozmery automobilov v riešení úlohy neuvažujte.



Obr. D-1

2. Tyč opretá o zvislú stenu

Homogénna tyč stojí na vodorovnej podlahe opretá o hladkú zvislú stenu. Uhol medzi tyčou a vodorovnou podlahou je α , obr. D-1.

a) Nakreslite obrázok tyče opretej o stenu. Nakreslite v ňom vektory všetkých síl, ktoré na tyč pôsobia v podmienkach statickej rovnováhy.

b) Určte maximálnu hodnotu α_m uhla medzi tyčou a podlahou, pri ktorej zostáva tyč opretá o stenu.

Faktor statického trenia medzi tyčou a podlahou $f = 0,25$, trenie medzi zvislou stenou a tyčou neuvažujte.

3. Satelit

Satelit sa pohybuje okolo Zeme po kružnicovej trajektórii v rovine rovníka, v smere otáčania Zeme. Medzi dvomi po sebe nasledujúcimi preletmi nad rovnakým miestom na rovníku uplynie doba $\Delta t_1 = 3$ h 26 min.

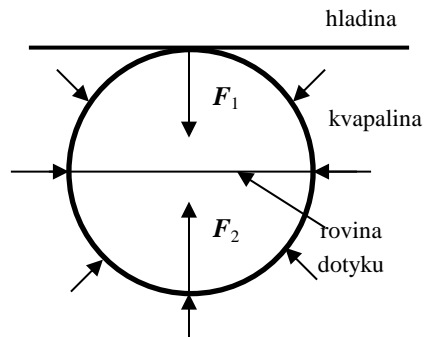
- Určte polomer r orbitálnej trajektórie a vyjadrite ho v násobkoch polomeru Zeme R .

- b) Určte orbitálnu rýchlosť v_1 družice a vyjadrite ju v násobkoch prvej kozmickej rýchlosti v_1 .
- c) Aký čas Δt_2 uplynie medzi dvoma po sebe nasledujúcimi preletmi satelitu nad rovnakým miestom na rovníku, ak sa satelit pohybuje po kružnicovej trajektórii s rovnakým polomerom r v rovine, ktorá obsahuje os Zeme.

Polomer Zeme $R \approx 6,4 \times 10^6$ m, gravitačné zrýchlenie v oblasti rovníka Zeme $g \approx 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

4. Guľa vo vode

Dutá guľa s vonkajším polomerom R skladajúca sa z dvoch pologúľ pláva v homogénnej kvapaline tak, že sa najvyšším bodom trvale dotýka vodorovnej voľnej hladiny, obr. D-2.



Obr. D-2

- a) Určte tlakovú silu F_1 , ktorou pôsobí kvapalina na hornú pologuľ, tlakovú silu F_2 , ktorou pôsobí kvapalina na dolnú pologuľ, a tlakovú silu F_3 , ktorou pôsobí dolná pologuľa na hornú. Sily vyjadrite ako funkcie polomeru R gule a hustoty ρ kvapaliny.
- b) Určte pomery síl $q_1 = F_2/F_1$ a $q_2 = F_3/F_1$.
- c) Určte hodnoty veličín F_1, F_2, F_3, q_1 a q_2 pre $\rho = 1,0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, $R = 5,0 \text{ cm}$ a $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

5. Skúška pravosti

Bohatý staroveký panovník si nechal zhotoviť u zlatníckych majstrov šachové figúrky z čistého zlata. Dovoľal sa však, že majstri chceli ušetriť, a preto vyrobili figúrky tak, že do zlata pridali aj lacnejšie striebro. Panovník poveril svojho radcu, aby toto podozrenie preveril.

Ten náhodne vybral jednu figúrku. Vážením zistil, že má hmotnosť $M = 82,0$ g. Potom figúrku zavesil na nitku a celú ju ponoril do valcového pohára s vnútorným priemerom $d = 56,0$ mm naplneného vodou. Meraním určil, že hladina vody v pohári pritom stúpala o $h = 1,8$ mm. Na základe týchto údajov vypočítal hmotnosť zlata vo figúrke.

- a) Určte hustotu ρ_{f1} figúrky, ktorú dostal na overenie. Zásadný vplyv na výsledok má presnosť merania. Veličiny s veľkými hodnotami M a d boli zmerané dosť presne. Najväčší problém bol s meraním malej hodnoty h posunutia hladiny. Radca určil hodnotu h s odchýlkou $\Delta h = \pm 0,3$ mm.

b) Určte rozsah hustoty získaný výpočtom so zohľadnením nepresnosti Δh merania.

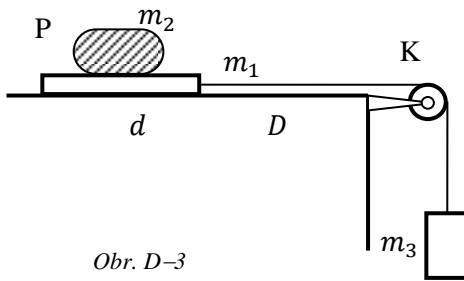
Potom uvážil, že váženie s odchýlkou $\Delta m = \pm 0,1$ g je podstatne presnejšie, a tak zvolil pre kontrolu ešte druhú metódu. Do pohára s hladkým rovinným okrajom naliat vodu až po vrch tak, že hladina bola v dôsledku povrchového napätia nad úrovňou okraja. Potom na pohár priložil sklenenú doštičku, ktorá zakryla celý povrch pohára, pričom pod sklom nezostala žiadna bublinka. Vodu, ktorá po priložení skla z pohára vytekla dôkladne vysušil. Pohár s vodou a sklom odvážil a dostal hodnotu $m_1 = 253,6$ g. Potom zdvihol sklo, do pohára opatrne vložil figúrku a opäť priložil sklenenú doštičku tak, aby pod ňou nezostala žiadna bublinka. Vodu, ktorá vytekla z pohára dôkladne vysušil. Pohár opäť odvážil a dostal hodnotu $m_2 = 331,0$ g. Z nameraných hodnôt opäť určil hustotu figúrky.

c) Určte vypočítanú hodnotu hustoty ρ_{f2} figúrky a rozsah hodnôt výsledku s ohľadom na chybu merania.

d) Bol radca schopný posúdiť, či je figúrka z čistého zlata na základe meraní prvou a druhou metódou?

e) Určte, akú časť η objemu figúrky predstavuje striebro. Výsledok vyjadrite v percentách.

Hustota zlata $\rho_1 = 19,3$ g · cm⁻³, hustota striebra $\rho_2 = 10,5$ g · cm⁻³, hustota vody $\rho = 1,00$ g · cm⁻³. Predpokladajte, že vo figúrke e nie sú žiadne dutiny.



6. Sústava telies spojených vláknom

V praxi sa stretávame s prípadom, keď potrebujeme z podložky ležiacej na stole zosunúť nejaký predmet, napr. tanieru z obrusu. Ak podložku (obrus) potiahneme dostatočne rýchlo, predmet (taniera) zostane na stole.

Uvažujte predmety podľa obr. D-3. Vodorovnú silu F pôsobiacu na podložku (dosku) s hmotnosťou m_1 a dĺžkou d realizujeme ťahovou silou vlákna, na ktorom je cez kladku K zavesené závažie s hmotnosťou m_3 . Na podložke sa nachádza predmet P s hmotnosťou m_2 . Závažie podržíme napr. rukou tak, že vlákno je napnuté, pričom vzdialenosť predného okraja podložky od okraja stola je D . V istom okamihu závažie uvoľníme.

a) Určte zrýchlenie a_1 pohybu podložky po uvoľnení závažia. Uvážte všetky možnosti pohybu a určte hmotnosť m_3 závažia, pri ktorej tieto možnosti nastanú.

b) Určte zrýchlenie a_2 predmetu na podložke po uvoľnení závažia.

c) Aká musí byť hmotnosť m_3 závažia, aby ťažisko predmetu P dosiahlo koniec podložky skôr, ako predný okraj podložky dosiahne okraj stola?

Faktory trenia f medzi podložkou a stolom i medzi podložkou a predmetom sú rovnaké. Vplyv kladky na pohyb telies neuvažujte. Na začiatku ťažisko predmetu sa nachádza nad stredom podložky.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty: $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $m_1 = 200 \text{ g}$, $m_2 = 500 \text{ g}$, $d = 30 \text{ cm}$, $D = 40 \text{ cm}$, $f = 0,35$ a pre dve rôzne hodnoty hmotnosti závažia $m_{3A} = 450 \text{ g}$ a $m_{3B} = 900 \text{ g}$.

7. Skúmavka – experimentálna úloha

Keď do veľkej nádoby s vodou vložíme prázdnu skúmavku, prevráti sa nabok. Aby zostala plávať v zvislej polohe, treba do nej naliať trocha kvapaliny. Pri nalievaní kvapaliny sa mení ponor skúmavky.

Navrhňte a realizujte metódu na určenie hmotnosti m skúmavky a hustoty ρ doliatej kvapaliny.

K dispozícii máte: veľkú nádobu s vodou, tenkostennú skúmavku, prúžok milimetrového papiera a meranú kvapalinu – odporúčaný je roztok soli vo vode.

Postup:

Potrebné vzťahy odvodíte.

Zmerajte príslušné veličiny pre tri rôzne kvapaliny (napr. roztoky soli s rôznou koncentráciou) a hodnoty zapíšte do tabuľky.

Vypočítajte hodnoty ρ a m pre každé meranie.

Pozn.: Rozdiel vnútorného a vonkajšieho priemeru skúmavky neuvažujte. Priemer skúmavky môžete merať mm mierkou, ale pre väčšiu presnosť môžete použiť posuvné meradlo. Pre dosiahnutie čo najväčšej presnosti pracujte s čo najväčším rozsahom výšky stĺpca kvapaliny v skúmavke.

62. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie A, B, C, D

Autori návrhov úloh:

Ivo Čáp A1,4,6,7,B3,7,C7,D1,

Ľubomír Konrád A1,3,5,6,B1,4-6,C1,3-6,D2-7,

Patrik Lamoš C2, Aba Teleki A2,B2

Recenzia a úprava úloh a riešení:

Daniel Klivanec, Ľubomír Mucha, Ivo Čáp

Redakcia:

Ivo Čáp

Vydal:

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020

INFORMÁCIE

61. Medzinárodná matematická olympiáda

19.–29. 9. 2020



Tento ročník Medzinárodnej matematickej olympiády (IMO) sa mal pôvodne konať v tradičnom júlovom termíne v Petrohrade, tieto plány však skrížila pandémia. V silnejúcej prvej vlne ruskí organizátori najprv tento termín posunuli na september, no postupne bolo čoraz jasnejšie, že ani v novom termíne sa matematickí olympionici nestretnú. Riadiaci výbor IMO sa preto rozhodol pre bezprecedentný krok zorganizovať IMO online. Celkovo sa ho napokon zúčastnilo 616 súťažiacich zo 105 krajín, čo v oboch ukazovateľoch (azda trochu prekvapivo) atakovalo existujúce rekordy.

Jarným vývojom pandémie bola zneistená aj Slovenská komisia MO. Tradičné marcové celoštátne kolo kategórie MO bolo totiž zrušené a vyzeralo to, že sa neuskutoční vôbec. Po májovom a júnovom uvoľnení protiepidemických opatrení sme sa (po dohode s českými kolegami, keďže všetky úlohy sú tradične spoločné) predsa len rozhodli, že celoštátne kolo sa bude konať, a to posledné dva dni školského

roka, samozrejme, dištančnou formou. Regulárnosť súťaže pritom zabezpečovali dôveryhodní učitelia poverení členmi príslušných krajských komisií. Cez prázdniny potom pod patronátom Patrika Baka prebehlo aj výberové sústredenie, ktorého výsledkom bola táto naša IMO zostava:

Viktor Csaplár, Gymnázium H. Selyeho, Komárno, 2. ročník,
 Jozef Fülöp, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 4. ročník,
 Matej Hanus, Gymnázium Poštová, Košice, 4. ročník,
 Lucia Krajčoviechová, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 4. ročník,
 Dávid Pásztor, Gymnázium J. A. Raymana, Prešov, 4. ročník,
 Matej Urban, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 3. ročník.

Vedúcim družstva SR bol predseda SKMO Peter Novotný a jeho zástupcom Stanislav Krajči. Na hodnotení riešení sa výrazne podieľali Marián Poturnay a Martin Vodička. Riešitelia pracovali na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, ktorú zabezpečila Monika Dillingerová, a na regularitu procesu riešenia dohliadol Pavol Klein. O ďalšie administratívne záležitosti sa postarali zástupcovia Iuventy, špeciálne jej pracovníčka a tajomníčka SK MO Barbora Knaperková.

Žiaci riešili počas dvoch dní (21. a 22. septembra) dve trojice úloh, za každú úlohu bolo možné dostať najviac 7 bodov. Plný počet 42 bodov získal jediný súťažiaci, a to Jinmin Li z Číny. Výsledky členov družstva SR na IMO sú uvedené v tabuľke:

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	Cena
Viktor Csaplár	7	0	1	7	0	0	15	bronz
Jozef Fülöp	7	0	0	7	1	0	15	bronz
Matej Hanus	7	0	0	7	1	0	15	bronz
Lucia Krajčoviechová	7	4	1	6	1	0	19	bronz
Dávid Pásztor	7	7	0	7	7	1	29	striebro
Matej Urban	7	2	0	6	7	1	24	striebro

Hranice na získanie bronzovej, striebornej a zlatej medaily boli tento rok (na naše šťastie) postupne 15, 24 a 31 bodov. Podľa pravidiel IMO medaily získava približne polovica účastníkov, a tí si delia zlaté, strieborné a bronzové v pomere 1 : 2 : 3. Čestné uznanie získavajú tí riešitelia, ktorí síce nedosiahli na medailu, ale vyriešili aspoň jednu úlohu na plný počet bodov.

V neoficiálnom poradí krajín, ktoré vznikne sčítaním bodov celého družstva, sme sa umiestnili so ziskom 114 bodov na 40. mieste, čo je oproti minulému roku pokles o 1 priečku. V tradičnom derby nás tentoraz Česko so 145 bodmi na 23.

mieste výrazne zdolalo, s ďalšími partnermi z V4 Poľskom a Maďarskom na 6., resp. 13. mieste už, žiaľ, prehrávame tradične. Prvú päťku tvorili postupne Čína, Rusko, USA, (Južná) Kórea a Thajsko. Kompletné výsledky a štatistiky možno nájsť na internetovej stránke IMO <http://imo-official.org>.

Tentoraz výber šestice súťažných úloh nebol zverený olympijskému „parlamentu“, ktorého členmi bývajú vedúci všetkých delegácií, ale zabezpečil ho výbor IMO. Úlohy sú volené vždy tak, aby v nich boli čo najrovnomernejšie zastúpené všetky štyri olympijské oblasti, a to algebra, geometria, kombinatorika a teória čísel. V jednotlivých dňoch sú úlohy obvykle radené podľa predpokladanej náročnosti. Veľkým úspechom je, že do užšieho výberu úloh (tzv. shortlistu) sa dostali až tri slovenské úlohy – dve od Patrika Baka a jedna od Martina Melichera.

Po odrieknutí organizácie zo strany USA sa budúci ročník IMO bude konať (dúfajme, že už naozaj) v Petrohrade v termíne 7. – 17. júla 2021. Nasledovať by mali Nórsko (2022) a Japonsko (2023).

Stanislav Krajčí¹

¹ Ústav informatických vied, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice, stanislav.krajci@upjs.sk.

extrapolácie 2020

história a budúcnosť IT na Slovensku

Extrapolácie sú podujatím, ktoré sa od roku 2015 organizuje v slovenských mestách a jedno z nich sa stane hlavným mestom. Hlavné mesto informatiky na Slovensku je dominantné v prezentácii svojej vlastnej úrovne, svojich možností a schopností, ale aj svojich problémov. Organizuje prezentácie čo najširšieho počtu IT organizácií vo svojom meste a regióne. Podujatia sa zúčastňujú aj ostatné slovenské mestá. Ich zapojenie dokazuje celoslovenskú úroveň Extrapolácií.

Cieľom podujatia je najmä

- prezentovať históriu slovenskej výpočtovej techniky, predstaviť súčasný stav výskumu, štúdia a produkcie v informatike a IT a hovoriť o víziách v blízkej budúcnosti,
- motivovať mladých ľudí k štúdiu a práci v oblasti IT,
- rozvíjať diskusie o informatike vo všetkých jej dimenziách a vplyvoch na spoločnosť.

Aktivitami sú motivačné prednášky, prezentácie, exkurzie a workshopy organizácií pôsobiacich v oblasti vzdelávania a výskumu v IT (akademické pracoviská, výskumné ústavy, študenti, verejné a štátne inštitúcie, IT firmy, ďalej firmy tvoriace softvér, hardvér, produkujúce a prevádzkujúce informačné systémy a komunikácie).

V roku 2020 nám pandemická kríza nám neumožnila usporiadať podujatie v takom rozsahu, na aký sme boli zvyknutí v predchádzajúcich ročníkoch. Na jar sme dúfali, že jeseň po prázdninách bude priaznivejšia, no prišla druhá vlna – skôr ako sme očakávali a postihla aj tradičné aktivity, ktoré sme organizovali v rámci Extrapolácií. Prijímame to však ako výzvu a rozhodli sme sa zamerať na to, čo v

súčasnosti najviac rezonuje v akademických kruhoch – narušenie vzdelávacieho procesu na všetkých stupňoch škôl. Preto cieľom Extrapolácií 2020 je vytvoriť priestor pre diskusiu o aktuálnych témach a podporiť pedagógov pri tvorbe materiálov z informatických predmetov, a to na stredných aj vysokých školách, vrátane škôl s netechnickým zameraním, vytvorením platformy pre zdieľanie študijných textov, kurzov, prezentácií a skúseností pri dištančnom vyučovaní informatiky. Prívítame aj zapojenie pedagógov na nižších stupňoch vzdelávania, ktorí by mohli prispieť svojimi skúsenosťami s aktuálnym stavom a rozvojom digitálnych zručností u najmladších školákov.

Neváhajte a napíšte nám na 2020@extrapolacie.sk

Viac informácií nájdete na stránke

<http://www.extrapolacie.sk/2020/>

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV

Adresa redakcie

Matematická a infromatická časť

Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť

Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje

JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
4/2020 ročník 49

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov.

Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Klivanec

Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki

Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková, Ivo Klivanec

Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík

Zástupca vydavateľa: Martin Kalina

Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Náklad: 550 kusov

Periodicita vydávania: štvrťročník

IČO vydavateľa: 00 178 705

Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava

Dátum vydania periodickej tlače: december 2020

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené

Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava

č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences"
OMFI 4/2020 Volume 49
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(<http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/>).

OBSAH

Jozef Doboš: Riešenie racionálnych nerovnic metódou intervalov.....	1
Jan Kopka: Hrozny problému ve školské matematice (1. část).....	9
Vojtech Bálint: László Rátz – učiteľ géniov.....	22
Zadania úloh 36. ročníka Olympiády v informatike (Michal Anderle a Michal Forišek)	29
Sós Katalin, Bartók Tamás, Nánai László : Groundwater Physics	39
Texty úloh 1. kola 62. ročníka Fyzikálnej olympiády (šk. r. 2020-2021) kategórie A, B, C, D	50
INFORMÁCIE	
61. Medzinárodná matematická olympiáda 19.-29.9.2020 (Stanislav Krajčí)	70
Extrapolácie 2020	73

CONTENTS

Jozef Doboš: Solving Rational Inequalities Using the Method of Intervals .	1
Jan Kopka: Clusters of Problems in School Mathematics	9
Vojtech Bálint: László Rátz – A Teacher of Geniuses	22
Tasks of the 36 th Olympiad in Informatics (Michal Anderle and Michal Forišek)	29
Sós Katalin, Bartók Tamás, Nánai László : Groundwater Physics	39
Tasks of the First Round of the 62 nd Physics Olympiad in School Year 2020 – 2021, Category A, B, C, D	50
INFORMATION	
61 st International Mathematical Olympiad 19 – 29 September 2020 (Stanislav Krajčí)	70
Extrapolations	73