OBZORY

2/2020 (49)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2020 ročník 49

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 2/2020 Volume 49

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Znám, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2020 (49)

VZDELÁVANIE V MATEMATIKE A INFORMATIKE

Riešenie rovníc graficky

Jozef Doboš

Abstract [Solving Equations Graphically]: In this paper, we would like to show how it is possible to solve equations in school Mathematics graphically.

Key words: solving equations graphically

Súhrn: V tomto článku chceme ukázať, ako možno graficky riešiť rovnice v školskej matematike.

Kľúčové slová: grafické riešenie rovníc

MESC: H30

Úvod

V tomto článku sa pozrieme na to, ako sa v minulosti v školskej matematike riešili rovnice graficky, ako možno dnes využiť na tento účel výpočtovú techniku, ako aj na užitočnosť takéhoto prístupu k hlbšiemu porozumeniu problematike riešenia rovníc.

Grafické riešenie kvadratickej rovnice

Ak chceme zistiť, čo to znamená „riešiť rovnicu graficky“, je vhodné siahnuť po starších učebniciach, ktoré sa používali vtedy, keď ešte osobné počítače neexistovali. Napríklad v učebnici [5] je celý odsek venovaný grafickému riešeniu kvadratickej rovnice, ktorá sa pre tento účel najskôr upraví do tvaru

$$x^2 = kx + q. \tag{1}$$

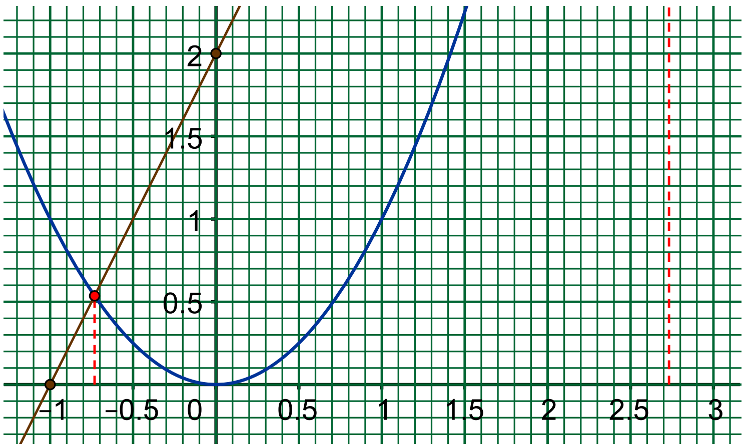
Pri grafickom riešení rovnice (1) postupujeme tak, že na milimetrový papier [1], na ktorom už máme dopredu narysovaný graf funkcie $y = x^2$ (čo najpresnejšie), narysujeme (pomocou pravítka) priamku, ktorá je grafom lineárnej funkcie $y = kx + q$. Korene rovnice (1) potom nájdeme ako x-ové súradnice priesečníkov týchto grafov.

Dnes si takýto milimetrový papier s grafom funkcie $y = x^2$ vieme pripraviť na počítači (napr. v programe GeoGebra). Môže byť súčasťou pracovného listu, v ktorom

[1] `www.freeprintablepdf.eu/en-millimeter-paper-pdf`

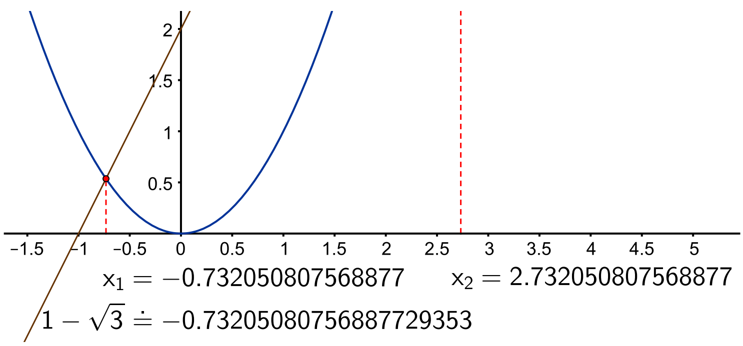
žiaci budú graficky riešiť kvadratické rovnice. Na obr. 1 vidíme výrez z milimetrového papiera, na ktorom sme graficky riešili rovnicu $x^2 = 2x+2$. Najskôr vyznačíme dva body, ktoré ležia na grafe lineárnej funkcie $y = 2x + 2$. Zvolili sme body $[-1, 0]$ a $[0, 2]$, ktoré ležia na súradnicových osiach, vezmeme pravítko a tieto dva body spojíme priamkou. Priesečníky tejto priamky s grafom funkcie $y = x^2$ určujú korene rovnice $x^2 = 2x + 2$. Korene potom odhadneme vizuálne: $-0.75 < x_1 < -0.70$, $2.70 < x_2 < 2.75$. Pre porovnanie, ich presné hodnoty sú:

$$x_1 = 1 - \sqrt{3} \approx -0.732, x_2 = 1 + \sqrt{3} \approx 2.732.$$



Obrázok 1. Grafické riešenie rovnice $x^2 = 2x + 2$ na milimetrovom papieri.

Dnes môžeme takéto grafické riešenie rovníc simulovať na počítači. Nemusíme sa spoliehať na vizuálny odhad koreňov, pretože GeoGebra nám umožňuje zobraziť súradnice týchto priesečníkov podstatne presnejšie. Môžeme to vidieť na obr. 2.



Obrázok 2. Grafické riešenie rovnice $x^2 = 2x + 2$ v programe GeoGebra.

Pomocou nástroja Intersect vyznačíme priesečníky priamky $y = 2x + 2$ a paraboly $y = x^2$. Nastavíme Rounding na 15 desatinných miest. V algebraickom okne sa nám zobrazia súradnice týchto priesečníkov. GeoGebra nám dokonca dovoľuje vyjadriť tieto súradnice pomocou odmocnín. Stačí použiť príkazy SurdText(B) a SurdText(A). Vidíme, že x-ová súradnica priesečníka B je číslo $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ a x-ová súradnica priesečníka A je číslo $x_2 = 1 + \sqrt{3}$, čo sú presné hodnoty koreňov rovnice $x^2 = 2x + 2$ (pozri obr. 3).

- **f: y = x²**
- **g: y = 2x + 2**
- **B = (-0.732050807568877, 0.535898384862245)**
- **A = (2.732050807568877, 7.464101615137754)**
- **text1 = "$\left(1 - \sqrt{3}, 4 - 2\sqrt{3}\right)$"**
- **text2 = "$\left(1 + \sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}\right)$"**

Obrázok 3. Použitie príkazov SurdText(B) *a* SurdText(A).

Týmto spôsobom môžeme pomocou programu GeoGebra riešiť aj iné rovnice. Dokonca aj také, ktoré nevieme riešiť analyticky. Napríklad rovnicu $\cos x = x$ (pozri obr. 4).

- **f(x) = cos(x)**
- **g(x) = x**
- **A = (0.739085133215161, 0.739085133215161)**

Obrázok 4. Grafické riešenie rovnice $\cos x = x$.

Pre porovnanie, v programe Wolfram Alpha pomocou príkazu `solve cos(x)=x` dostávame

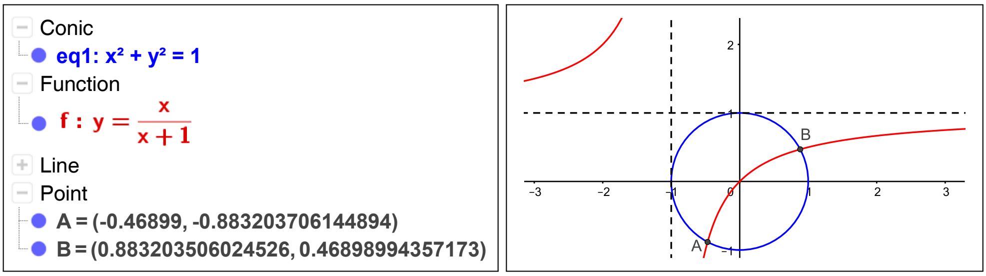
`0.73908513321516064165531208767387340401341`

Od grafického riešenia k analytickému riešeniu

Teraz si ukážeme, ako nám môže grafické riešenie rovnice pomôcť pri hľadaní jej analytického riešenia. Nasledujúca rovnica (pozri [1] a [3]) môže byť pre začiatočníkov náročná:

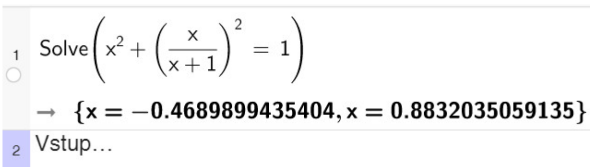
$$x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 1. \tag{2}$$

Položme $y = \frac{x}{x+1}$. Rovnica (2) potom prejde do tvaru $x^2 + y^2 = 1$, čo je rovnica jednotkovej kružnice so stredom v počiatku súradnicového systému. Pretože platí $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$, grafom funkcie $y = \frac{x}{x+1}$ je rovnoosá hyperbola s asymptotami $x = -1$ a $y = 1$. Grafické riešenie v programe GeoGebra môžeme vidieť na obr. 5.



Obrázok 5. Grafické riešenie rovnice (2) *v programe GeoGebra.*

GeoGebra nedokáže analyticky riešiť rovnicu (2) ani v okne počítačovej algebry (CAS), ktoré slúži na symbolické výpočty. Poskytne nám však presnejšie aproximácie koreňov rovnice (2), ako vidíme na obr. 6.



Obrázok 6. Riešenie rovnice (2) *v okne CAS.*

Analyticky riešiť rovnicu (2) dokáže program Wolfram Alpha. Stačí použiť príkaz `solve x^2+(x/(x+1))^2=1 over the reals`, čo dáva

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2} - 1},$$
$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2} - 1}.$$

Prirodzená otázka je, či sa dá k týmto koreňom dopracovať elementárnymi prostriedkami. Skúsili sme dať túto rovnicu vysokoškolákom, študentom matematiky v druhom ročníku bakalárskeho štúdia. Avšak dostali sa iba k nasledujúcej rovnici štvrtého stupňa, s ktorou si už nedokázali poradiť:

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0. \tag{3}$$

Na riešenie rovnice (3) použijeme metódu, ktorú sa učili žiaci gymnázií pred 200 rokmi. Môžeme sa o tom presvedčiť nahliadnutím do učebnice [2], kde je príslušný postup pekne metodicky spracovaný. V podstate ide o metódu neurčitých koeficientov. Budeme riešiť rovnicu

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{4}$$

jej úpravou do tvaru

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0. \tag{5}$$

Potom už bude ľahké rozložiť ľavú stranu rovnice (5) na súčin dvoch kvadratických trojčlenov s využitím vzorca $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Rovnica (3) je špeciálnym prípadom rovnice (4), kde $a = 2$, $b = 1$, $c = -2$, $d = -1$. Preto dosadíme $a = 2$ do rovnice (5), čím dostávame

$$(x^2 + x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0. \tag{6}$$

Hľadáme reálne čísla p, q, r. Z rovnice (6) po malých úpravách dostávame

$$x^4 + 2x^3 + (2p - q^2 + 1)x^2 + (2p - 2qr)x + p^2 - r^2 = 0. \tag{7}$$

Porovnaním koeficientov pri jednotlivých mocninách premennej x v rovniciach (7) a (3) dostávame nasledujúcu sústavu rovníc:

$$\left.\begin{aligned} 2p - q^2 + 1 &= 1, \\ 2p - 2qr &= -2, \\ p^2 - r^2 &= -1. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Sústavu (8) prepíšeme do tvaru

$$\left.\begin{aligned} q^2 &= 2p, \\ qr &= p + 1, \\ r^2 &= p^2 + 1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Druhú rovnicu sústavy (9) umocníme na druhú. Tým dostávame rovnicu $q^2r^2 = (p+1)^2$, ktorej ľavú stranu upravíme s využitím prvej a tretej rovnice sústavy (9). Tým vznikne rovnica $2p(p^2 + 1) = (p + 1)^2$, ktorú upravíme do tvaru

$$p^2(2p - 1) = 1. \tag{10}$$

Najskôr sa pozrieme, či táto rovnica nemá celočíselné korene. Ak celé číslo p je koreňom rovnice (10), potom číslo p^2 musí byť deliteľom čísla 1, pričom musí platiť $2p-1>0$. Odtiaľ dostávame $p=1$. Dosadením do rovnice (10) sa presvedčíme, že číslo $p=1$ je naozaj jej koreňom. Toto číslo teraz dosadíme do sústavy (9), čo dáva $q^2=2$, $qr=2$, $r^2=2$. Z prvých dvoch rovníc máme $q=r$. Pretože $p=1$, $q=r$ a $r^2=2$, z rovnice (6) postupne dostávame

$$\begin{aligned}(x^2+x+1)^2-(rx+r)^2&=0,\\(x^2+x+1)^2-r^2(x+1)^2&=0,\\(x^2+x+1)^2-2(x+1)^2&=0.\end{aligned}\tag{11}$$

Už stačí iba rozložiť ľavú stranu rovnice (11) na súčin dvoch kvadratických trojčlenov s využitím vzorca $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Rovnica (11) sa rozpadne na dve kvadratické rovnice, ktoré už vieme riešiť. To už zvládnete sami.

Teraz príde (možno) malé prekvapenie. K tomu je potrebné vrátiť sa úplne na začiatok, k rovnici (2). Ide o doplnenie na štvorec, konkrétne o použitie vzorca $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

$$\begin{aligned}x^2+(\tfrac{x}{x+1})^2&=1,\\(x-\tfrac{x}{x+1})^2&=1-\tfrac{2x^2}{x+1},\\(\tfrac{x^2}{x+1})^2&=1-\tfrac{2x^2}{x+1}.\end{aligned}\tag{12}$$

Substitúciou $t=\frac{x^2}{x+1}$ prevedieme rovnicu (12) na kvadratickú rovnicu. To už zvládnete sami.

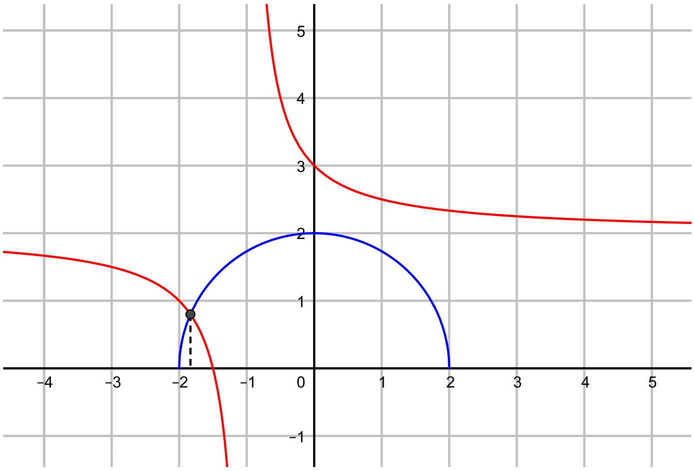
Podobná, ale zložitejšia rovnica sa rieši graficky v článkoch [9] a [10]. Konkrétne, ide o rovnicu

$$\sqrt{4-x^2}=\tfrac{1}{x+1}+2.\tag{13}$$

Grafom funkcie $y=\sqrt{4-x^2}$ je polkružnica, grafom funkcie $y=\frac{1}{x+1}+2$ je hyperbola. Rovnicu (13) môžeme riešiť graficky v programe Geogebra (pozri obr. 7).

GeoGebra nedokáže analyticky riešiť rovnicu (13) ani v okne počítačovej algebry (CAS). Poskytne nám však presnejšiu aproximáciu koreňa, ako môžeme vidieť v nasledujúcej tabuľke:

GeoGebra, grafické riešenie	`-1.833147236250533`
GeoGebra, riešenie v okne CAS	`-1.833147236558`
Wolfram Alpha	`-1.8331472365575115793315 35`



Obrázok 7. Grafické riešenie rovnice (13).

Analytické riešenie nám poskytne až Wolfram Alpha:

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{271-6\sqrt{633}}+\sqrt[3]{271+6\sqrt{633}}}}} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{271-6\sqrt{633}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{271+6\sqrt{633}} + 8\sqrt{\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{271-6\sqrt{633}}+\sqrt[3]{271+6\sqrt{633}}}}\right)}$$

K tomuto analytickému riešeniu rovnice (13) sa môžeme dopracovať podobným spôsobom, ako pri rovnici (2). Najskôr prevedieme rovnicu (13) do tvaru

$$x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 5 = 0, \tag{14}$$

ktorú riešime metódou neurčitých koeficientov, t.j. snažíme sa upraviť rovnicu (13) do tvaru (5). Tak dostávame sústavu rovníc

$$\left.\begin{aligned} 2p - q^2 + 1 &= 1, \\ 2p - 2qr &= 4, \\ p^2 - r^2 &= 5, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

ktorá nás privedie k nasledujúcej kubickej rovnici

$$2p^3 - p^2 - 6p - 4 = 0,$$

ktorá má jediný reálny koreň

$$p = \frac{1}{6}\left(1 + \sqrt[3]{271 - 6\sqrt{633}} + \sqrt[3]{271 + 6\sqrt{633}}\right).$$

K tomu si však treba naštudovať riešenie rovníc tretieho stupňa, čo je tiež pekne vysvetlené v učebnici [2]. Koreň rovnice (13) potom môžeme nájsť riešením nasledujúcej kvadratickej rovnice:

$$x^2 + \left(1 + \sqrt{2p}\right)x + p + \sqrt{p^2 - 5} = 0.$$

Grafické riešenie rovníc v zahraničných učebniciach

Tejto problematike sa v poslednej dobe venuje zvýšená pozornosť v zahraničí. Súvisí to s rozvojom informačných technológií a ich používaním v školskej matematike. Nasledujúce porovnanie algebraického a grafického spôsobu riešenia rovníc sme prevzali z učebnice [6]:

metóda riešenia	*výhody*	*možné nevýhody*
algebraická	Dáva exaktné riešenia. Najjednoduchšia metóda pre väčšinu lineárnych a kvadratických rovníc.	Môže byť ťažké alebo nemožné ju použiť pri zložitých rovniciach.
grafická	Funguje dobre pre veľa rozličných typov rovníc. Poskytuje vizuálny obraz o lokalizácii riešení.	Riešenia môžu byť často iba približné. Nájdenie vhodného grafického okna môže zabrať dosť veľa času.

Na ukážku ešte uvedieme niekoľko úloh na grafické riešenie rovníc s využitím informačných technológií, ktoré sme prevzali zo zahraničných učebníc (pozri [4], [6], [7] a [8]):

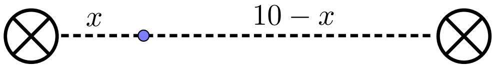
1) $(x+1)(x-3) = \sqrt{x+3}$, **2)** $x + \sqrt[3]{x} + 4 = 0$, **3)** $x^4 + 2^{-x} - 30 = 0$,

4) $x^5 + 5 = 3x^4 + x$, **5)** $10^x - \frac{1}{4}x = 28$, **6)** $x^3 + \cos\left(\frac{x}{3}\right) = 5$,

7) $\log_2(x^3 + x - 1) = 5$, **8)** $2^{x-2} = \log x^4$, **9)** $2^x - x^2 = x$.

10) Dva zdroje svetla sú od seba vzdialené $10\,\mathrm{m}$. Jeden je trikrát intenzívnejší ako druhý. Intenzita svetla[2] (v luxoch) v bode x metrov od slabšieho zdroja je daná vzťahom

$$L = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10-x)^2}.$$



Nájdite body, v ktorých je intenzita svetla $L = 4$ luxy.

Záver

Grafické riešenie rovníc sa ukazuje ako vhodný materiál pri využívaní informačných technológií vo vyučovaní matematiky. Ak však chceme naplno využiť ich potenciál, musíme venovať zvýšenú pozornosť výberu vhodných úloh, na ktorých môžeme ukázať žiakom na jednej strane, ako sa nám rozšíri spektrum úloh, ktoré môžeme týmto spôsobom riešiť, ale na druhej strane aj ako môže použite informačných technológií ovplyvniť rozvoj ich matematických kompetencií.

Literatúra – References

[1] Arcavi, A., Drijvers, P., Stacey, K.: The Learning and Teaching of Algebra. Ideas, Insight and Activities, Routledge, 2017.

[2] Фусс, Н. И.: Начальные основания чистой математики. Часть 1. Содержащая начальные основания алгебры, Санктпетербургъ, 1820.

[3] Guzmán Ozámiz, M. de: Para Pensar Mejor. Desarrollo de la Creatividad a Través de los Procesos Matemáticos, Pirámide, Madrid, 1995.

[4] Haese, M., Humphries, M., Sangwin, Ch., Vo, N.: Mathematics: Core Topics HL, for use with IB Diploma Programme, Haese & Harris Publications, 2019.

[5] Holubář, J., Hradecký, F., Hruša, K., Kasková, E., Kolibiar, M., Krňan, F.: Algebra pre 9. – 11. postupný ročník všeobecnovzdelávacích škôl, SPN, Bratislava, 1954.

[6] Hungerford, T. W., Shaw, D. J.: Contemporary Precalculus: A Graphing Approach, Thomson Brooks/Cole, 2009.

[7] Rockswold, G. K.: Essentials of College Algebra with Modeling and Visualization, Addison-Wesley, Pearson Education, 2012.

[8] Stewart, J., Redlin, L., Watson, S.: Precalculus, Mathematics for Calculus, Brooks/Cole Cengage Learning, 2016.

[2] Intenzita svetla je nepriamo úmerná druhej mocnine vzdialenosti od svetelného zdroja.

[9] Tabov, J., Velchev, A.: Computer-aided graphical solving of equations of the form $f(x) = g(x)$, MASSEE International Congress on Mathematics, MICOM 2009, 16 – 20 September 2009, Ohrid, Republic of Macedonia, Proceedings, 183 – 189.
[10] Tabov, J., Velchev, A.: Computer-aided graphical solving of equations of the form $f(x) = g(x)$, Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica), G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy), Issue 20 (2010), 154 – 160.

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/0265/17 *Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky*.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2020 (49)

Přímá a nepřímá úměrnost (nekorektní stať o kritickém myšlení)

Jindřich Bečvář

Abstract [Direct and Indirect Proportion (Incorrect Treatise on Critical Thinking)]: The article is devoted to several types of problems from school mathematics. It shows possible uses of the rule of three, direct proportion, and indirect proportion. Some pitfalls that need to be avoided are demonstrated on several examples.

Key words: Direct proportionality, indirect proportionality, rule of three, fairy tale, chocolate

Souhrn: Článek je věnován různým typům problémů školské matematiky. Ukazuje, kdy je možné použít trojčlenku, kdy přímou, resp. nepřímou úměrnost. Na několika příkladech jsou ukázána úskalí, s nimiž se můžeme setkat.

Klíčová slova: Přímá úměrnost, nepřímá úměrnost, trojčlenka, pohádka, čokoláda
MESC: F80, B50, I30

Rozlišení přímé a nepřímé úměrnosti je důležitým okamžikem základního matematického vzdělávání (viz např. [5]). Následující řádky se pokoušejí přispět k hlubšímu porozumění této problematice. Cílem naší odborné stati je pouze a jedině poučení čtenářů, v žádném případě se nejedná, ale opravdu nejedná o pobavení.

1 Přímá úměrnost – trojčlenka a její meze

Na základní škole jsme před mnoha lety řešili řadu úloh, které vedly na přímou úměrnost (přímou závislost). Například:

Příklad 1.1
Pět kilogramů jablek stojí 275 Kč. Kolik stojí sedm kilogramů jablek? [1]

Článek vznikl přepracováním příspěvku Matematika dne svátečního*, Sborník mezinárodního kalorimetrického semináře, Kalsem, 2019.*

[1] Cenu jablek autor „inovoval“ k roku 2020.

Učili jsme se je nejprve řešit úvahou (nejprve vypočteme, kolik stojí jeden kilogram, a pak kolik stojí sedm kilogramů), vzápětí jsme došli k trojčlence. Naučili jsme se vytvořit schéma se souhlasně zakreslenými šipkami postihujícími přímou úměrnost, které navozují, že poměry čísel utvořené ve směru šipek se rovnají. [2]

Řešení. Užijeme trojčlenku, tj. utvoříme schéma

$$\begin{array}{cccc} \Big\uparrow & 5 & 275 & \Big\uparrow \\ & 7 & x & \end{array}$$

Poměry čísel utvořené ve směru šipek se rovnají, proto je $7 : 5 = x : 275$, tedy $x = \frac{7 \cdot 275}{5} = 385$.

V minulosti se někdy návod pro výpočet neznámé veličiny označoval jako *křížové pravidlo*. Vyjádřeno je podobným schématem:

$$\begin{array}{ccc} 5 & & 275 \\ & \times & \\ 7 & & x \end{array}$$

Součiny křížem se rovnají, tj. $5 \cdot x = 7 \cdot 275$, což vede pochopitelně ke stejnému výsledku.

Odpověď. Sedm kilogramů jablek stojí 385 Kč. [3]

Někdy se však můžeme setkat i s příklady, které nás nutí zamyslet se – samozřejmě kriticky, nejlépe hlavou (obvykle vlastní) – nad otázkou, kdy lze a kdy nelze přímou úměrnost aplikovat. Následující příklady z tohoto důvodu zařadil Eduard Čech (1893 – 1960) do své učebnice *Aritmetika pro I. třídu středních škol* (viz [2], str. 51).

- 6 *ručníků se vysuší na slunci za* 30 *minut. Za jak dlouho se vysuší* 8 *ručníků?* [4]
- *Chlapci je* 12 *let a jeho výška je* 150 *cm. Jaká bude jeho výška, až mu bude* 24 *let?*

---

[2] V některých letech badatelé studující vyučovací metody užívání šipek ve škole „nedoporučovali“. Žáci měli šipky zakázané.

[3] Odpovídáme zásadně celou větou, i když se to dnes ve školách často zatracuje. Rozvíjíme tak jazykové schopnosti žáků. Navíc si žáci uvědomí, co vlastně vypočítali.

[4] Při výuce lze diskutovat o tom, jak se změní situace, bude-li ručníků např. 500. Než pověsíme poslední ručník na šňůru, bude patrně již první ručník suchý. A budeme mít tak dlouhou šňůru? A tak velkou pračku? Pedagog může tímto způsobem v diskusích rozvíjet kritické myšlení svých žáků.

- 1 *cestovatel vidí z věže do vzdálenosti* 24 *km. Do jaké vzdálenosti vidí* 5 *cestovatelů?* [5]

Výše uvedené úlohy z učebnice [2] se staly vděčným námětem novinového článku Richarda Havelky (1883 – 1964) nazvaného *Odstraňte matematiku ze škol.* [6] Autor vypráví tragický příběh rodiny svého dobrého přítele Karla, který se snažil pomáhat synu Jardovi s řešením výše uvedených úloh. Příběh končí smutně:

...přítel Karel chodí po ulicích s dětským počitadlem v ruce, přehazuje barevné kuličky a temně skuhrá: „Až bude našemu Jardovi čtyřiaosmdesát, bude měřit deset a půl metru. Kde já tomu klukovi seženu na kalhoty?“

Říkám vám pánové, zrušte matematiku! [7]

Naučené postupy na přímou úměrnost nelze aplikovat mechanicky i z jiných důvodů. Uveďme zajímavý zlomek ze Simplikia (6. století):

...důkaz, na který se dotazoval Zénón sofisty Prótágory: „Pověz mi, Prótágoro,“ řekl, „zda působí zvuk jedno prosné zrno, upadne-li, nebo jedna desítitisícina zrna?“ A když on řekl, že nepůsobí, tázal se: „Upadne-li měřice prosa, působí zvuk či ne?“ Když pak on řekl, že měřice působí, pravil Zénón: „Jak pak, není jakýsi poměr měřice prosa k jednomu zrnu a k desítitisícině jednoho?“ Když on uznal, že jest, pravil Zénón: „Jak pak, nebudou také tytéž vzájemné poměry zvuků? Neboť jak zvučící předměty, tak také zvuky. Ježto je tomu tak, vydává-li zvuk měřice prosa, vydá jej též jedno prosné zrno i desítitisícina zrna.“ ([4], str. 76)

A co když upadne molekula či atom prosného zrna? A může vůbec atom upadnout? A může upadlý atom vydat zvuk? Uvědomme si, že závislosti, které v běžných rozměrech, resp. za běžných podmínek fungují, nelze bez rozmyslu extrapolovat (připomeňme např. supravodivost). Jsme schopni přesně vymezit, která z otázek má ještě smysl a která již smysl nemá?

Na závěr uveďme dva vzorově řešené příklady rozvíjející kritické myšlení.

Příklad 1.2

Součet velikostí úhlů v trojúhelníku je 180°. Jaký je součet velikostí úhlů ve čtyřúhelníku?

---

[5] Opět vhodný příklad pro kritickou didaktickou diskusi. Budou-li např. na věži dva milenci (stejného či dvou různých pohlaví z dvaapadesáti možných), budou třeba hledět jen do vzdálenosti zhruba 3 cm.

[6] Havelkův článek autor tohoto příspěvku našel v jedné staré učebnici, kterou před lety koupil v antikvariátu. Vyšel v Lidové demokracii 25. ledna 1948 (č. 20) na str. 4.

[7] S obdobně fundovanými argumenty k redukci matematiky (tzv. provětrávání) či zrušení (maturity z) matematiky se dnes setkáváme poměrně často.

Řešení. Užijeme trojčlenku:

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & 3 & 180^\circ & \uparrow \\ \Big| & 4 & x & \Big| \end{array}$$

Proto je $x : 180 = 4 : 3$, tedy $x = 240^\circ$.
Odpověď. Součet velikostí úhlů ve čtyřúhelníku je 240°. [8]

Příklad 1.3
Ze sudu o objemu 25 litrů byl odebrán vzorek o objemu $1,2$ litru. Bylo zjištěno, že obsahuje $8,4\,\%$ dusíku. Kolik procent dusíku je v celém sudu?

Řešení. Užijeme opět trojčlenku:

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & 1,2 & 8,4\,\% & \uparrow \\ \Big| & 25 & x & \Big| \end{array}$$

Proto je $x : 8,4 = 25 : 1,2$, tedy $x = 175\,\%$.
Odpověď. V sudu je 175 % dusíku. [9]

2 Přímá úměrnost – vícenásobná trojčlenka

Někdy však mohou do hry vstoupit dvě nebo více závislostí. Uvedeme dva příklady.

Příklad 2.1
Jedna a půl slepice snese jedno a půl vejce za jeden a půl dne. Kolik vajec snese pět slepic za šest dní?

Řešení. V první řadě zdůrazněme, že ze zadání úlohy nevyplývá, že jedna slepice snese za jeden den jedno vejce. Správná úvaha je takováto: 3 slepice snesou 3 vejce za jeden a půl dne, tedy 3 slepice snesou 6 vajec za 3 dny, jedna slepice snese 2 vejce za 3 dny. Odtud vyplývá, že 5 slepic snese 10 vajec za 3 dny a tedy 20 vajec za 6 dnů.

Příklad lze rovněž řešit tzv. dvojitou trojčlenkou, resp. zobecněním křížového pravidla, neboli *řetězovým pravidlem*: [10]

---

[8] Čtenáři doporučujeme, aby výsledek prověřil pro čtverec. Součin 4×90 může vypočítat krokováním.

[9] Autor doporučuje čtenáři, pokud je mu více než 18 let, aby před dalším čtení požil stopečku stopětasedmdesátiprocentní slivovičky.

[10] Poučit se o řetězovém pravidlu (*figura cata*) můžeme například v knize [1].

$$\begin{array}{ccccc} 1\frac{1}{2} & & 1\frac{1}{2} & & 1\frac{1}{2} \\ & & & & \\ 5 & & x & & 6 \end{array}$$

Součiny křížem se rovnají, tj.

$$1\frac{1}{2} \cdot x \cdot 1\frac{1}{2} = 5 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 6, \quad \text{tedy} \quad x = 20.$$

Odpověď. Pět slepic snese za šest dnů dvacet vajec.

Zadání předchozího příkladu mnohé fascinuje. Pravda je, že není zrovna obvyklé přepočítávat výkon chovu slepic na to, kolik snese jedna a půl slepice za jeden a půl dne. Život však velmi často přináší překvapivější a nepříjemnější úkoly, které musíme řešit. Zvykejme si.

Příklady obdobného typu, ale komplikovanější, se nalézají například v proslulé knize *Liber abaci* Leonarda Pisánského, zvaného Fibonacci (asi 1170 až asi 1240).

Příklad 2.2
12 římských mincí odpovídá 31 pisánským, 23 pisánských odpovídá 12 janovským, 13 janovských 12 turínským, 11 turínských 12 barcelonským. Kolik barcelonských mincí dostaneme za 15 římských?

Řešení. Aplikujme řetězové pravidlo, návod k řešení je znázorněn odpovídajícím schématem:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & & 12 & & 13 & & 31 & & 12 \\ & & & & & & & & \\ 12 & & 11 & & 12 & & 23 & & 15 \end{array}$$

Součiny křížem se rovnají, proto je

$$x \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 12 = 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 31 \cdot 15, \quad \text{tedy} \quad x = 20\,\frac{1180}{3289}.$$

Odpověď. Za 15 římských mincí dostaneme 19 barcelonských. [11]

[11] Co by tehdejší směnárna se získaným výsledkem dělala? Lze se oprávněně domnívat, že by za patnáct římských mincí klientovi vyplatila **nejvýše** devatenáct barcelonských mincí. Musí přeci dostatečně vydělat. Nedělejme si iluze o postupech tehdejších bankéřů, finančníků a dalších vydřiduchů – vždyť známe ty dnešní.

3 Nepřímá úměrnost – trojčlenka a její meze

Začneme opět jednoduchým příkladem ze základní školy.

Příklad 3.1
Materiál pro stavbu, který by pět aut odvezlo za dvanáct dnů, bude vozit šest aut. Kolik dnů budou potřebovat?

Řešení. Úloha opět vede na trojčlenku, která tentokrát postihuje nepřímou úměrnost – šipky míří opačnými směry. Poměry ve směru šipek se rovnají:

$$\begin{array}{cccc} \Big\uparrow & 5 & 12 & \Big| \\ \Big| & 6 & x & \Big\downarrow \end{array}$$

Proto je $6 : 5 = 12 : x$, tedy $x = \frac{5 \cdot 12}{6} = 10$.
Odpověď. Na odvezení materiálu šesti auty bude zapotřebí deset dnů.

Zdůrazněme, že pro odlišení přímé a nepřímé úměry jsou šipky velmi vhodným nástrojem. Závažným okamžikem při řešení slovních úloh je ovšem rozpoznání, zda se jedná o přímou či nepřímou úměrnost. Proto jsou takovéto úlohy (a matematika vůbec) tak potřebné pro rozvoj kritického myšlení.

Opět lze poukázat na nebezpečí mechanického počítání bez hlubšího porozumění. I když se zdá situace jak dělaná pro užití trojčlenky postihující nepřímou úměrnost, nemusíme bezmyšlenkovým postupem dojít ke správnému výsledku. Uveďme dva příklady:

Příklad 3.2
Dva montéři zašroubují 200 šroubů za 50 minut. Za jak dlouho zašroubují tři montéři 100 šroubů? (Předpokládáme, že všichni pracují stejně rychle.)

Řešení. Zdálo by se, že užitím trojčlenky snadno vypočteme, že tři montéři zašroubují 100 šroubů za $\frac{50}{3}$ minuty, tj. za $16\frac{2}{3}$ minuty. Uvažujme však raději takto. Jeden montér zašroubuje jeden šroub za půl minuty, dva šrouby za minutu, tedy tři montéři za 16 minut zašroubují $3 \cdot 2 \cdot 16 = 96$ šroubů, za další půl minuty zašroubují další tři šrouby a pro zašroubování posledního šroubu je zapotřebí další půlminuta (pracuje jen jeden montér, ostatní na něj se zalíbením hledí). Poslední čtyři šrouby mohou během jedné minuty zašroubovat dva montéři, zatímco třetí odpočívá celou minutu. [12]

---

[12] Může se stát, že se montéři pohádají o to, kdo má zbylý šroub zašroubovat a čas na zašroubování šroubů tím podstatně naroste. A opět máme ve třídě vhodné téma pro bezbřehou diskusi o spravedlnosti při rozdělování práce, která bude zcela jistě rozvíjet kritické myšlení žáků.

Celkem je tedy zapotřebí 17 minut. Řešení je pochopitelně „akademické“, neobráží reálné poměry. [13]
Odpověď. Na zašroubování 100 šroubů potřebují tři montéři 17 minut.

Příklad 3.3
Tři kopáči potřebují na vykopání 68 metrů příkopu osm dnů. Za jak dlouho jej vykope 1 600 kopáčů?

Řešení. Jeden kopáč by potřeboval 24 dnů. Pokud by však tento příkop mělo kopat 1 600 kopáčů, vyšlo by užitím trojčlenky 0,015 dne, tj. 0,36 hodiny, tj. necelých 21,6 minut. Pokud by mělo tento příkop kopat 1 600 kopáčů, pak správná otázka zní: *Kolik bude mrtvých?*

Opět zdůrazíme, že často nejsme schopni přesně vymezit, jaká otázka má a jaká nemá smysl. V uvedeném příkladu má otázka smysl pro deset kopáčů, pro pět stovek kopáčů však patrně smysl nemá. Jsme schopni smysluplný počet kopáčů přesněji vymezit?

Někdy je však situace poměrně jednoduchá. V duchu příkladů z učebnice [2] můžeme vytvořit několik obdobných příkladů na nepřímou úměrnost, které nevyžadují početní schopnosti, ale pouze zdravý rozum. [14]

- *Natalka má IQ* 100 *a mobil za* 15 *tisíc korun. Pavel má mobil za* 22 *tisíc korun. Jaké je jeho IQ?*
- *Hodinář opraví náramkové hodinky značky Tiktak za* 70 *minut. Za jak dlouho opraví tyto hodinky pět hodinářů?*

4 Literární odbočka

Příklady na přímou či nepřímou úměrnost jsou často formulovány jako tzv. slovní úlohy. Čtenáře v tomto okamžiku odkazujeme na zasvěcený článek kanadského spisovatele Stephena Leacocka nazvaný *A, B a C* z knížky [3], str. 62 – 66. [15] Začíná takto:

---

[13] Tento fakt nás nemusí trápit. Většina úloh školské matematiky nemá s realitou mnoho společného.

[14] Autor článku zcela zásadně pochybuje o tom, že zdravý rozum produkuje to, čemu se dnes říká kritické myšlení.

[15] Stephen Leacock (1869 – 1944) byl nejprve středoškolským učitelem, později profesorem politické ekonomie na McGill-University v Montrealu, členem Kanadské královské společnosti, získal několik čestných doktorátů, je autorem ekonomických, politologických a historických prací. Proslavil se jako humorista psaním velmi úspěšných povídek a fejetonů, které byly opakovaně vydávány a překládány. U nás jsou patrně nejznámější jeho *Literární poklesky* (*Literary Lapses*), které geniálně přeložil František Vrba (1920 – 1985). Knížku vřele doporučujeme laskavému čtenáři. A nakonec i těm ostatním.

Žák studující aritmetiku, který zvládne čtyři základní početní výkony a nedá se zlomit ani zlomky se náhle octne tváří v tvář nesmírné rozloze otázek, známých jako slovní příklady, ačkoli nejsou přikládány, nýbrž ukládány, a měly by se tedy spíše jmenovat úklady. Jsou to krátké povídky o lidské houževnatosti a píli s vynechaným koncem, a třebaže mezi sebou nezapřou až fádní rodinnou podobnost, nepostrádají přece jen jisté romantiky. Hrdinové zápletky takového příkladu jsou tři muži zvaní A, B a C. Forma otázky bývá přibližně tato:

„A, B a C konají jistou práci. A vykoná za jednu hodinu tolik, kolik B za dvě hodiny nebo C za čtyři hodiny. Vypočtěte, jak dlouho jim ta práce trvá.“

5 Další úlohy na rozvíjení kritického myšlení [16]

Nejprve uveďme jeden řešený příklad na dvojitou trojčlenku. [17]

Příklad 5.1
Šedesátičlenný symfonický orchestr zahraje Beethovenovu Pátou za 32 minut. Za jak dlouho zahraje Beethovenovu Devátou kvarteto? [18]

Řešení. Budeme postupovat podle výše uvedeného schématu dvojité trojčlenky, tj. řetězovým pravidlem

$$\begin{tikzcd} 6 \arrow[dr] & 5 \arrow[dr] & 32 \\ 4 \arrow[ur] & 9 \arrow[ur] & x \end{tikzcd}$$

Je tedy $x \cdot 5 \cdot 4 = 32 \cdot 9 \cdot 60$, a odtud $x = 864$.
Odpověď. Kvarteto zahraje Beethovenovu *Devátou* za 864 minut, tj. za 14 hodin a 24 minut. [19]

Laskavý čtenář nechť za domácí úkol vyřeší následující úlohy a rozvíjí tak své kritické myšlení:

---

[16] Pro úspěšné zvládnutí následujících úloh musí mít žák/učitel pod čepicí. Bez ohledu na to, zda má čepice dno nebo nikoliv.

[17] Příklad i řešení jsou z dílny B. Henryho.

[18] Zadání příkladu může ve škole narazit. Bude třeba studentům vysvětlit, z kolika hudebníků sestává *kvarteto*. Úloha je navíc komplikovaná převodem jednotek.

[19] Tuto verzi Beethovenovy *Deváté* nechť si laskavý čtenář najde na Youtube.

- *Konvexní čtyřúhelník má dvě úhlopříčky. Vypočtěte, kolik úhlopříček má konvexní sedmiúhelník.* [20]
- *Pan Novák vypije dva půllitry piva za tři čtvrtě hodiny. Za jak dlouho vypije osm velkých panáků?* [21]
- *Jedna žena porodí dítě za půl hodiny. Za jak dlouho porodí osm dětí? Za kolik minut porodí pět žen jedno dítě? Za jakou dobu porodí dvě ženy čtyřčata?* [22]
- *Tři policisté dopadnou sedmnáct zlodějů za* 58 *dnů. Za jak dlouho dopadnou dva policisté třináct zlodějů?*
- *MUDr. Ras vytrhl panu Novákovi jeden zub za pět minut. Za jak dlouho vytrhne MUDr. Ras panu Zubatému* 35 *zubů?* [23]
- *Pan Jebavý se během dvou let třikrát oženil. Kolikrát se oženil za osm let?*
- *Škola v obci N. má* 27 *vyučujících. Jeden z rodičů dal v září 2015 během tří minut pár facek* [24] *jednomu členovi učitelského sboru. Vypočtěte, kolik facek dostal celý učitelský sbor během školního roku 2015/2016.* [25]
- *Autor tohoto příspěvku vymyslel ve dnech 1. až 5. ledna 2020 sedm pitomostí. Vypočtěte, kolik jich vymyslí za celý rok 2020.* [26]

6 Pohádka o čokoládě

Přímá závislost může být někdy narušena další podmínkou. [27]

Příklad 6.1
Firma Mls & synové vyrábí čokolády. Jednu prodává za jedno euro. Jako reklama je v každé tabulce čokolády přibalen kupón; za deset kupónů vydá prodejna další tabulku čokolády. Uvážíme-li zvýhodnění kupujícího kupóny, kolik čokolády dostane za jedno euro? [28]

Řešení. Za jedno euro koupíme jednu čokoládu s jedním kuponem, který reprezentuje jednu desetinu čokolády a jednu desetinu dalšího kupónu reprezentující jednu setinu

---

[20] Trojčlenku lze užít i v geometrii. Laskavý čtenář může úlohu zobecnit na nekonvexní n-úhelníky.

[21] Studentům v tomto případě není třeba vysvětlovat, co je *panák*.

[22] Úloha rozvíjí mezipředmětové vztahy.

[23] Tato úloha opět rozvíjí mezipředmětové vztahy.

[24] Pro výpočet klademe $pár = 2$.

[25] Nezapomeňte, že rok 2016 byl přestupný.
Povšimněte si, že tato úloha je genderově neutrální a reflektuje GDPR. Lze ji všestranně výchovně využít zejména na fakultách připravujících budoucí učitele.

[26] Rok 2020 je přestupný stejně jako rok 2016.

[27] Tento příklad propaguje euro a vychovává naše žáky k evropanství.

[28] Laskavému čtenáři přejeme sladké úvahy o čokoládách firmy Mls & synové.

čokolády atd. Za jedno euro tedy máme toto množství čokolády:

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1\,000}+\frac{1}{10\,000}+\dots$$

Umíme-li sečíst tuto nekonečnou řadu, víme, že dostaneme $1,111\dots = \frac{10}{9}$ čokolády. Jak to však vysvětlit někomu, kdo sečíst geometrickou řadu neumí, ať je třeba středoškolským nebo vysokoškolským studentem? [29]

Zkusme to takto. Za 9 euro zakoupíme 9 čokolád, v prodejně předložíme 9 kupónů a požadujeme další čokoládu. Prodavač však chce 10 kupónů. Uděláme smutné oči a pravíme: dejte mi prosím čokoládu, já Vám ihned ten desátý kupón dodám. Jakmile čokoládu dostaneme, vyjmeme kupón, dáme jej prodavači. Za 9 euro jsme tedy získali 10 čokolád, za jedno euro $\frac{10}{9}$ čokolády. A žádný kupón nám nezbyl.

Problém spočívá v tom, že prodavač nesmí na takovýto „handl" přistoupit. Smyslem reklamy je právě to, že nám stále nějaké kupóny zbývají a motivují nás ke koupi dalších a dalších čokolád. Vzhledem k tomu, že život někdy končí, naše vášeň pro čokoládu může ochladnout a ani firma Mls & synové netrvá na věčné časy a nikdy jinak, je výše uvedené řešení značně problematické. [30]

Správné řešení. Vypočtěme tedy, kolik čokolády dostane kupující za jedno euro, když do nákupu čokolád investuje e euro a každých deset získaných kupónů ihned smění za další čokoládu. Sestavme nejprve tabulku, která pro investovaný počet e euro uvádí počet c získaných čokolád a k zbývajících kupónů. První důležitý okamžik je při nákupu desáté čokolády, kdy se smění deset kupónů za další čokoládu a jeden kupón.

e	1	2	…	9	10	11	…	18	19	20	…	27	28	29	…	36	37	38	…
c	1	2	…	9	11	12	…	19	21	22	…	29	31	32	…	39	41	42	…
k	1	2	…	9	1	2	…	9	1	2	…	9	1	2	…	9	1	2	…

Investujeme-li do čokolád $e = 9m$ euro, kde $m = 1, 2, \dots$, získáme $10m - 1$ čokolád a 9 kupónů. Za jedno euro tedy získáme $\frac{10m-1}{9m}$ čokolády, tj. $1\frac{1}{9} - \frac{1}{9m}$, tedy jednu celou čokoládu a necelou jednu devítinu čokolády. S rostoucím e (tj. s rostoucím m) se zlomek $\frac{1}{9m}$ zmenšuje, množství čokolády odpovídající jednomu euru při nákupu za $e = 9m$ euro tedy roste, ale stále je menší než $1\frac{1}{9}$. Platí tedy nerovnosti

$$1 < 1\frac{1}{18} < 1\frac{2}{27} < 1\frac{3}{36} < 1\frac{4}{45} < 1\frac{5}{54} < \dots$$

[29] S takovými studenty se setkáváme čím dál častěji.

[30] Úloha poskytuje mnoho možností pro sepisování vědeckých prací v didaktice matematiky typu: *Pavel řekl: …, Zdeněk pravil: …, Eva namítala: …, učitel řekl: …* – Já jsem řekl: *Tímto směrem se jako autor tohoto článku v žádném případě nevydám.*

Investujeme-li do nákupu čokolád $e = 9m + z$ euro, kde $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ a $1 \le z \le 8$, získáme $10m + z$ čokolád a z kupónů. Za jedno euro tedy získáme $\frac{10m+z}{9m+z}$ čokolády, tj. $1+\frac{m}{9m+z}$, tedy opět jednu celou čokoládu a necelou jednu devítinu čokolády. Množství c čokolády, které získáme za jedno euro, s rostoucím počtem e investovaných euro mírně kolísá: pro $e = 10, \ldots, 18$ tvoří devět za sebou jdoucích hodnot klesající posloupnost, poté hodnota pro $e = 19$ vzroste, aby následně osmkrát klesla, pak opět vzroste atd.

$$\begin{array}{ll}
1 < \frac{11}{10} & \frac{11}{10} > \frac{12}{11} > \frac{13}{12} > \frac{14}{13} > \frac{15}{14} > \frac{16}{15} > \frac{17}{16} > \frac{18}{17} > \frac{19}{18} \\[2ex]
\frac{19}{18} < \frac{21}{19} & \frac{21}{19} > \frac{22}{20} > \frac{23}{21} > \frac{24}{22} > \frac{25}{23} > \frac{26}{24} > \frac{27}{25} > \frac{28}{26} > \frac{29}{27} \\[2ex]
\frac{29}{27} < \frac{31}{28} & \frac{31}{28} > \frac{32}{29} > \frac{33}{30} > \frac{34}{31} > \frac{35}{32} > \frac{36}{33} > \frac{37}{34} > \frac{38}{35} > \frac{39}{36}
\end{array}$$

Zajímavý pohled ještě poskytne měnící se cena jedné čokolády. Investujeme-li do nákupu $e = 1, \ldots, 9$ euro, je stále cena jedné čokolády rovna jedno euro. Při nákupu desáté čokolády a výměně deseti kupónů za další čokoládu (a další kupón) se cena sníží na $\frac{10}{11}$ euro. Poté se začne mírně zvětšovat, při investování 19 euro se opět sníží atd. V předcházejícím schématu to znamená uvést inverzní hodnoty a obrátit znaménka nerovností:

$$\begin{array}{ll}
1 > \frac{10}{11} & \frac{10}{11} < \frac{11}{12} < \frac{12}{13} < \cdots < \frac{18}{19} \\[2ex]
\frac{18}{19} > \frac{19}{21} & \frac{19}{21} < \frac{20}{22} < \frac{21}{23} < \cdots < \frac{27}{29} \\[2ex]
\frac{27}{29} > \frac{28}{31} & \frac{28}{31} < \frac{29}{32} < \frac{30}{33} < \cdots < \frac{39}{36}
\end{array}$$

Vidíme, že pobídková kupónová akce může inspirovat k zajímavým matematickým úvahám, které nejsou úplně elementární. Pravda je, že jsou trochu akademické, ale tak to v matematice bývá.

Závěr

Autor se snažil ve svém příspěvku rozvíjet kritické myšlení na základě (nepříliš rozsáhlých) znalostí a dovedností. Dovolil si tak plavat proti proudu, neboť k rozvíjení kritického myšlení dnes znalosti a dovednosti – jak je často hlásáno – nejsou zapotřebí. Utopil se v moři kompetencí. Budiž mu rámcové vzdělávací programy lehké!

Závěrečná poznámka. Autor si tento článek netroufal poslat do redakce, aniž by si jej nechal posoudit u dvou významných odborníků. Jejich reakce byly veskrze kladné, některým jejich kritickým připomínkám však autor nevyhověl. Zde jsou:

Za jedno Teuro dostane kupující právě jednu čokoládu a dozví se, že s tím kupónem se může jít nechat tak akorát barevně vyfotit, neb byl platný pouze do loňských vánoc, a navíc firma tento typ čokolád již přestala vyrábět. A pokud se mu to nelíbí, může si jít stěžovat na lampárnu. (`http://necyklopedie.wikia.com/wiki/Lamp%C3%A1rna.`) (PeS)

Montéry bych zaměnil za montérky, kopáče za kopáčky, firmu bych raději viděl Mls & dcery a zase, abych nebyl tak militantní, jeden a půl vejce bych klidně nechal snášet kohouta. (In)

Literatura – References

[1] Bečvář, J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*. Edice Dějiny matematiky, sv. 19, Prometheus, Praha, 2001.

[2] Čech, E.: *Aritmetika pro I. třídu středních škol*. Státní nakladatelství v Praze, dotisk, 1949.

[3] Leacock, S.: *Literární poklesky*. Mladá fronta, Praha, 1963.

[4] Svoboda, K. (ed.): *Zlomky předsokratovských myslitelů*. Nakladatelství ČSAV, Praha, 1962.

[5] Odvárko, O., Kadleček, J.: *Matematika pro 7. ročník základní školy. Poměr. Přímá a nepřímá úměrnost. Procenta*. Prometheus, Praha, 1998.

Adresa autora:

Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: `becvar@karlin.mff.cuni.cz`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2020 (49)

Ferenc Kárteszi

Vojtech Bálint

Abstract [Ferenc Kárteszi]: For some readers (not only OMFI), Ferenc Kárteszi is today still a living memory, but the set of younger people who could not meet him is certainly large. Let us therefore introduce the life and work of a man who had ties also to Slovakia, and was one of the best experts in geometry in the broadest sense.

Key words: Kárteszi, mathematician, geometry, didactic of mathematic

Súhrn: Pre niektorých čitateľov (nielen OMFI) je Ferenc Kárteszi ešte aj dnes živou spomienkou, ale množina mladších, ktorí ho poznať nemohli, je určite mnohonásobne väčšia. Pripomeňme teda život a dielo vzácneho človeka, ktorý mal väzby aj na Slovensko, a bol jedným z najlepších znalcov geometrie v tom najširšom slova zmysle.

Kľúčové slová: Kárteszi, matematik, geometria, didaktika matematiky

MESC: A30, A50

Ferenc Kárteszi sa narodil 13. februára 1907 na malej samote Nyilasbesnyő pri Cegléde. Jeho rodičia boli veľmi chudobní sedliaci. Keď mal tri roky, jeho otec sa zamestnal ako železničiar, takže Ferenc aj jeho starší brat sa učili na školách v Žiline a Budapešti. Železničiarske zamestnanie poskytlo rodine sociálne istoty a obe deti mohli ísť študovať aj na univerzitu napriek tomu, že v tzv. zlatých dvadsiatych rokoch bola v Maďarsku obrovská chudoba[1]. V čase, keď bol stredoškolák, mu jeho starší brat vysvetlil čo je to dôkaz v matematike, a mladý Ferenc Kárteszi si zvolil špeciálny spôsob učenia sa: vypísal si len definície a vety, ktoré potom sám dokazoval. Je to veľmi účinná metóda, ale je vhodná len pre veľmi malý počet študentov, ktorých nadanie je extrémne. Kárteszimu však nadanie nechýbalo a nechýbala mu ani enormná pracovitosť. Už ako stredoškolák organizoval študentské matematické krúžky a od roku 1925 publikoval niekoľko prác vo vynikajúcom stredoškolskom časopise KöMaL. Počas 1. svetovej vojny časopis KöMaL nefungoval, vydávanie obnovil v roku 1925 Andor Faragó[2], ktorý neskôr zaangažoval Kártesziho do vydávania

[1] Podobne ako Nemecko, aj Maďarsko platilo zcela neúnosné vojnové reparácie.

[2] Andor Faragó (1877 – 1944), stal sa obeťou holokaustu spolu so svojimi dvoma synmi.

tohto časopisu. Túto prácu Kárteszi robil až do roku 1939, keď vydávanie časopisu bolo kvôli 2. svetovej vojne znemožnené a navyše, v roku 1939 musel Kárteszi narukovať do armády.

Ferenc Kárteszi začal študovať na Budapeštianskej univerzite Péter Pázmány Egyetem (dnes ELTE), jeho starší brat na Technike (dnes BME). V roku 1926, keď mal 19 rokov, jeho starší brat umrel a o dva mesiace neskôr umrel aj jeho otec. Finančné istoty boli preč, mladý Ferenc sa musel postarať o matku, takže prerušil štúdiá a jeden rok pracoval na vidieku u svojich príbuzných na poliach. Dvaja profesori Techniky, Lajos Romsauer[3] a József Kürschák (1864 – 1933) sa však postarali o to, aby mohol ako štipendista doštudovať a potom mu pomohli aj k platenému učiteľskému miestu na Technike. Počas svojich štúdií veľa premýšľal o vyučovacích metódach, takže po jednom roku učenia na Technike požiadal o učiteľské miesto na reálke v Győri, kde si tie metódy v rokoch 1931 – 1939 mohol odskúšať.

Ako stredoškolák sa zoznámil s Lipótom Klugom (1854 – 1945), penzionovaným profesorom Kolozsvárskej univerzity, ktorého každý mesiac navštívil. Rozhovory s ním zanechali na mladíkovi veľmi silný dojem. Neskôr Kárteszi napísal, že nebyť Kluga nestal by sa geometrom. Okrem Kluga najviac Kárteszihо ovplyvnili József Kürschák, György Alexits (1899 – 1978), Beppo Levi (1875 – 1961) a Beniamino Segre (1903 – 1977).

V literatúre (maďarskej aj anglickej) a tiež vo webových textoch sa takmer bez výnimky[4] uvádza chybná informácia, že Kárteszi získal doktorát v Budapešti. V skutočnosti PhD. získal na Debrecínskej univerzite 9. júna 1933 s prácou *A kúpszeleten fekvő hat pont által meghatározott tíz kúpszeletről és a velük kapcsolatos konfigurációkról* [O desiatich kužeľosečkách určených šiestimi bodmi ležiacimi na kužeľovej ploche a o konfiguráciách s nimi súvisiacich]. Podľa archívnych záznamov Debrecínskej univerzity oponentmi boli dr. József Wodetzky (1875 – 1956) a dr. Lajos Dávid (1881 – 1962), predsedom komisie bol dekan dr. Rezső Milleker (1887 – 1945).

V roku 1935 publikoval Kárteszi dve práce v Bollettino dell'Unione Matematica Italiana a na ich základe s podporou Lipóta Fejéra (1880 – 1959) získal štipendium na školský rok 1936/37 v Bologni. Tu začala jeho spolupráca s Beppo Levim a Beniamino Segrem, s ktorým si už predtým dopisoval.

---

[3]Lajos Romsauer, narodil sa 23. augusta 1879 v Malackách, strednú školu absolvoval v Bratislave (vtedy Pozsony), na Budapeštianskej Technike získal diplom stredoškolského profesora v roku 1902. Učil v Sárospataku, v roku 1908 získal doktorát z matematiky, astronómie a filozofie. Do roku 1921 pôsobil ako odborný asistent na Technike v Budapešti, potom ako profesor do roku 1945 na katedre deskriptívnej geometrie. Zomrel 12. mája 1952 v Budapešti.

[4]Tou výnimkou je článok Kántor Sándorné: Kárteszi Ferenc (1907 – 1989), ktorý je málo dostupný, lebo vyšiel v rámci projektu Képek a magyar matematika történetéből [Obrazy z histórie maďarskej matematiky]. Lenže práve tento zdroj uvádza presné, overiteľné, teda hodnoverné informácie.

V roku 1939 bol Kárteszi povolaný do armády, a to mu umožnilo v Marosvásárhely (dnes Târgu Mureș) študovať originály Bolyaiho nepublikovaných prác. Neskôr bol na fronte a dostal sa do zajatia, ale aj vtedy bol matematicky aktívny. O 13 rokov neskôr využil získané poznatky o Bolyaiho spisoch a začal sústredene pracovať na diele János Bolyai: Appendix. A tér tudománya. [János Bolyai: Appendix. Teória priestoru], ku ktorému pridal mnoho vysvetlení a veľmi cenný komentár o nepublikovaných prácach Bolyaiho. Táto jeho kniha je mimoriadne hodnotná a bola viackrát vydaná, v roku 1987 aj anglicky.

Po utrpeniach druhej svetovej vojny sa Kárteszi pustil do práce s nevídanou energiou. Budapeštianska pobočka Matematickej spoločnosti Jánosa Bolyaiho (Bolyai János Matematikai Társulat) bola založená v roku 1947 v Kárteszího byte a viac rokov sa práve tu konali stretnutia členov sekcie, vždy vo štvrtok. Keď sa stretnutie nekonalo, tak sa na katedrovej výveske objavil vtipný nápis *Budúci štvrtok nebude štvrtok*. Od roku 1947 pracoval na ELTE, v rokoch 1951 – 76 ako profesor a vedúci katedry, v rokoch 1951 – 54 ako dekan, v rokoch 1958 – 62 ako prorektor. Doktorom vied sa stal v roku 1962. Bol ústrednou postavou univerzitných aj stredoškolských povojnových reforiem. Založil a zorganizoval učiteľské štúdium deskriptívnej geometrie a tiež tzv. večerné štúdium.

Hlavnou oblasťou jeho záujmu bola didaktika matematiky a samozrejme všetko, čo súvisí s geometriou. Publikoval práce z geometrie klasickej, elementárnej, kombinatorickej, algebraickej, deskriptívnej, projektívnej, diskrétnej aj finitnej, ako aj z kombinatoriky s veľkým dôrazom na didaktické myšlienky. Vždy hľadal také problémy, ktoré by sa dali formulovať pre stredoškolákov, pričom ilustrujú dôležitú matematickú myšlienku. V druhej polovici päťdesiatych rokov sa zaujímal hlavne o finitnú geometriu a v tých rokoch mal v Taliansku veľmi veľa prednášok. Unione della Matematica Italiana, teda Talianska matematická spoločnosť uvádza Kárteszího ako *socio fondatore*, teda ako svojho zakladajúceho člena. Vo funkcii hosťujúceho profesora prednášal na univerzitách v Bari, Bologni, Messine, Milane, Parme, Potenze, Torine a v Trieste. Prednášku mal aj na PF UPJŠ Košice na pozvanie profesora Ernesta Jucoviča (1926 – 1998). Autor tohto článku mal tú česť 5. júna 1968 simultánne prekladať túto prednášku profesora Kárteszího do slovenčiny.

Ferenc Kárteszi napísal 120 vedeckých článkov a 11 kníh (dve z nich sme pre lepšiu informovanosť zaradili do literatúry). Ako didaktik sa snažil vtiahnuť čitateľa priamo do zrodu matematických myšlienok, ktoré navyše formuloval vždy mimoriadne jasne. Práve preto sa jeho kniha [2] *Introduction to Finite Geometries* (pôvodne napísaná v maďarčine) stala učebnicou tejto oblasti. Vyšla aj anglicky v roku 1976, taliansky v roku 1978 a rusky v roku 1980, a dodnes sa na ňu odvoláva mnoho autorov.

Zomrel v Budapešti 9. mája 1989.

Literatúra – References

[1] Kárteszi, F.: *Szemléletes geometria* [Vizuálna geometria], Gondolat kiadó, Budapest 1966.
[2] Kárteszi, F.: *Bevezetés a véges geometriákba* [Úvod do finitných geometrií]. Akadémiai kiadó, Budapest, 1972, 275 strán. (Reprinted in English by Elsevier/North Holland, 1976: Introduction to finite geometries, in Italian by Feltrinelli, 1978, and in Russian by Nauka, 1980.)

Poďakovanie: Článok bol podporený grantom GAČR registračné číslo 18-00449S *Dopad první světové války na utváření a proměny vědeckého života matematické komunity.*

Adresa autora:

Nám. Ľ. Fullu 21, 010 08 Žilina
e-mail: `vojtech.balint@gmail.com`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2020 (49)

Dáma s lampou

Lucia Csachová

Abstract [Lady with the Lamp]: This year marks the 200th anniversary of the birth and 110th anniversary of the death of English nurse and statistician Florence Nightingale. She was the first woman to be accepted into the British Statistical Society. Also thanks to her charts, patient care in hospitals had improved.

Key words: Florence Nightingale, charts, polar area diagram, statistics

Súhrn: Tento rok si pripomíname 200. výročie narodenia a 110. výročie úmrtia anglickej ošetrovateľky a štatističky Florence Nightingaleovej. Bola prvou ženou prijatou do Britskej štatistickej spoločnosti. Aj vďaka jej grafom sa zlepšila starostlivosť o pacientov v nemocniciach.

Kľúčové slová: Florence Nigtingaleová, grafy, polárny výsekový graf, štatistika
MESC: G90

12. mája, v deň slávený ako Medzinárodný deň ošetrovateľstva, sme si pripomenuli 200. výročie narodenia *Florence Nightingaleovej* (1820 – 1910). Je známa nielen ako zakladateľka moderného ošetrovateľstva, ale aj ako „vášnivá štatistička“ [4], ktorá využila grafické zobrazenie štatistických údajov pri zmene prístupu v starostlivosti o pacientov.

Florence (obr. 1) sa narodila v talianskej Florencii v bohatej rodine anglických šľachticov. V tom čase sa mladé anglické dievčatá z vyššej spoločnosti venovali tancu, hre na klavír a maľovaniu. Ona sa so sestrou od detstva venovala vďaka vzdelanému otcovi štúdiu cudzích jazykov, matematiky, dejepisu a filozofie. Neskôr sa rozhodla nevydať a zasvätiť svoj život službe chorým. V tom čase boli ošetrovateľkami často len nevzdelané ženy, bývalé prostitútky či alkoholičky. Útulky a nemocnice boli v mnohých prípadoch preplnené, výskyt parazitujúceho hmyzu či potkanov nebol neobvyklý. Nebola to práca pre šľachtičnú. Aj preto musela Florence o splnenie svojho sna bojovať.

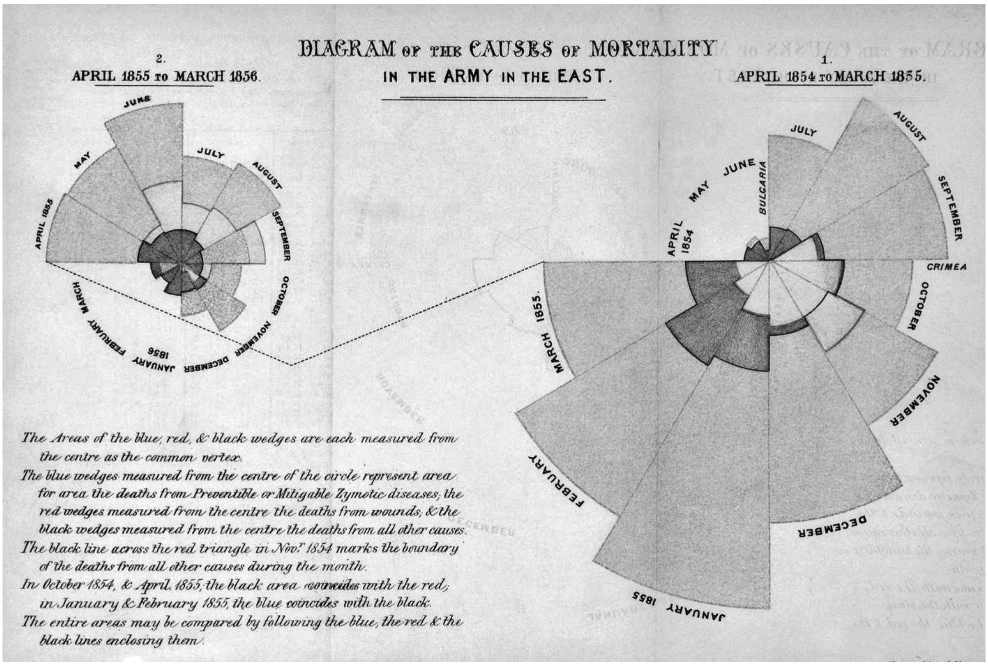
Počas svojich ciest po Európe navštevovala nemocnice a zbierala skúsenosti s ošetrovaním chorých. V rokoch 1853 – 54 viedla ústav pre choré šľachtičné v Londýne. Vďaka jej pôsobeniu sa zmodernizoval chod zariadenia. Navrhla výťah, ktorým bolo chorým dopravované jedlo na dané poschodie, vymyslela signalizačné zariadenie pri lôžku pacienta, teplá voda sa stala dostupnou v celej nemocnici. Zaviedla pravidlo, podľa ktorého sa začali separovať jednotlivé choroby a vznikali oddelenia pre pacientov s rovnakými diagnózami.

Obrázok 1. Florence Nightingaleová; zdroj: [6]

V septembri 1854 britské a francúzske jednotky napadli Krym pri podpore Turecka v spore s Ruskom. Napriek víťazstvu spojeneckých vojsk sa v denníku Times objavili informácie, že chorí a zranení britskí vojaci často zomierali bez lekárskej starostlivosti. Nielenže nebolo k dispozícii dostatok chirurgov, v nemocniciach chýbali akékoľvek kvalifikované zdravotné sestry. V októbri 1854 Florence spolu s 38 dobrovoľnými ošetrovateľkami a oficiálnym povolením od vlády (ale nie od armády) odišla do Scutari[1]. Pri príchode bola zhrozená katastrofálnymi podmienkami, v ktorých sa ranení vojaci nachádzali. Nemocničné budovy boli zamorené blchami a potkanmi, kanalizácia nedostatočne zabezpečená, posteľná bielizeň nepravidelne pratá v studenej vode, a k tomu nedostatok chirurgických a lekárskych nástrojov. Do takýchto príšerných podmienok prichádzali slabí, omrznutí a vychudnutí pacienti po plavbe cez Čierne more. Následne vznikajúce epidémie cholery, týfusu a hnačiek spôsobovali väčšie straty na životoch ako samotné zranenia, na ktoré sa vojaci liečili. Napríklad najhoršia situácia bola vo februári 1855. Úmrtnosť pacientov v nemocnici dosiahla až 42,7 % z celkového počtu hospitalizovaných vojakov. Vďaka Florence sa začalo v nemocnici variť a upratovať, vybudovali sa hygienické zariadenia, ktoré predtým chýbali, pravidelne sa vymieňala posteľná bielizeň a vetralo sa. Po zavedení týchto zmien sa miera úmrtnosti vojakov v nemocnici prudko znížila, v júni 1855 dosahovala už len 2,2 % [1].

Florence pravidelne zostavovala časové tabuľky úmrtia pacientov podľa príčin a pre lepšie znázornenie údajov použila stĺpcové a koláčové grafy, v ktorých farebne odlíšila kľúčové charakteristiky. Práve nimi dokazovala nedostatočnosť nemocničnej

[1] Dnešná mestská štvrť ázijskej časti Istanbulu – Üsküdar.



Obrázok 2. Polárny výsekový graf počtu úmrtnosti vojakov v nemocnici v Scutari; obrázok pochádza z listu poslanom kráľovnej Viktórii 11. októbra 1858; zdroj: [7]

hygieny v poľných podmienkach a pozitívny vplyv zavedených reforiem na zníženie úmrtnosti. (Je možné, že pri vytváraní grafov ju ovplyvnili práce W. Playfaira[2] alebo A. Queteleta[3].) Jej najslávnejší graf (obr. 2) spracovaný vo forme polárneho výsekového grafu[4] znázorňuje počet úmrtí vojakov v nemocnici v Scutari z rôznych príčin počas obdobia apríl 1854 – marec 1856. Kruh je rozdelený na 12 častí – výsekov

---

[2] *William Playfair* (1759 – 1823), škótsky vynálezca, pamfletista, novinár a vydavateľ (z jeho pera pochádza tiež opis pádu Bastily, ktorého sa osobne zúčastnil). Ako prvý používal histogramy, koláčové a lineárne grafy pre znázornenie štatistických údajov (kniha *Atlas* so 44 rôznymi grafmi bola publikovaná prvýkrát v roku 1786).

[3] *Lambert Adolphe Jacques Quetelet* (1796 – 1874), belgický geometer, astronóm (Queteletov kráter na Mesiaci), meteorológ a geofyzik, predseda belgickej *Comission centrale de statistique*, organizátor štatistických kongresov.

[4] *Polárny graf (diagram)* je špecifický typ grafu, ktorý sa používa pri zaznamenávaní údajov spojených s určitou cyklickosťou. Charakteristickým znakom je tvar kruhu, na zobrazenie jednotlivých bodov sa používajú tzv. polárne súradnice – dĺžka a uhol. Hodnoty veličiny sú tak určené vzdialenosťou bodu od stredu kružnice (čím je bod ďalej od stredu, tým je väčšia hodnota veličiny). V prípade *výsekového polárneho grafu*, ale nie je možné použiť vzdialenosť ako kritérium. Správne je použiť veľkosť plochy výseku ako spôsob vyjadrenia hodnoty veličiny.

predstavujúcich jednotlivé mesiace v roku, farby odlišujú príčiny úmrtí hospitalizovaných vojakov. Je zrejmé, že počet úmrtí vojakov zapríčinených chorobami, ktorým je možné predchádzať (na obr. 2 svetlosivá farba, v origináli modrá), je veľmi vysoký v porovnaní s počtom úmrtí v dôsledku zranení z vojny (svetlý odtieň, v origináli červená farba) alebo iných príčin (tmavosivá farba, v origináli čierna). V prvom prevedení grafov boli počty úmrtí úmerné úsekom polomerov výsekov a teda skreslené. Potom si Florence uvedomila chybu a počty boli úmerné veľkosti plochy výsekov.[5]

Florence vytvorila celú sériu grafov, ktoré mali situáciu v nemocniciach „čitateľovi“ objasniť. Okrem podrobnej správy pre vojenské kruhy vydala stručný súhrn svojich výsledkov v malej brožúrke *Mortality of the British Army* v roku 1858 s cieľom ovplyvniť verejnú mienku. Či jej grafické presvedčenie presvedčilo velenie armády alebo verejnosť, ktorá uplatnila svoj vplyv, hygiene v nemocniciach začala byť venovaná väčšia pozornosť.

Po návrate z Krymu v auguste 1856 Florence nespoznávala ani vlastná rodina. Bola vychudnutá, zostarnutá a chorá. Zmeny sa netýkali len jej fyzického zdravia, ale aj psychického. Bola pochmúrna a depresívna. Niekoľko rokov bola dokonca pripútaná na lôžko. O diagnóze, ktorou trpela, sa vedú diskusie. Bližšie informácie o jej zdravotnom stave je možné nájsť napr. v [5].

Florence navrhla vytvorenie komisie pre reformy, pričom predložila 800-stránkovú písomnú správu o skutočnom stave vojenských nemocníc s kapitolou o štatistike doplnenú grafmi. Na základe navrhovaných zmien vznikali nemocnice s už novými pravidlami a požiadavkami. Trvala na ochrane zdravého prostredia, čistom vzduchu, čistote prostredia, svetle a funkčnom kanalizačnom systéme. V roku 1860 sa v Londýne konal Medzinárodný štatistický kongres, ktorému predsedal A. Quetelet. Florence využila túto príležitosť a napísala list, v ktorom obhajovala jednotný systém nemocničných štatistík. Tie by bolo možné využiť na porovnanie nemocníc, regiónov a krajín. Delegáti návrh prijali a vypracovali sa jednotné formuláre.[6] O tri roky neskôr podobný návrh pre zlepšenie štatistík chirurgických operácií vypracovala pre kongres v Berlíne [4]. Viac o jej aktivitách v štatistike je možné nájsť napr. v [3].

Florence Nightingaleová zomrela v Londýne 13. augusta 1910. Počas života napísala viac ako 200 kníh, článkov, správ a viac než 12 000 listov. Jej kniha *Zápisky o ošetrovateľstve* z roku 1869 predstavuje aj v súčasnosti základ pre ošetrovateľ-

---

[5] Florence ale nebola prvá, kto použil polárny graf k znázorneniu štatistických údajov. Autormi prvých známych takýchto grafov boli v roku 1829 André Michel Guerry a neskôr v roku 1843 Léon Lalanne. Obaja ho využili na znázornenie smerov vetra.

[6] „Bol to prvý model systematického zberu nemocničných dát používajúci jednotnú klasifikáciu chorôb a operácií, ktorý vytvoril základ pre ICD kód používaný doteraz.“ [4, s. 68] Poznámka autorky: ICD je skratkou pre *International Classification of Diseases*.

stvo [2]. Svoje skúsenosti sa snažila odovzdať mladým dievčatám, a tak v roku 1960 založila prvú školu pre ošetrovateľky na svete v Londýne. Je považovaná za druhú najvýznamnejšiu ženu viktoriánskeho Anglicka (po kráľovnej Viktórii). V roku 1883 jej bol udelený Kráľovský červený kríž a v roku 1907 ako prvá žena získala Rád za zásluhy o britské impérium.

Prezývku *dáma s lampou* získala Florence od zranených vojakov, ktorých pravidelne kontrolovala počas svojich večerných obchôdzok.

Literatúra – References

[1] Cohen, I. B.: *Florence Nightingale.* In Scientific American 250 (3): 128 – 137, 1984.
[2] Dingová Šliková, M., Vrabelová, L., Lidická, L.: *Základy ošetřovatelství a ošetřovatelských postupů pro zdravotnické záchranáře.* Grada Publishing, Praha 2018.
[3] Kopf, E. W.: *Florence Nightingale as Statistician.* In Publications of the American Statistical Association, Vol. 15, No. 116 (Dec., 1916), 388 – 404.
[4] McDonald, L.: *Florence Nightingale and the early origins of evidence based nursing.* In Evidence Based Nursing 2001, Vol. 4 (2001), 68 – 69.
[5] Young, D. A. B.: *Florence Nightingale's fever.* In British Medical Journal 311 (1995): 1697 – 1700.
[6] `en.wikipedia.org/wiki/Florence_Nightingale`
[7] `rct.uk/collection/1075240/`

Adresa autora:

Pedagogická fakulta, Katolícka univerzita v Ružomberku, Hrabovská 1,
034 06 Ružomberok 1
e-mail: `lucia.csachova@gmail.com`

Zadania úloh 70. ročníka Matematickej olympiády

Kategória A

Úloha A–I–1. (*Tomáš Jurík, Jaromír Šimša*) Na tabuli sú napísané (nie nutne rôzne) prvočísla, ktorých súčin je 105-krát väčší ako ich súčet. Určte všetky napísané prvočísla, ak ich je

a) päť; b) sedem.

Úloha A–I–2. (*Patrik Bak*) V ostrouhlom trojuholníku ABC ležia na strane BC body D a E tak, že D je medzi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Bod F je taký bod, že $FD \parallel AB$ a $FE \parallel AC$. Dokážte, že $|FB| = |FC|$.

Úloha A–I–3. (*Patrik Bak*) Ak sú a, b, c navzájom rôzne kladné reálne čísla, aký je najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami $a + b$, $b + c$, $c + a$, ab, bc, ca, abc?

Úloha A–I–4. (*Michal Rolínek*) Najväčšieho deliteľa d prirodzeného čísla $n > 1$ s vlastnosťou $d < n$ nazveme jeho *superdeliteľom*.

a) Dokážte, že každé prirodzené číslo $d > 1$ je superdeliteľom iba konečného počtu čísel.

b) Označme $s(d)$ súčet všetkých čísel, ktorých superdeliteľom je dané číslo $d > 1$. Rozhodnite, či existuje nepárne číslo $d > 1$ také, že $s(d)$ je násobkom čísla 2 020.

Úloha A–I–5. (*Patrik Bak*) V trojuholníku ABC označme S_a, S_b, S_c postupne stredy jeho strán BC, CA, AB. Dokážte, že pre ľubovoľný bod X rôzny od bodov S_a, S_b, S_c platí

$$\min\left\{\frac{|XA|}{|XS_a|}, \frac{|XB|}{|XS_b|}, \frac{|XC|}{|XS_c|}\right\} \leq 2.$$

Úloha A–I–6. (*Martin Melicher*) Majme 70 zhasnutých žiaroviek. Pre ľubovoľnú skupinu žiaroviek vieme pripraviť prepínač, ktorý zmení stav každej žiarovky z tejto skupiny (zhasne zasvietené a rozsvieti zhasnuté) a ostatné žiarovky neovplyvní. Aký je najmenší počet prepínačov, pomocou ktorých je možné rozsvietiť ľubovoľnú štvoricu žiaroviek (pričom ostatné budú zhasnuté)?

Kategória B

Úloha B–I–1. (*Jaroslav Zhouf*) Z cifier 0 až 9 vytvoríme dvojciferné čísla AB, CD, EF, GH, IJ, pričom každú cifru použijeme práve raz. Zistite, koľko rôznych hodnôt môže nadobúdať súčet $AB + CD + EF + GH + IJ$ a ktoré hodnoty to sú. (Zápisy typu 07 nepovažujeme za dvojciferné čísla.)

Úloha B–I–2. (*Mária Dományová, Patrik Bak*) Aká je najväčšia možná hodnota výrazu $xy - x^3y - xy^3$, ak sú x, y kladné reálne čísla? Pre ktoré x, y sa táto hodnota dosahuje?

Úloha B–I–3. (*Patrik Bak*) V ostrouhlom trojuholníku ABC sú AA' a BB' jeho výšky. Kolmý priemet bodu A' na výšku BB' označme D. Predpokladajme, že kružnica prechádzajúca bodmi B, C, D pretína stranu AC v jej vnútornom bode E. Dokážte, že $|DE| = |AA'|$.

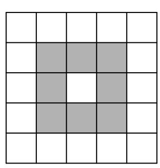
Úloha B–I–4. (*Pavel Calábek*) Zistite, pre ktoré hodnoty reálneho parametra k má sústava rovníc

$$\begin{aligned} |x+6| + 2|y| &= 24 \\ |x+y| + |x-y| &= 2k \end{aligned}$$

nepárny počet riešení v obore reálnych čísel.

Úloha B–I–5. (*Marián Poturnay*) Daný je pravidelný sedemuholník $ABCDEFG$. Kolmica vedená bodom D na priamku DE pretína priamky CG a AB postupne v bodoch P a Q. Dokážte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$.

Úloha B–I–6. (*Jozef Rajník*) Na pláne s rozmermi 12×12 štvorčekov sa nachádza loď tvorená ôsmimi políčkami pozdĺž obvodu štvorca 3×3 (na obrázku dole je vyznačená sivou farbou). Na koľko najmenej políčok treba vystreliť, aby sme s istotou zasiahli loď aspoň raz?



Kategória C

Úloha C–I–1. (*Jaroslav Švrček*) Určte všetky dvojice (m, n) prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$m + s(n) = n + s(m) = 70,$$

pričom $s(a)$ označuje ciferný súčet prirodzeného čísla a.

Úloha C–I–2. (*Ján Mazák*) Určte, pre ktoré prirodzené čísla n možno tabuľku typu $n \times n$ vyplniť číslami 2 a -1 tak, aby sa súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci rovnal 0.

Úloha C–I–3. (*Jaroslav Zhouf*) V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB označme postupne I a U stred kružnice jemu vpísanej a dotykový bod tejto kružnice s odvesnou BC. Určte, aký je pomer $|AC| : |BC|$, ak sú uhly CAU a CBI zhodné.

Úloha C–I–4. (*Michal Rolínek, Pavel Calábek*) Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz

$$\frac{a + bc}{a + b} + \frac{b + ca}{b + c} + \frac{c + ab}{c + a},$$

ak sú a, b, c kladné reálne čísla so súčtom 1.

Úloha C–I–5. (*Tomáš Jurík*) Daný je trojuholník ABC s ťažiskom T. Na priamkach AT a BT sú zvolené postupne body E a F tak, že štvoruholník $TECF$ je rovnobežník. Dokážte, že úsečky AC a BC delia úsečku EF na tri zhodné časti.

Úloha C–I–6. (*Jaromír Šimša*) Na tabuli je napísaných niekoľko prirodzených čísel od 1 do 100, pričom žiadne z nich nie je deliteľné dvojciferným prvočíslom a súčin žiadnych dvoch z nich nie je druhou mocninou prirodzeného čísla.

a) Určte najväčší možný počet čísel na tabuli.
b) Určte najväčší možný súčet čísel na tabuli.

Za úlohovú komisiu Matematickej olympiády spracoval Peter Novotný
e-mail: peter.novotny@fri.uniza.sk

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2020 (49)

Physical Processes in Nature The Water 4. Physics of Rivers

Sós Katalin, Bartyik Tamás, Nánai László

Abstract: Our series of articles [1-4] named "Physical Processes in the Nature", launched in 2014 have the aim to provide concrete help to teachers in integrated science education. In the series, we gather phenomena and processes that illustrate the intertwining and fundamentally unified view of physics, biology and geography. The first article concreted the soil physics, the second one the physical and chemical properties of water, the third the physics of oceans, seas and the fourth the physics of lakes. This article summarizes the physical characteristics of rivers.

Key words: water, rivers, erosion, shape formation

Súhrn: Sériou našich článkov [1-4], ktoré sme zahájili v roku 2014 sme mali v úmysle pomôcť učiteľom vyučujúcich prírodné vedy integrovaným spôsobom. V sérii článkov sme popísali javy a deje, ktoré ilustrujú prepojenie fyziky, biológie a geografie, ako aj ich jednotné chápanie vychádzajúce zo samotných základov prírodných vied. Prvý článok objasnil fyziku pôdy, druhý objasnil fyzikálne a chemické vlastnosti vody, tretí fyziku oceánov a štvrtý fyziku jazier. Predkladaný článok zhŕňa fyzikálne charakteristiky riek.

Kľúčové slová: voda, rieky, erózia, formovanie tvaru

MESC: M50

What is the River?

Rivers takes up only a very small proportion of the hydrosphere, but their importance is enormous because large cities and human culture have always evolved near the rivers. For example, the Egyptian culture that developed and flourished in the Nile Valley. Mesopotamia, the oldest civilisation in the world and considered the cradle of mankind, meaning river, also formed between the Tiger and the Euphrates Rivers [5].

The rivers provided irrigation, transportation ways and mainly drinking water. The rivers are geographically defined as water flows on sloping surface by driving force of gravity. These include for example rivers, river streams as well as rainwater running down the rock wall [6]. Most streams come from springs, but Neva from Ladoga Lake, the Dnieper River starts from Minsk's swamps, but even glaciers can feed streams that will later become streams with greater runoff, such as the Rhone [7].

It is a recurring question as which river is the longest and highest water discharge on Earth. Nile, as considered by many to be the largest stream for a longest stream for a long time and may be up the mainstream. The second longest is Amazon. However, the source of this river was not fully known until the 1990s. Recent research has identified the glacier from the southern Andes, which is eventually transformed into the Amazon. With this expansion, it took the title of the longest river in the world from Nile, which fell on the second place. In addition the Amazon is proudly named the World's Largest River [8].

Geographic studies refer to the physical characteristics of rivers as water discharge, water velocity, sediment yield, sediment size distribution and bed roughness. In our article, however, we mention more than one physical characteristic, all of which can be described and explained by physical processes.

The **colour of rivers** primarily refers to colour of their suspended sediments (think only of rivers named for their colour e.g. Yellow River, Red River, White and Black Tisza). Since the body of water absorbs the light rays most in the red-yellow range and the least in the 470 nm (green blue, "waterblue") band. However the colour of the body of water is also influenced by underwater objects (rocks, algae). Most river are dirty-green, partly, because they are not too deep, partly because of the sediment and partly because of the bacteria. Algae, aquatic plants that proliferate in the Crystal River in Colombia after the rainy season, paint the river in a unique, eye-catching yellow, green, red, purple colour.

Interestingly, the suspended sediment content is neither proportional to the catchment area nor to the discharge Europe's highest yielding river is in Albania.

River discharge is determined by several factors, such as

- size of catchment area,
- quantity and quality of precipitation over time,
- rate of evaporation and leakage,
- terrain, rock and vegetation.

The largest rivers are found in areas where rainfall is more prevalent than evaporation (Amazonas, Mississippi, Yangtze). In areas where evaporation is more significant desert areas are formed. The size of the catchment area also plays an important role in the classification, in addition to the discharge and length.

The **speed of running water** depends primarily on the extent of the fall. River falls are expressed in meter of falls over 1 km length, the greater the fall, the faster the flow. Of course in the case of streams the equation of continuity applies, if the flow cross section is reduced the river is forced into a narrowed bed, the speed increases. The velocity is also determined by the water level which increases,

Watercourses	Catchment area (1000 km^2)	Average water yield (m^3/s)	Length (km)
river	500 <	2500 <	2500 <
large river	100 - 500	400 - 2500	1000- 2500
middle river	10 - 100	50 - 400	250 - 1000
small river	0,5 - 10	5 - 50	50 – 250
small watercourses	< 0,5	< 5	< 50

Tab. 1. Categorization of streams

mainly due to the increased volume of water, but account also must be taken the increased hydrostatic pressure due to higher water level. The water level also determines the velocity of flow within the bed cross section; generally the highest velocity can be measured above the deepest point. Frictional forces within the bedrock stile have to be taken into account as velocities develop, resulting in the slowest flow at the bottom and the shoreline the fastest near the surface (directly on the surface, air resistance slows movement).

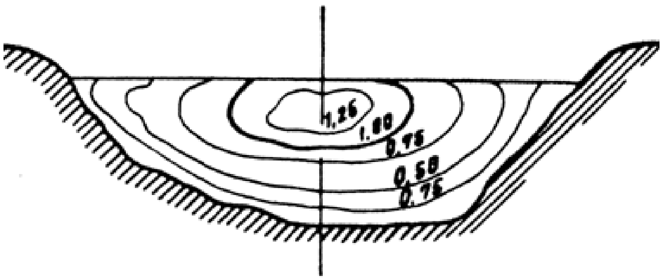


Fig. 1: *Water velocity in the river bad*

In **terms of flow type**, both laminar and turbulent flows occur at watercourses. The Reynolds number (Re) shows which flow is concerned, its value depends on velocity (v), hydraulic radius (r), density (σ) and visconsity (η)

$$Re = \frac{r\rho v}{\eta}$$

If $Re = 800 - 1200$ laminar flows occurs, above it is turbulent. At average flow velocities laminar flow occurs only in the lower 1-2 cm zone above the built with higher velocities upward resulting in turbulent flow [9].

The natural rivers have three types of **cross sections**:

- normal type (A)
- split type – occurs at points between the right and left bends and on the lower rivers (B)

– of assymetric type – it develops and meandering rivers (C).

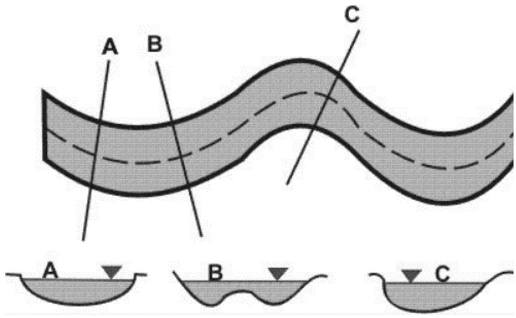


Fig. 2: Crossections of river beds

The Coriolis force can also been divided into two components in rivers

- a horizontal components which deflects motion to the north (as in the Foucault pendulum)
- a vertical components, which manifest itself in the change of gravitational force acting on horizontally moving bodies (the Eötvös effect).

As a result the Coriolis force changes both the course of the rivers (surface and depth). For example, in the northern hemisphere rivers describing large bends wash the right band more strongly than the left. This difference is true if the mean bend radius of curvature is greater than 10 km [10].

In order to solve this problem new theories emerged which either sought to refuse Baer's law or to justify it by adding new reasons for deviation (wind effect, uneven weathering of rocks). The contradiction may be caused by the fact that Baer did not derive his law from physical equations, but summed up his knowledge and experience from rivers. It should be noted, however, in a much large sample observation Zemcov found in 1973, that only 75% of the rivers in the northern hemisphere have right-sided dredging, not just the effect of Coriolis force should be taken into account but tectonic tipping also. As a result the final shape of river bed is formed [11].

External frictions cause **vortices in rivers** e.g. migratory vortices (suction or spring vortices) standing vortices or horizontally laying vortices. One of the types of turbulent currents is the standing vortices, which behind the riverbed obstructions e.g. bridges at the foot. In addition wandering vortexes are created which can be vertical and horizontal ones. It was most typical when the material sinking deeply along the shoreline due to friction, sinks to the surface at the river's stream-line, with spring swirls. As a result the water level is a few centimetres higher than at the coastline. There vortexes spirally extend downstream and convey material from one bend to the other. Rivers also play an important role in the sediment deposition dynamics. At low water level these spiral and circular currents are not able to pass through the entire bed cross section and secondary vortexes can develop. Among these sediment deposition and reef formations can begin. Swirls cause the river to attack the bottom and side of the riverbed, breaking off pieces of rock. River’s transport debris by scrolling, floating or dissolving and the scroll material is worn out during transport depending on its composition so that different rock composition sediments are transported of different distances. It forms a suspension in water and the solution can be formed true or colloidal.

The amount of suspended solids in the so-called sedimental yield (sediment amount per unit basin) erodes. The **sediment yield** is determined by the following factors [12].

- the relief of the river basin,
- altitude,
- slope,
- size of the catchment area,
- the volume of the water transported,
- the climate,
- river basin geology,
- human activity (deforestation, agriculture, reservoirs).

In general, mountain rivers have the greatest erosion effects, so they carry the most sediment. Extremely high sediment yields are found in small mountain rivers that are at short distances from the oceans, since they also have a small flood area where deposited sediment could be deposited. Among the human activities, deforestation and overgrazing increase sedimentation, but the construction of dams and soil remediation work make reduce it. The amount of sediment also depends on the discharge. The amount of solid sediment increases with the rise in water yield, which is a consequence of the increased erosion effect, but the amount of sediment transported in solution decreases.

In the event of a high discharge, there is not enough time for the water to dissolve the chemicals in the soil layer, which in turn results in a dilution of the running water with respect to the dissolved sediment. There may be so-called clean water erosion where the river has deposited the sediment therefore form the shore the material erosion take place.

The composition of the sediment also depends on the velocity of the river. That is, the longer of stream of water, the more fine grained and finally the solution like sediment remains in the water. In slow water flow the sediment is more easily deposited, which is also reflected in the vertical distribution of the sediment concentration. As the sediment concentration nears the bedrock increases, this is due not only to the density distribution but also to the lower flow rate in the deeper layers.

Speed also plays a decisive role increasing in **river bends**. The formation of a bend is due to turbulent currents, but later there will be a difference in velocity: in the bends the flow on the outer edge is faster i.e. the peripheral velocity is higher that on the inner curve: inside the sedimentation outside the erosion are important therefore. This is how reefs form on the inner strip and the riverbed on the outer strip. The inner wall thus fills the riverbed but the outer wall is destroyed as is evident by the coastal willows: the water moves away from those inside, but it approaches the ones outside, often even undermining their roots. This is how the so-called meanders, which mean a pair of opposite bends, usually in series, that develop along a river or stream.

Meander formation causes large changes in rivers as it increases the length, thereby decreasing the slope of the riverbed and the water flow velocity. The meander term is also known from ancient Greek art, meaning the rectangular, repetitive, recurring, spiral-like ornamental motif, used as a symbol of eternal life and symbol of waves constantly haunting Greek people.

Geometric curiosity is the shape of the meander, which can be considered a sinusoidal curve. The angle of deviation in the curve (Θ) can be given by the maximum angle of deviation (ω) and summarized path of the meander length (M), S-path along bed

$$\Theta = \omega \sin\left(2\pi \frac{S}{M}\right)$$

Along the sin curve the directional change is the most uniform along rivers, but it takes a similar shape for example a bent metal plate where the mechanical stress is evenly distributed [13]. The temperature of rivers is less than 1°C daily due to the high specific heat of the water. The temperature of rivers is influenced by severed factors, such as:

- groundwater entering into the riverbed (reflective to geothermal gradient),
- water from surface runoff (snow, glacier, rainfall),
- tributaries,
- metropolitan and industrial influences (thermal, wastewater, mining) which have a warning effect regardless of the seasons.

Minor effects:
radiation (in, out effects),
heat exchange with air,
evaporation of water,

sludge content of water (heating of solid particles increases of water temperature).

Along the longitudinal sections the temperature of rivers is warmed both by the influx of urban waters and by the longitudinal climate. Therefore going to equator warm otherwise cool (Lena, Ob, Yenisey) [7].

The flow of rivers ensures constant mixing so that no **temperature** stratification occurs. In cold areas where the water cools below 0 °C rivers freeze, but this has a specific mechanism. Freezing can occur in water – floating sediment parts in the bottom of the riverbed and in coastal areas. Because the mixing in the running water is constant, the temperature throughout the cross section is nearly the same, so the ice formation in the entire volume may begin. In clear-water rivers, ice formation is less significant in the absence of a crystalline core. Rapidly flowing rivers and streams also freeze more freely due to the heat generated by friction. As a result, freezing starts first in the slow-flowing area of rivers. In summary, slow-moving, low-lines rivers will freeze first and at the latest, impure, fast, mountain watercourses [6].

An interesting phenomenon is the formation of the ice sheets at watercourses. To do this, the ice sheet on the shore breaks off and continues as a result of the ripples.

The rippling water freezes thickens from the top and ice particles flowing up from below, thickening it from below. The duration of ice formation is determined by the climate. In spring the ice sheet begins to thaw slowly, but the snow covering of the catchment area is melting faster. As a result, a tidal wave rushes down the river, breaking the ice stationary sheets and creating an ice barrier.

This is how the ice flooding (e.g. 1838 Pest) can occur. As the tributaries of the Tisza are more evenly distributed, no icy flows can occur.

The **estuaries** of rivers at sea or ocean deserve special mention. The estuaries types are greatly influenced by the dyke of sediment transported by the river itself (coarse, fine particles, size) and sediment repositioning capacity of the estuary (seaward, wavy flow along the coast).

In addition, climate change, vegetation and ultimately the difference in density of sea and estuarine water also play an important rule, due to the heavy flow of water – it gets back into the sea – even the debris flow.

Delta estuary is created at estuaries with low water movement: the incoming water deposits its sediment which is no able to be flushed back by a slow backflow forming nearly triangular land area. This deposit is strongest in the direction of river drift. If the sediment level is higher than the river level, the river level forms a new bed on both sides, thus encircling the sediment.

When delta changes, it is important to mention the anthropogenic effects. An excellent example of this is the Nile delta, which is a very fertile area for a very dense population. However, after the construction of Aswan Dam, the river delivers less water and sediment to its delta. Therefore this is no grown anymore – now it's destroying by erosion of the sea [14].

Fig. 3. *The Elbe*

Fig. 4. *The Duna delta*

The behaviour and state of the rivers, as it turns out from the above, contains a lot of physical factors. In education this topic is very suitable for demonstrating the relationship between geography and physics, from pre-school to university students. This article is intended to help geography colleagues understand the phenomenon of water flows, and to give physics colleagues examples of the natural appearance of physical laws.

References:

[1] Sós Katalin, Nánai, László, Physical Processes in Nature - The Soil, *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, volume 43, number 4, pages 37-43, ISSN 1335-4981, 2014.

[2] Sós Katalin, Nánai, László, The Physical Processes in Nature – The Water, *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, volume 45, number 1, pages 43-49, ISSN 1335-4981, 2016.

[3] Sós Katalin, Bartyik Tamás, Nánai, László, Physical processes in Nature – Water 2. (Oceans, Seas), *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, volume 46, number 1, pages 37-48, ISSN 1335-4981, 2017.

[4] Sós Katalin, Bartyik Tamás, Nánai, László, Physical Processes in Nature – The Water 3. Physics of Lakes, *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, volume 47, number 3, pages 25-34, ISSN 1335-4981, 2018.

[5] Jaafar Jotheria et al.: Holocene fluvial and anthropogenic processes in the region of Uruk in southern Mesopotamia. Quaterary International, 2018., Volume 483, pp 57-69.

[6] Jakucs László, Kaszab Imre: Hidrogeográfia, hidrogeológia. JATEPress, Szeged, 1995.
[7] Lovász György: Általános vízföldrajz. UNIVERSITY PRESS PÉCS, Pécs, 2000.
[8] Jane J. Lee: Where Does the Amazon River Begin? National Geographic News. 2014. february 15.
[9] http://fold1.ftt.uni-miskolc.hu/~foldfj/fizgeol/15viz.htm
[10] Tél Tamás: A Coriolis-erő és a modern környezetfizika: a lefolyótól a ciklonokig. Fizikai Szemle 2006/8. 263.o.
[11] Balla Zoltán: A Coriolis-erő hatása folyókra és a Baer-törvény. Történeti áttekintés. A Magyar Állami Földtani Intézet Évi Jelentése. 2007.
[12] Hetényi Magdolna: Geokémia. A hidroszféra. JATEPress, Szeged, 2013.
[13] Tímár Gábor, Telbisz Tamás: A meanderező folyók mederváltozása és az alakváltozás sebessége. Hidrológiai Közlöny 2005/5.
[14] Daniel Jean Stanley: Nile delta: extreme case of sediment entrapment on a delta plain and consequent coastal land loss. Marine Geology, Vol. 129 Issues 3-4 pp. 1996. 189-195

Notes to tables and figures:

Tab. 1. www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2010-0019_hidrologia-hidraulika/ch09.html
Fig. 1. www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2010-0019_hidrologia-hidraulika/ch09s02.html
Fig. 2. www.pannonris.hu/viziut/tudastar/vizrajzi-ismeret/vizrajzi-ismeret
Fig. 3 www.voos-camper.de/wohnmobil_hamburg_nordsee/index.html
Fig. 4. www.xn--krinfo-wxa.hu/node/6164

Author's addresses: Sós K., Department of General and Environmental Physics JGYPK
University of Szeged, Hungary, H-6725 Boldogasszony sgt. 6.
e-mail: soska@jgypk.u-szeged.hu
Bratyik T., Department of General and Environmental Physics JGYPK
University of Szeged, Hungary, H-6725 Boldogasszony sgt. 6.
Nánai L., Department of General and Environmental Physics JGYPK
University of Szeged, Hungary, H-6725 Boldogasszony sgt. 6.
e-mail: nanai@physx.u-szeged.hu

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2020 (49)

Storočnica prof. RNDr. Vladimíra Hajka a výskum magnetizmu v Košiciach

Štefan Luby

Úvod

Prof. RNDr. Vladimír Hajko, Dr. h. c.

Vladimír Hajko sa narodil 3. októbra 2020 v Krompachoch v rodine strojného zámočníka. O štyri roky neskôr, v čase ekonomických problémov v krompašských železiarňach, sa rodina presťahovala do Tisovca, kde otec dostal zamestnanie. Tisovec nazýval V. Hajko mestečkom svojej mladosti. V období hospodárskej krízy a jej následkov pomáhal už mladý Hajko ako študent reálneho gymnázia v Rimavskej Sobote rodine so šiestimi deťmi doučovaním spolužiakov. Na gymnáziu mal veľmi dobrých profesorov prírodovedných predmetov, pôsobili tu aj Alexander Matuška a František Studený. Tu sa vytvoril Hajkov vzťah k matematike a fyzike i zámer stať sa stredoškolským profesorom týchto predmetov.

Vladimíra Hajka vníma verejnosť vzhľadom na funkcie ktoré zastával – bol prorektorom Vysokej školy technickej v Košiciach, rektorom Univerzity Pavla Jozefa Šafárika a v rokoch 1974 – 1989 predsedom SAV – ako organizátora vedy a vzdelávania na Slovensku. On sám sa vo svojich pamätiach zmieňoval hlavne o týchto aktivitách a ich spoločenských súvislostiach [1, 2, 3]. Sú aj obvyklou témou jeho životopisných autorov [4, 5]. Preto pri takej príležitosti ako je storočnica je vhodné venovať pozornosť V. Hajkovi ako vedcovi a pedagógovi vo fyzike, osobitne v magnetizme.

Keď začal Hajko v r. 1939 študovať na Univerzite Komenského, možnosť reagovať na Slovensku na vývoj vo svetovej matematike a fyzike bola obmedzená [6]. Priaznivou okolnosťou bolo, že v roku 1940 sa z Prahy na Slovensko vrátil prof. Dionýz Ilkovič, spolupracovník prof. Jaroslava Heyrovského, neskoršieho laureáta Nobelovej ceny. Všimol si V. Hajka a už v 2. ročníku si ho vybral za demonštrátora. D. Ilkovič pôsobil v Ústave technickej fyziky SVŠT, kde mal jedného asistenta (G. Kupčo) a jednu vedeckú pomocnú silu (V. Hajko) [5]. Inicioval budovanie Ústavu atómovej fyziky na Prírodovedeckej fakulte UK. Na univerzite bol vtedy už vybudovaný Ústav lekárskej fyziky a vďaka novému astronomickému observatóriu na Skalnatom plese sa vytvorili podmienky pre rýchlejší vývoj astrofyziky a astronómie.

Na ďalšie smerovanie slovenskej fyziky významne vplývala vtedajšia technika ([6], s. 289 – 376). V povojnovom období sa pokračovalo v elektrifikácií Slovenska, stavbe elektrárenských kapacít vrátane transformačných staníc a zavádzaní elektrických pohonov vo všetkých oblastiach priemyslu, či už išlo o tehelne, papierne, textilky, cukrovary alebo vojenský priemysel. Objednávkou bola fyzika magnetizmu, návrh magnetických obvodov a jadier, pochopenie procesov magnetovania materiálov, strát a iné. Tu sú korene rozvoja košickej školy magnetizmu. Zatiaľ čo v Bratislave sa V. Hajko pod vplyvom D. Ilkoviča venoval meracej technike pre polarografiu, v Košiciach bol jednou z kľúčových postáv formovania fyziky magnetizmu a magnetických materiálov, ktorá získala medzinárodnú úroveň.

Výskum magnetizmu

Po počiatočných štúdiách premagnetovania, hysterézie a demagnetizičného faktora koncom 50. rokov 20 st. V. Hajko a jeho spolupracovníci S. Filka, J. Daniel-Szabó, L. Potocký, A. Zentko, A. Zentková, neskôr aj V. Hajko ml. a i. vykonali kus práce v skúmaní rozličných aspektov Barkhausenovho javu. Objavil ho H. G. Barkhausen v r. 1919. Spočíva v malých skokových zmenách magnetickej polarizácie materiálu pri zmene vonkajšieho magnetického poľa. Pozoruje sa v magneticky mäkkých magnetických materiáloch a je dôsledkom posunov doménových stien, príp. rastu domén. Sprevádza ho akustický, Barkhausenov šum, ktorý možno počuť v reproduktore ak naň pripojíme cievku, ktorá ovíja magnetický materiál.

V. Hajko a kol. sa zamerali na tzv. negatívne Barkhausenove skoky. Pozornosť si zaslúži súbor ich prác z druhej polovice 60. rokov 20. st., uverejnených v Czechoslovak Journal of Physics. Negatívne skoky môžu byť spôsobené konfiguračnými zmenami lokálnej doménovej štruktúry, pričom súvisia s pozitívnymi skokmi [7]. V tejto práci autori citujú články V. Hajka a kol. Odvolávajú sa na ich výsledky s Fe-Si monokryštálmi [8] ako aj na výsledky s polykryštalickými drôtmi [9]. Keďže tieto práce citujú s odstupom viac ako 36 rokov, niet sporu o tom, že v danej oblasti patria medzi klasiku. Bolo to vďaka meraniam na aparatúre s vysokou citlivosťou. Práca [8] podporuje teorém tandemového charakteru pozitívnych a negatívnych skokov a cituje sa aj v článku z roka 2018 [10]. V ďalšej práci [11] dávajú autori negatívny skok do súvisu s vírivými prúdmi, ktoré vznikajú pri pozitívnom skoku, pričom časový interval medzi skokmi je 10^{-7} s. Tieto skutočnosti sú súčasťou ich fenomenologickej teórie vzniku negatívnych skokov.

Druhá nosná téma V. Hajka a kol. v magnetizme bol výskum javov *reptation* a *bascule*. Ich podstatu približuje článok [12]. Keď permanentný magnet cyklujeme medzi poľami H_A a H_B, pričom $|H_A| > |H_B|$, nereverzibilnú zmenu magnetizácie pri H_A možno dať do súvisu s tromi mechanizmami – viskozitou, *reptation* a *bascule*. *Reptation* sa vzťahuje na zmenu magnetizácie úmernú počtu cyklov, a vzniká variáciami voľnej energie pri poli H_A. *Bascule* sa vzťahuje na diferenciu komparatívnych zmien v magnetizácii s počtom cyklov pri daných poliach. Fenomenologickú teóriu efektu *bascule* navrhol Néel, pričom, podľa [12] „ jeho predpoveď potvrdili starostlivé experimenty na monokryštalických vzorkách v prácach [13, 14]". Je to ďalšie uznanie košickej škole magnetizmu. Zaujímavým ohlasom na článok [14] je aplikačne ladená práca [15] z roka 1988, teda po 13 rokoch, čo je viac ako obvyklá citačná životnosť vo fyzike. Úvodom k tejto problematike a javu *reptation* bola práca [16].

Ďalší výskum košickej školy za účasti V. Hajka v magnetizme pokračoval v 70. a 80. rokoch 20. st., venoval sa aj novým materiálom, napr. magnetickým kovovým sklám, technológiu ktorých vyvinul P. Duhaj vo Fyzikálnom ústave SAV. V. Hajko bol autorom alebo spoluatorom 38 článkov v domácich a zahraničných časopisoch. Košice sa stali miestom tradičných celoštátnych konferencií o magnetizme.

Ocenením tohto výskumu bola Národná cena SSR v r. 1972 a podiel A. Zentka na Štátnej cene P. Duhaja a kol. v roku 1988.

Kvalifikované citácie

Súčasná citačná horúčka začala v 60. rokoch 20. st., keď Eugen Garfield, priekopník scientometrie, založil vo Filadelfii Ústav vedeckých informácií. Spočiatku zdôrazňoval, že citačné analýzy zaviedol ako nástroj výskumu prepojení a klastrovania vo vede. Vývoj sa však uberal tým smerom, že citácie sa stali kritériom vedeckej excelentnosti. Na ich báze vznikol neskôr Hirschov index.

Citácie sa sledovali aj predtým. V habilitačnom spise, ktorý predložil D. Ilkovič ešte v Prahe v školskom roku 1937/1938, uvádza 30 citácií svojich prác [17]. Z nich osem bolo „kvalifikovaných", t.j. citujúci autor komentuje alebo rozvíja citované výsledky. Ešte v roku 1982, keď autor tohto článku obhajoval doktorskú dizertáciu, boli citácie tohto typu potrebnou súčasťou rozpravy. Zmyslom tohto expozé je poukázať na to, že viaceré citácie košickej školy magnetizmu, ako vyplýva z predošlého, mali práve tento charakter.

Táto okolnosť očividne pomohla, keď v roku 1986 Š. Luby a pražský odborník v scientometrii J. Vlachý, ako poradcovia predsedu SAV V. Hajka, navrhli v SAV zaviesť všeobecné vykazovanie citovanosti vedeckých prác. Dovtedy sa citácie sledovali iba na niektorých pracoviskách, napr. v Elektrotechnickom ústave SAV a v Ústave experimentálnej endokrinológie SAV. V. Hajko tento návrh razantne podporil, čo bolo potrebné, lebo odpor voči tejto novinke, najmä v radoch starších pracovníkov, bol značný.

Na druhej strane treba konštatovať, že vývoj v citačných analýzach sa v ostatných dvadsiatich rokoch neuberal od kvantity ku kvalite ale od kvality ku kvantite. Nástupom veľkej kohorty výskumníkov v Číne i v ďalších rozvíjajúcich sa krajinách, paralelizmom riešených tém, čo výskum predražuje, exponenciálnym rastom počtu publikácií sme sa dostali do situácie, že citácie sa stali anonymnými číslami. Ich rast možno dokumentovať výskumom módneho materiálu – grafénu. Citácie tu možno získať pomerne ľahko, ale z rozboru prác vyplýva, že majú prevažne evidenčný charakter, v jednej hranatej zátvorke sa uvedie aj 10 odkazov. Kvalifikovaných citácií býva veľmi málo. Príznačná je odozva na práce laureátov Nobelovej ceny za grafén (2010) – citácie A. Geima a K. S. Novoselova vysoko prevyšujú ohlas G. Binniga a H. Rohrera (1986), vynálezcov hlavných diagnostických a technologických nástrojov nanovedy – rastrovacieho tunelového a atómového silového mikroskopu, a tiež P. Grünberga a A. Ferta (2007) – objaviteľov a konceptorov nového vedného odboru spintroniky (Tab. 1). Originálne poznatky o grafene sa získavajú na vrchole pyramídy s enormne širokou základňou. A pokiaľ ide o Čínu, tá je dnes v počte publikácií na druhom mieste za USA. Ale ich veda zatiaľ neprináša prelomové inovácie. "My, Číňania, dokážeme urobiť z jednotky desiatku, ale nie z nuly jednotku", povzdychol si jeden predstaviteľ tejto komunity.

Meno	Publikácie	Citácie	Hirschov index
A. Geim	350	179 200	107
K. S. Novoselov	368	174 800	113
G. Binnig	118	24 300	55
H. Rohrer	94	12 460	38
A, Fert	496	36 200	84
P. Grünberg	205	8 920	39

***Tab. 1**: Porovnanie ohlasu vybraných laureátov Nobelove ceny*

Monografie, učebnice

V. Hajko stelesňoval symbiózu výskumu a výučby. Bol navštevovaným prednášateľom, písal a redigoval učebnice a monografie. Spolu s J. Danielom-Szabó vydali *Základy fyziky*, Bratislava 1980 a 1983 a so spolupracovníkmi *Magnetizačné procesy*, Bratislava 1982. Bestselerom sa stala zbierka *Fyzika v príkladoch* [18] , ktorá vyšla v Československu opakovane v rokoch 1960, 1963, 1967, 1971 a 1983, v dvoch vydaniach v Lipsku – 1969 a 1975, vo Varšave roku 1967 a vo Frankfurte nad Mohanom – Zürichu v roku 1970. Pritom už prvé vydanie malo 3200 výtlačkov. Neskôr vydal so spolupracovníkmi knihu *Fyzika v experimentoch,* Bratislava 1988, jej prepracované a doplnené znenie vyšlo v angličtine – *Physics in Experiments* [19]. Kniha zhrnula fyziku od relativistických a gravitačných experimentov cez astrofyziku a jadrovú fyziku až po polovodiče, magnetizmus a kvantovú elektroniku. Osobitne spracovanie magnetizmu ale aj iných kapitol má punc vysokej originality.

Záver

Publikácie V. Hajka a kol. v slovenčine, nemčine a angličtine získali ohlas primeraný vtedajšej publikačnej praxi a slovenským možnostiam. Košická škola vynikla precíznym experimentovaním, vďaka ktorému sa viaceré práce zaradili do kategórie klasiky a citačne prežili niekoľko desaťročí. Tieto fakty doplňujú obvyklý obraz V. Hajka ako akademického funkcionára a manažéra vedy. Ale to, že mohol takéto poslanie vykonávať, bolo zakotvené vo fyzike, resp. matematike, ktoré ho vyzbrojili exaktným uvažovaním a ostrými, nie amorfnými riešeniami. Mal rád humor J. Wericha a riadil sa jeho zásadou – „keď hovorím, tak sa počúvam, aby som nepovedal niečo, čo nechcem počuť“. Svoje konštruktívne postoje doplňoval primeranou dávkou kritiky, vyjadrením ktorej je jeho sebareflexia: „U nás sme mali spočiatku študentokraciu, potom nastúpila asistentokracia, vystriedala ju docentokracia a dnes máme profesorokraciu. Ale, priatelia, veď to sú stále tí istí ľudia!” Prof. V Hajko sa osobne zaslúžil o zmiernenie alebo kompenzáciu politických krívd a v SAV boli po roku 1968 zamestnaní ľudia, ktorí museli opustiť vysoké školy. Storočnica je príležitosť pripomenúť si V. Hajka ako človeka, ktorého príklad je hodný nasledovania.

L i t e r a t ú r a - R e f e r e n c e s

[1] V. Hajko, *Na čele Slovenskej akadémie vied (1974 – 1989*). ed. Š. Luby a V. Hajko ml., VEDA, vydavateľstvo SAV, Bratislava 2015, ISBN 978-80-1455-5.

[2] V. Hajko, *Starec a jeho myšlienkový svet*, 2007, nepublikované.

[3] V. Hajko, *Moji učitelia*, 2009, nepublikované.

[4] Š. Luby, Storočnica profesora Vladimíra Hajka, Čs. čas. fyz., v tlači.

[5] J. Červinka, Predseda SAV akademik Vladimír Hajko šesťdesiatpäťročný, Správy SAV, 60 – 69, 1985.

[6] J. Tibenský, O. Poss a kol., *Priekopníci vedy a techniky na Slovensku*, diel 3, AEP, Bratislava 1999, 417 s., 181 – 216, ISBN 80-88880-34-3.

[7] S. Yang, G. S. D. Beach, J. L. Erskine, Negative Barkhausen jumps in permalloy thin-film microstructures, J. Appl. Phys., 100: 113914, 2006.

[8] A. Zentko, V. Hajko, The occurrence of negative Barkhausen jumps during the magnetization of a Fe-Si frame monocrystal, Czech. J. Phys., 18: 1026 – 1033, 1968.

[9] V. Hajko, A. Zentko, S. Filka, The occurrence of negative Barkhausen jumps in the process of magnetization of polycrystalline magnetic ferromagnets, Czech. J. Phys. 19: 547 – 548, 1969.

[10] V. Ionita, M. Codescu, E. Chitanu, L. Petrescu, E. Cazacu, Hysteresis modeling accuracy for soft magnetic nanopowders, Rev. Roumaine de Sciences, Techniques Serie Electrotechnique et Energetique, 63: 11 – 14, 2018.

[11] A. Zentkova, A. Zentko, V. Hajko, The origin of negative Barkhausen jumps as a consequence of eddy currents in ferromagnets, Czech. J. Phys., 19: 650 – 656, 1969.

[12] P. J. Thompson, R. Street, Viscosity, reptation and tilting effects in permanent magnets, J. Phys. D: Appl. Phys., 30: 1273 – 1284, 1997.

[13] J. Daniel-Szabó, H. Gengnagel, Reptation- und Bascule-Effekt in Fe-Al Einkristallen, Phys. Stat. Sol. (b), 1: 512 - 516,1961.

[14] J. Daniel-Szabó, V. Hajko, H. Gengnagel, Studium des Reptation und Bascule-Effektes verschiedener Ferromagnetika bei unterschiedlichen Magnetisierungszuständen, Phys. Stat. Sol. (b), 9: 201 – 208, 1965.
[15] G. W. D. Spratt, P. R. Bissell, R. W. Chantrell, E. P. Wohlfarth, Static and dynamic experimental studies of particulate recording media, J. Magn. Magn. Mater., 75: 309 – 318, 1988.
[16] H. Gengnagel, V. Hajko, J. Daniel-Szabó, Zur Sichtbarmachung von Reptation-Erscheinung an Rahmeneinkristallen, Czech. J. Phys., 12: 714 – 718, 1962.
[17] Š. Luby, V zajatí dogmatickej politiky, in: *Moji intelektuáli*, VEDA, vydavateľstvo SAV, Batislava 2003, 53 – 57, ISBN 80-224-0767-4.
[18] V. Hajko a kol., *Fyzika v príkladoch*, 1. vydanie SVTL, Bartislava 1960.
[19] V. Hajko a kol., *Physics in Experiments*, VEDA, Publ. House of SAS, Bratislava 1997, IBAN 80-224-0483-7.

Adresa autora: Štefan Luby, Centrum spoločných činnosti SAV, Encyklopedický ústav
Bradáčova 7, 85102 Bratislava
e-mail: stefan.luby@savba.sk

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2020 (49)

INFORMÁCIE

Minuloročná konferencia slovenských matematikov - päťdesiat rokov od prvej

Mariana Marčoková

51. konferencia slovenských matematikov (KSM) sa konala 28. novembra až 1. decembra 2019 opäť v Jasnej. Od 1. KSM, ktorá sa konala 28. novembra až 1. decembra 1969 uplynulo presne 50 rokov. Histórii týchto konferencií sa venovalo mnoho článkov (napr. [1], [2], [3]), z ktorých treba vyzdvihnúť najmä viaceré články Beloslava Riečana a Pavla Grešáka, pretože nám priblížili začiatky týchto konferencií. Ako sa dozvedáme z uvedených článkov, prípravný výbor 1. KSM viedol Václav Medek, a jeho členmi boli: Ladislav Berger, Milan Hejný, Milan Kolibiar, Ladislav Mišík, Jozef Moravčík, Cyril Palaj, Beloslav Riečan, Karol Rovan a Tibor Šalát. Jej organizáciou bola poverená žilinská pobočka JSMF na čele s Ladislavom Bergerom. Sú to všetko matematici, ktorí v tom období boli významnými osobnosťami slovenskej matematiky. Zostávajú nimi dodnes, i keď žije už len jeden z nich (Milan Hejný). Od 1. KSM až doteraz sa organizačný výbor týchto konferencií skladá z členov žilinskej pobočky JSMF a úlohu prípravného výboru plní programový výbor, ktorý má dve sekcie – vedeckú a pedagogicko-didaktickú. Členmi programového výboru sú osobnosti súčasnej slovenskej matematiky.

Keďže konferencie sa zúčastňujú učitelia všetkých typov škôl (ZŠ, SŠ i VŠ) ako aj matematici a informatici z výskumných ústavov a iní priatelia matematiky, je potrebné vhodne zostaviť program konferencie, teda zaradiť prednášky do tematických blokov tak, aby sa ich mohli zúčastniť príslušné cieľové skupiny (učitelia ZŠ, učitelia SŠ, učitelia VŠ a vedci). V ostatných rokoch sa nám osvedčilo zaradiť prednášky z teórie vyučovania matematiky a informatiky do sobotňajšieho programu, a ostatné dva dni (piatok a nedeľa) sú venované populárno-vedeckým matematickým a informatickým prednáškam, v nedeľu aj niekoľkým prednáškam z histórie matematiky. Program 51. KSM sa týmto spôsobom už prirodzene členil podľa uvedenej charakteristiky. Venujme sa teda programu jednotlivých dní 51. KSM.

Prvý deň 51. KSM venovaný základom a aplikáciám matematiky

Program začal pozvanou prednáškou *Objem, dimenzia a integrál* Jozefa Kiseľáka z Matematického ústavu UPJŠ v Košiciach, v ktorej sa zameral na pojmy známe už žiakom ZŠ, na pojmy ako sú dĺžka, obsah a objem, a napriek tomu sú niekedy problematické porozumieť aj študentom VŠ (nielen v rámci vyučovania matematiky, ale aj fyziky a iných prírodných vied a najmä technických vied).

Obr. 1*: Predseda JSMF a SMS Martin Kalina otvára 51. KSM.* *Foto: Martin Hriňák*

Ďalšiu pozvanú prednášku predniesol hosť z ČR, Michal Křížek z Matematického ústavu Akademie věd v Prahe. Už jej názov *Kouzlo čísel, Od velkých objevů k aplikacím* napovedal zaujímavý obsah tejto populárno-vedeckej prednášky. V nej uviedol niektoré súvislosti teórie čísel s inými oblasťami matematiky a jej aplikáciami.

Do obedňajšej prestávky sme si vypočuli ešte dve krátke prihlásené prednášky. V prvej z nich s názvom *O číslach a grupách* prednášajúci Roman Nedela vyslovil potešenie zo zaradenia svojej prednášky hneď za prednáškou Michala Křížeka, pretože sa jeho prednáška v istom zmysle tiež týkala teórie čísel. V prednáške ukázal, ako vlastnosti množiny prirodzených čísel ovplyvňujú existenciu zložitejších matematických štruktúr. V ďalšej krátkej prednáške s názvom *Modelovanie transplantačnej čakacej listiny* prednášajúca Katarína Cechlárová zvýraznila použiteľnosť výsledkov tohto modelovania v medicínskej praxi.

Popoludňajší program začal pozvanou plenárnou prednáškou *Matematika a prírodoveda ako nástroj porozumenia prírode a vesmíru*, ktorú predniesol Ivo Čáp, mnohoročný vedúci slovenského družstva na medzinárodných fyzikálnych olympiádach a olympiádach z prírodných vied.

Ďalej nasledovali krátke prihlásené prednášky, ktoré predniesli: Max Bazovský (*Algorithms and Mathematics: Yesterday, Today and Tomorrow*), Katarína Hriňáková (*O grafoch s daným počtom vrcholov a blokov a maximálnym Wienerovým indexom*), Michal Kollár (*Softvér na segmentáciu chránených území Natura 2000*), Martin Ambroz (*Data assimilation v modelovaní šírenia lesného požiaru*), Pavol Bokes a Branislav Novotný (*Analyzing skin cell gene expression data*), Oľga Stašová (*Filtrácia radarových dát získaných technológiou SAR pomocou anizotropných difúznych modelov*) a Balázs Kósa (*Segmentácia 3D obrazu podporovaná mračnom bodov*). Ako vidieť z názvov týchto prednášok išlo o inžinierske a prírodovedné aplikácie matematiky a informatiky.

Večer sa konalo otvorené (verejné) zasadnutie Výboru SMS, ktoré viedol podpredseda Výboru SMS Dušan Šveda. Hlavným bodom programu boli systémové zmeny na skvalitnenie matematického vzdelávania a ich aktuálny stav. Po skončení sa konala uzavretá schôdza Výboru SMS vedená predsedom SMS Martinom Kalinom.

Druhý deň 51. KSM venovaný vyučovaniu matematiky

K terminologii (nejen) v české školské matematice – bol názov pozvanej plenárnej prednášky hosťa z ČR Josefa Molnára. Zdôraznil, že v súčasnosti, keď sa na základných a stredných školách v ČR používa omnoho viac učebníc než v minulosti, je nutnosť jednotnej terminológie a označovania naliehavejšia než v minulosti.

Nasledovala prednáška oceneného *Cenou Petra Pavla Bartoša*. Bol ním Martin Hriňák. Prevzal ocenenie od predsedu JSMF a SMS Martina Kalinu a predniesol prednášku *Ako tvoriť a nespotvoriť matematické úlohy*. Priblížil tvorbu úloh pre matematické korešpondenčné semináre a súťaže, a venoval sa úskaliam, ktoré ju sprevádzajú.

Ďalší blok prihlásených krátkych prednášok bol venovaný vyučovaniu matematiky na školách všetkých typov. Prednášali: Ivan Kadlečík (*Slovenská norma na matematické znaky a značky z roku 2017*), Gabriela Pavlovičová (*Niektoré miskoncepcie žiakov pri riešení úloh zameraných na zlomok ako časť celku*), Veronika Bočková (*Neštandardné úlohy z geometrie*), Lucia Csachová (*Slovenské ľudové umenie – moderná cesta (aj) v školskej geometrii*), Jana Volná a Petr Volný (*GeoGebra institut Ostrava*), Valéria Švecová (*Pojmové mapovanie ako prostriedok na štrukturalizáciu matematických vedomostí*), Tatiana

Rückschlossová (*Softvérovo inovované študijné materiály z deskriptívnej geometrie*) a Kristína Bulková (*Matematický B-deň 2018*).

Po obedňajšej prestávke nasledovalo pedagogické popoludnie venované vyučovaniu elementárnej matematiky a príprave učiteľov, ktoré viedol Hynek Bachratý. Tento program začal prezentovaním skúseností s vyučovaním matematiky metódou VOBS (*Vyučovanie orientované na budovanie schém*) na prvom stupni základných škôl. Prezentácie predviedli učiteľky základných škôl: Zuzana Chupáňová, Alena Vrláková, Eva Čapkovičová, Jana Vongrejová, Martina Rajniaková, Stanislava Opátová a Zuzana Brňáková. Viacerých z nás presvedčili, že metóda je úspešná a dosahujú takýmto vyučovaním veľmi dobré výsledky. Potom sa predstaviteľky z pedagogických fakúlt v Bratislave a v Prešove (Katarína Žilková, profesorka PdF UK v Bratislave, Edita Partová, dekanka PdF UK v Bratislave a Iveta Scholtzová, dekanka PdF PU v Prešove) venovali *problémom a výzvam prípravy učiteľov pre (pred) primárne matematické vzdelávanie.* Záverečnú panelovú diskusiu *o význame a stave vyučovania matematiky na prvom stupni ZŠ* viedol Hynek Bachratý.

***Obr. 2**: Prednáša Martin Hriňák ocenený Cenou P. P. Bartoša.* *Foto: Katarína Hriňáková*

Večerný spoločenský program začal blahoželaním jubilantom, verným a mnohoročným účastníkom našich konferencií: doc. Bukovskej, prof. Bukovskému a doc. Rosovi.

Tretí deň 51. KSM načrel aj do histórie matematiky, aj do matematiky v informatike

Začal prednáškou jubilanta profesora Leva Bukovského *Žil som s matematikou,* v ktorej porozprával, čo ho k matematike v mladosti pritiahlo, aké musel prekonávať prekážky a o úspešnom pôsobení na UPJŠ v Košiciach.

Nasledujúce krátke prihlásené prednášky boli rôznorodého charakteru. Predniesli ich: Milan Lekár (*Vplyv emigrácie na vývoj slovenskej matematiky*), Ondrej Hutník (*Trochu matematiky v scientometrii*), Lukáš Miňo (*Hľadanie férového rozvrhu pre Turnaj mladých fyzikov*), Tomáš Plachetka (*Logika v databázových systémoch*) a Katarína Bachratá (*Vyučovanie matematiky pre študentov informatiky v bakalárskom stupni štúdia*).

O konferencii na záver

Výber hlavných prednášajúcich uskutočnil programový výbor vychádzajúc z návrhov členov Výboru SMS v zložení:

Katarína Cechlárová, Martin Kalina, Mariana Marčoková, Daniel Ševčovič, Jozef Doboš, Hynek Bachratý, Soňa Čeretková, Iveta Scholtzová, Dušan Šveda, Katarína Žilková.

Konferenciu zorganizovali:

Božena Dorociaková (ubytovanie, stravovanie, finančné úhrady), Mária Kúdelčíková (editor zborníka), Mariana Marčoková (program, editor zborníka), Zuzana Sedliačková (www stránka: www.konferenciajasna.sk, faktúry, administratíva), Martin Záborský (IT výpomoc).

Poďakovanie: Veľká vďaka za finančnú podporu konferencie patrí
Matematickému ústav SAV
a Nadácii Pantheon Foundation.

L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s

[1] Grešák, P.: *Niečo o tom, ako to v Jasnej pod Chopkom začalo,* 40. konferencia slovenských matematikov, Jasná pod Chopkom, 27.–30. november 2008, EDIS vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 2008 (editori: E. Capková, M. Marčoková), 40-48.

[2] Riečan, B.: *Kľúč k organizácii vedy,* 40. konferencia slovenských matematikov, Jasná pod Chopkom, 27.–30. november 2008, EDIS vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 2008 (editori: E. Capková, M. Marčoková), 51-53.

[3] Marčoková, M.: *50 rokov Matematickej Jasnej*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky, 1/2019 (48), 21-29.

Adresa autora: Katedra stavebnej mechaniky a aplikovanej matematiky, Stavebná fakulta, Žilinská univerzita, Univerzitná 1, 010 26 Žilina,
e-mail: mariana.marcokova@gmail.com

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2020 (49)

SPOMÍNAME

100. výročie narodenia prof. RNDr. Marka Šveca, DrSc.

prof. RNDr. Marek Švec, DrSc.

Prof. RNDr. Marko Švec, DrSc., významný slovenský matematik a vysokoškolský učiteľ, odborník v teórii diferenciálnych rovníc sa narodil 10. októbra 1919 v obci Ďorok (v roku 1948 obec, ľudovo nazývanú aj Derek, premenovali na počesť slovenského učenca z 19. storočia Andreja Kmeťa na Kmeťovo). Patril k prvej generácii slovenských študentov, ktorí mohli študovať matematiku na slovenských vysokých školách aj k prvej generácii slovenských matematikov nasledujúcej po „otcoch zakladateľoch“, medzi ktorých – ako uvidíme z nášho rozprávania – patria akademik Jur Hronec (1881 – 1959), akademik Štefan Schwarz (1914 – 1996) a profesor Anton Huťa (1915 – 2001).

Univerzitu, na ktorej mal Marko Švec neskôr viac ako tri desaťročia pôsobiť ako vysokoškolský profesor, založili len chvíľu pred jeho narodením: 27. júna 1919 prijalo Národné zhromaždenie zákon 375/1919 Sb. o založení československej štátnej univerzity v Bratislave, ktorá bola nariadením vlády republiky Československej 595/1919 Sb. z 11. novembra 1919 pomenovaná Univerzitou Komenského. Univerzita mala mať štyri fakulty: právnickú, lekársku, prírodovedeckú a filozofickú. Tri z nich začali svoju činnosť čoskoro: 30. júla 1919 začala pôsobiť lekárska fakulta, 22. 9. 1921 filozofická a zimným semestrom „študijného roku 1921/22“ právnická fakulta (tak to uvádza vládne nariadenie 8/1927 Sb. zo 17. 2. 1927). Ako uvidíme, Prírodovedecká fakulta UK si na svojich študentov musela počkať až do roku 1940.

Po štúdiu na gymnáziách v Nových Zámkoch a Šuranoch pokračoval Marko Švec v rokoch 1939 – 1943 štúdiom odboru matematika a fyzika na

Prírodovedeckej fakulte Slovenskej univerzity, ktoré ukončil v roku 1944 druhou štátnou skúškou z matematiky a fyziky. Jeho prechod zo strednej na vysokú školu sa odohral v období veľkých politických zmien (Mníchovský diktát 29. – 30. 9. 1938, vyhlásenie o autonómii Slovenska 6. 10. 1938, Viedenská arbitráž 2. 11. 1938, vyhlásenie Slovenského štátu 14. 3. 1939). Tie zasiahli aj Švecovo rodisko: obec Ďorok pripadla v dôsledku Viedenskej arbitráže vtedajšiemu horthyovskému Maďarskému kráľovstvu.

Do obdobia rokov 1938 – 1940 spadá aj vznik dvoch inštitúcií, ktoré vytvorili základ pre rozvoj modernej slovenskej matematiky (na obidvoch Marko Švec neskôr pôsobil ako profesor): Slovenskej vysokej školy technickej a Prírodovedeckej fakulty Slovenskej univerzity (ako sa z Univerzity Komenského stala Slovenská univerzita a z tej opäť Univerzita Komenského, sa dozvieme o chvíľu). Veľké zásluhy o vznik obidvoch týchto ustanovizní má profesor Jur Hronec, ktorý už v roku 1934 pri oslavách 250. výročia založenia Trnavskej univerzity vystúpil s požiadavkou zriadenia vysokej školy technickej na Slovensku a rozšírenia univerzity v Bratislave o prírodovedeckú fakultu. Na jar 1936 inicioval *Akciu za vybudovanie slovenských vysokých škôl,* ktorá dosiahla svoj cieľ: 25. 6. 1937 národné zhromaždenie prijalo zákon č. 17/1937 Sb., ktorým sa v Košiciach zriadila štátna vysoká škola technická s názvom Vysoká škola Dr. M. R. Štefánika. V júli 1938 boli menovaní jej prví desiati profesori, za matematiku to boli PhDr. Jur Hronec a PhDr. Josef Kaucký. Jur Hronec bol na prvom zasadnutí profesorského zboru 4. 8. 1938 zvolený za rektora. Ešte v Košiciach bola vytvorená Stolica matematiky, na ktorej pod vedením profesora Hronca pôsobili profesor Kaucký a Štefan Schwarz. Keď Košice v dôsledku Viedenskej arbitráže pripadli horthyovskému Maďarsku, bol pôvodný termín otvorenia školy 30. 10. 1938 zrušený a vysoká škola technická sa premiestnila najprv do Prešova a začiatkom decembra 1938 do Martina, kde dňa 5. 12. 1938 začal jej prvý školský rok. Vládnym nariadením zo dňa 14. 2. 1939 zmenila slovenská autonómna vláda ešte počas pôsobenia školy v Martine jej názov na Slovenskú vysokú školu technickú. Po vytvorení Slovenského štátu slovenský snem zákonom č. 188/1939 Sl. z. zo dňa 25. 7. 1939 zriadil školu už pod názvom Slovenská vysoká škola technická (SVŠT) a za sídlo jej definitívne určil Bratislavu (o umiestnenie vysokej školy technickej sa v čase jej sťahovania z Prešova do Martina uchádzali aj mestá Trenčín, Banská Štiavnica a Ružomberok). SVŠT mala podľa zákona šesť odborov (tie boli základmi neskorších fakúlt), z nich je pre nás zaujímavý odbor špeciálnych náuk, ktorý zahŕňal oddelenie zememeračského inžinierstva, oddelenie prírodných vied pre kandidátov učiteľstva na školách stredných, oddelenie poistnej matematiky a oddelenie baníckeho a hutníckeho inžinierstva. V roku 1940 sa Stolica matematiky rozdelila na I. stolicu matematiky pod vedením prof. Kauckého a II. stolicu matematiky pod vedením prof. Hronca a Ústav aplikovanej matematiky na odbore špeciálnych náuk.

Teraz našu pozornosť obrátime na bratislavskú univerzitu. Zmenená politická situácia našla svoj odraz v jej novom mene: 26. januára 1939 prijal Akademický senát Univerzity Komenského návrh na zmenu názvu Univerzity Komenského na Slovenskú univerzitu v Bratislave, nariadenie vlády Slovenskej krajiny č. 41/1939 zo dňa 14. februára 1939 túto zmenu kodifikovalo (pomerne neutrálny názov Slovenská univerzita mal predísť sporom o to, po ktorom významnom slovenskom dejateľovi by sa univerzita mala pomenovať, uvažovalo sa napríklad o Ľudovítovi Štúrovi). Zákon č. 168/1940, ktorým sa zriaďuje Slovenská univerzita v Bratislave (*Universitas Slovaca Istropolitana*) s katolíckou bohosloveckou, evanjelickou a. v. bohosloveckou, právnickou, lekárskou, filozofickou, a prírodovedeckou fakultou, sa pokladá za okamih vzniku Prírodovedeckej fakulty UK (zaujímavé je, že sám Marko Švec, ktorý na tejto fakulte študoval, píše v [6] „*o jej vytvorení v štud. roku 1939 – 40*“). Poznamenajme ešte, že zmenený názov univerzity ostal v platnosti až do roku 1954 (nariadením SNR č. 88/1945 Zb. nar. SNR sa zmenilo latinské označenie na *Universitas Slovaca Bratislavensis*). Pôvodne sa v roku 1945 počítalo s možnosťami nazvať univerzitu po Ľudovítovi Štúrovi, či Pavlovi Jozefovi Šafárikovi, prípadne sa vrátiť k pôvodnému označeniu Univerzita Komenského. Poslednú alternatívu napokon realizovalo vládne nariadenie 49/1954 Sb. z 12. 11. 1954.

Na Prírodovedeckej fakulte UK bolo otvorené osem semestrov trvajúce štúdium pre budúcich stredoškolských profesorov prírodovedne zameraných predmetov, s možnosťou vykonať rigorózne skúšky. 1. októbra 1940 bolo vymenovaných deväť profesorov tejto fakulty. Publikácia [14] uvádza: „*Pre odbor matematiky boli na Prírodovedeckej fakulte Slovenskej univerzity vymenovaní už v r. 1940 ako bezplatní profesori prof. PhDr. Jur Hronec a prof. PhDr. Josef Kaucký, ktorí boli riadnymi profesormi a prednostami I. a II. ústavu matematiky na Slovenskej vysokej škole technickej v Bratislave, ale ich plné vyťaženie pedagogickými a organizačnými povinnosťami na SVŠT im znemožňovalo venovať sa v náležitej miere poslucháčom PF SU špecializovanými prednáškami v potrebnom rozsahu a skladbe. Prevažná väčšina výučby matematických predmetov prebiehala spoločne pre poslucháčov SVŠT aj pre poslucháčov učiteľských kombinácií s matematikou na Prírodovedeckej fakulte SU.*“ O spoločnom vyučovaní hovorí aj profesor Riečan v [13]: „*Ako vyzeralo vyučovanie matematiky? Vyučovala sa spoločne pre technikov aj prírodovedcov. Po ročníkoch sa striedali dvaja profesori: okrem Jura Hronca ešte z Brna dochádzajúci Josef Kaucký (1895–1982) a dvaja asistenti, absolventi Univerzity Karlovej Štefan Schwarz (1914–1986*[1]*) a*

[1] Správne má byť 1996. *Poznámka autor.*

Anton Huťa (1915–2001).“ Doplňme, že Štefan Schwarz ako občan židovského pôvodu mal výnimku, takže mohol učiť, ale v roku 1944 všetky výnimky prestali platiť a Schwarz bol deportovaný do koncentračného tábora. Po návrate prevzal od roku 1946 ako prednosta vedenie I. ústavu matematiky na SVŠT. V tom istom roku sa habilitoval na Prírodovedeckej fakulte SU a v roku 1947 bol vymenovaný za mimoriadneho profesora na SVŠT.

Tu do nášho rozprávania opäť vstupuje Marko Švec. Ten po skončení vysokoškolského štúdia pôsobil v rokoch 1944 – 49 ako profesor na gymnáziách v Topoľčanoch, v Šuranoch a na I. gymnáziu v Bratislave (dnes Gymnázium na Grösslingovej ulici). V roku 1949 obhájil rigoróznu prácu na Prírodovedeckej fakulte Slovenskej univerzity v Bratislave a získal titul doktora prírodných vied. V tom istom roku nastúpil ako asistent na II. ústav matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave, ktorý viedol prof. Hronec. Ten však od 1. januára 1951 odišiel z techniky a pôsobil už len na Prírodovedeckej fakulte Slovenskej univerzity. I. a II. ústav matematiky sa spojili pod vedením doc. Schwarza do celoškolskej Katedry matematiky na SVŠT. Marko Švec tu pôsobil do roku 1955 ako odborný asistent, v roku 1957 získal titul kandidáta fyzikálno-matematických vied na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Masarykovej univerzity v Brne (ktorá sa v rokoch 1960 – 1990 volala Univerzita Jana Evangelisty Purkyně). Po reorganizácii v roku 1961 z celoškolskej katedry matematiky vznikli katedry na jednotlivých fakultách SVŠT. Štefan Schwarz sa stal vedúcim Katedry matematiky na Elektrotechnickej fakulte, na ktorej Marko Švec pôsobil do roku 1966 ako docent a v rokoch 1966 – 1968 ako profesor matematiky. V roku 1965 mu Vedecká rada Univerzity J. E. Purkyně v Brne udelila vedeckú hodnosť doktora fyzikálno-matematických vied.

S pôsobením Marka Šveca na Slovenskej vysokej škole technickej súvisí aj vznik dnes už legendárnej učebnice I. Kluvánek-L. Mišík-M. Švec: *Matematika pre štúdium technických vied*. V článku [2] neskorší profesor Eliaš napísal: „*Počas pôsobenia na SVŠT si* [profesor Švec, poznámka autora] *bol vedomý toho, že pre poslucháčov techniky je matematika prostriedkom k riešeniu technických problémov a nie hlavným predmetom štúdia, preto venoval prednáškam veľkú starostlivosť. Je spoluautorom skrípt a veľmi úspešnej knihy I. KLUVÁNEK, L. MIŠÍK, M. ŠVEC: Matematika pre štúdium technických vied, I. a II. diel, ktorú od roku 1950, resp. 1961 viackrát vydalo Nakladateľstvo Alfa. Je to prvá slovenská moderne pojatá učebnica tohto druhu, ktorá zohrala dôležitú úlohu nielen pri matematickej výchove mladšej generácie inžinierov, ale aj učiteľov a vedeckých pracovníkov*“ [2]. Predstavme stručne ďalších dvoch autorov. Prof. RNDr. Ladislav Mišík, DrSc. (1921 – 2001) začal štúdium matematiky a fyziky v roku 1938 na

[2] V texte je preklep: 1. vydanie prvej časti učebnice je z roku 1959. *Poznámka autor.*

Prírodovedeckej fakulte Masarykovej univerzity v Brne a ukončil ho v roku 1943 na Prírodovedeckej fakulte Slovenskej univerzity v Bratislave, potom pôsobil až do roku 1962 ako asistent a docent na SVŠT v Bratislave. Prof. Ing. Igor Kluvánek, CSc. (1931 – 1993) vyštudoval vákuovú technológiu na Elektrotechnickej fakulte SVŠT. Na Katedre matematiky SVŠT v Bratislave pôsobil v rokoch 1952 – 1964.

V roku 1968 prešiel profesor Švec z Katedry matematiky Elektrotechnickej fakulty SVŠT na Katedru matematickej analýzy Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského, kde pôsobil až do roku 1995, v poslednom období už iba na čiastočný úväzok. Do tohto obdobia spadá aj jeho pobyt na brazílskej Federálnej univerzite v Bahii v meste Salvador da Bahia v rokoch 1968 – 1972 a v roku 1974. Ako expert Unesco tu pomohol na univerzite založiť matematicko-fyzikálnu vetvu. Aj počas jeho pôsobenia na Univerzite Komenského sa menili názvy pracovísk a škôl (i keď nie tak často ako v čase jeho vysokoškolských štúdií a začiatkov pôsobenia na SVŠT): na základe rozhodnutia o rozdelení Prírodovedeckej fakulty UK na prírodovedeckú a matematicko-fyzikálnu zo dňa 3. októbra 1979 vznikla od 1. 9. 1980 Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Komenského (tá sa neskôr, od 1. septembra 2000 rozhodnutím rektora č. ORR 2738/2000 premenovala na Fakultu matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave).

Profesor Valter Šeda (1931 – 2002), dlhoročný Švecov spolupracovník, vyslovil v článku [16] presvedčenie, že vznik Matematicko-fyzikálnej fakulty vytvoril optimálne podmienky pre Švecovu vedeckú prácu, preto aj obdobie rokov 1979 – 89 radí medzi najplodnejšie „zlaté“ obdobie jeho vedecko-výskumnej činnosti. V jej začiatkoch, v čase pôsobenia na SVŠT, sa Marko Švec sústredil na obyčajné diferenciálne rovnice, najmä na lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov. Neskôr prešiel na štúdium nelineárnych diferenciálnych rovníc, predovšetkým asymptotických vlastností riešení týchto rovníc, a funkcionálnych diferenciálnych rovníc. Práce zo „zlatého“ obdobia pojednávajú najmä o ekvivalencii, resp. asymptotickej a integrálnej ekvivalencii dvoch diferenciálnych, resp. funkcionálnych rovníc a o oscilatorických a asymptotických vlastnostiach nelineárnych diferenciálnych rovníc s kvázideriváciami. K tomu profesor Šeda v [16] uvádza: „*V problematike skúmania ekvivalencie diferenciálnych a funkcionálnych dif. systémov má československá matematika zásluhou prof. M. Šveca prioritné postavenie. Právom boli on a doc. A. Haščák za súbor prác pojednávajúcich o tejto problematike odmenení r. 1986 mimoriadnou odmenou ČSAV.*“ Tejto problematike sa profesor Švec venoval aj v 90-tych rokoch. Uveďme ešte hodnotenie jeho vedeckých výsledkov a metód z pera odborníka nanajvýš povolaného - profesora Jaroslava Kurzweila (1926), oceneného v roku 2006 najvyšším českým vedeckým vyznamenaním Česká hlava, ktorý napísal v článku [10] z roku 1980: „*Již tento stručný popis vědeckých publikací prof. Švece ukazuje, že je to dílo bohaté tematicky i metodicky. Obsahuje* *množství původních myšlenek a postupů. Je často citováno, je oceňováno odborníky doma i v zahraničí. Přineslo konečné řešení některých problémů a naopak dalo podnět řadě autorů k dalším výzkumům. V teorii obyčejných diferenciálních rovnic vyšších řádů hrají mimořádnou úlohu různé technické obraty (využívání identit, nerovností, odhady aj.); Marko Švec je mistrem v použití technických obratů, má však současně vzácnou schopnost objevovat obecné formulace a pracovat s nimi; právě toto spojení schopností téměř protikladných vede k výsledkům mimořádně hodnotným a zajímavým.*"

Dôležitým príspevkom k rozvoju vedeckého bádania v oblasti obyčajných a funkcionálnych diferenciálnych rovníc bol seminár, ktorý profesor Švec viedol viac ako 35 rokov. Dajme slovo opäť profesorovi Kurzweilovi, ktorý v [11] napísal: „*Prof. Švec na tomto semináři uvedl do samostatné vědecké práce řadu mladších pracovníků, jejichž vědecké výsledky dosáhly uznání v zahraničí a byly podkladem k získání titulu RNDr. a vědecké hodnosti kandidáta věd.*" A Valter Šeda v [15] upresnil: „*Z našich matematikov ovplyvnil menovite týchto pracovníkov: Š. Belohorec, J. Eliáš, A. Filová, J. Ličko, P. Marušiak, J. Rovder, K. Smítalová, V. Šeda, P. Šoltés a ďalší.*"

V rokoch 1993 – 96 bol profesor Švec vedúcim Katedry matematiky a výpočtovej techniky Pedagogickej fakulty UK v Bratislave. Na tejto fakulte pôsobil až do roku 2002, súčasne v rokoch 1997 – 2002 pracoval na Trenčianskej univerzite A. Dubčeka v Trenčíne.

Prof. RNDr. Marko Švec, DrSc. zomrel 19. júna 2012 vo veku nedožitých 93 rokov, pochovaný je na ružinovskom cintoríne v Bratislave (súčasný oficiálny názov je cintorín Vrakuňa).

Je nepísaným pravidlom, že životopis významnej osobnosti – a takou profesor Marko Švec bezpochyby je – by mal obsahovať nejakú anekdotu, ktorá by odľahčila inak vážne rozprávanie. Tu je. Keď sa rozvrhári prišli pýtať profesora Švecа, v ktoré dni mu majú nasadiť jeho šesť hodín prednášok, dostali túto odpoveď: „*V utorok a vo štvrtok, ale nie viac ako dve hodiny denne.*" Ako si s týmto matematickým hlavolamom poradili, mi nikdy neprezradili.

L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s

[1] Eliaš, Jozef: K päťdesiatinám prof. RNDr. Marka Švecа. *Matematický časopis,* 19 (4), 1969, s. 340.

[2] Eliaš, Jozef: Profesor Marko Švec šesťdesiatročný. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie,* 24 (5), 1979, s. 293 – 295.

[3] Gabzdilová, Soňa: *Ako sme študovali v totalite*. Prešov : Universum, 2018.

[4] Hricišáková, Daniela: Profesor Marko Švec sedemdesiatpäťročný. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie,* 40 (4), 1995, s. 226 – 227.

[5] Hricišáková, Daniela: Profesor Marko Švec osemdesiatpäťročný. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky,* Vol. 34 (2), 2005, 71 – 72.

[6] Kolibiar, Milan, Švec, Marko: Za akademikom Jur Hroncom, *Časopis pro pěstování matematiky*, 85 (2), 1960, s. 218 – 225.
[7] Kolibiarová, Blanka: Spomínam na môjho učiteľa akademika Schwarza. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 42 (5), 1997, s. 257 – 259.
[8] Kopáčik, Alojz: 70 rokov výučby geodézie a kartografie na Stavebnej fakulte STU v Bratislave. *Geodetický a kartografický obzor*. 54 (11), 2018, s. 201 – 209.
[9] Kudláčová, Blanka (ed.): *Pedagogické myslenie, školstvo a vzdelávanie na Slovensku v rokoch 1918– 1945*. Trnava : Trnavská univerzita v Trnave, 2016.
[10] Kurzweil, Jaroslav: K šedesátinám prof. Marka Švece, DrSc. *Časopis pro pěstování matematiky*, 105 (1), 1980, s. 102 – 108.
[11] Kurzweil, Jaroslav: K šedesátým pátým narozeninám prof. Marka Švece, DrSc. *Aplikace matematiky*, 29 (5), 1984, s. 395 – 396.
[12] Neubrunn, Tibor: Docent Ladislav Mišík šesťdesiatročný. *Mathematica Slovaca*, 31 (2), 1981, s. 217 – 220.
[13] Riečan, Beloslav: K základom modernej slovenskej matematiky. In: J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.): *35. mezinárodní konference Historie matematiky* (s. 229 - 233). Praha : Matfyzpress, 2014.
[14] Šebesta, Juraj (ed.): *25 rokov Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave*. Bratislava : Peter Mačura – PEEM, 2005.
[15] Šeda, Valter: Profesor Marko Švec šesťdesiatročný. *Mathematica Slovaca*, 29 (4), 1979, s. 425 – 428.
[16] Šeda, Valter: K sedemdesiatinám profesora Marka Šveca, DrSc. *Časopis pro pěstování matematiky*, 114 (4), 1989, s. 412—419.
[17] Šeda, Valter: Professor Marko Švec, octogenarian. *Mathematica Slovaca*, 50 (2), 2000, s. 241 – 246.
[18] Štulrajterová, Janka: Úsilie o zachovanie akademickej autonómie na Slovenskej univerzite v období Slovenskej republiky 1939 – 1945. *Historia scholastica*, 3 (2), 2017, s. 54 – 68.
[19] Tkačik, Štefan, Gunčaga, Ján, Valihora, Peter, Gerec, Marek (eds.): *Igor Kluvánek. Príspevky zo seminára venovaného nedožitým 75. narodeninám prof. Igora Kluvánka*. Ružomberok : Katedra matematiky Pedagogickej fakulty Katolíckej univerzity v Ružomberku, 2006.
[20] Vojáček, Ladislav, Kolárok, Jozef, Gábriš, Tomáš: *Československé právne dejiny (1918 – 1992). Text a pramene*. Bratislava : Paneurópska vysoká škola, 2011.

Zbyněk Kubáček[3]

[3] Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
kubacek@fmph.uniba.sk

Spomienka na prof. RNDr. Júliusa Krempaského, DrSc.

Prof. RNDr. Július Krempaský, vždy zanietený prednášateľ, vo veku 85 rokov.

Prof. Július Krempaský, legenda slovenskej fyziky, nás opustil 6. Decembra 2019 vo veku 88 rokov. Hoci odvtedy už uplynulo takmer pol roka, na túto novú skutočnosť sme si ešte nezvykli. Krempaského meno sa nám prihovára z obalov jeho kníh v našich knižniciach, v albumoch nám padnú do oka fotografie učiteľa s jeho poslucháčmi zo študentských rokov, na internete nachádza-me stovky odkazov na jeho život a dielo, v pamäti ožívajú prednášky z fyziky polovodičov na Elektrotechnickej fakulte SVŠT, na ktorých sa nevyrušovalo.

V neskorších desaťročiach nás elektrizovali jeho vystúpenia pri jubileách v Alumni klube STU, na konferenciách alebo pri výročiach inštitúcií. J. Krempaský bol ústrednou postavou pri 80. výročí Slovenskej technickej univerzity v roku 2017 ako vedec a pedagóg, ktorý na STU pôsobil vyše 60 rokov a významne ju pozdvihol.

Július Krempaský sa narodil 31. marca 1931 v Krížovej Vsi v okrese Poprad. Gymnaziálne štúdiá ukončil roku 1949 v Kežmarku a štúdium fyziky na Prírodovedeckej fakulte UK v Bratislave v roku 1953. Na fakulte nemohol napriek obojstrannému záujmu ďalej pôsobiť, a to vzhľadom na svoje vierovyznanie. Jeho talent a porozumenie niektorých vtedajších osobností mu však otvorili cestu na Slovenskú vysokú školu technickú, kde sa ho ujal prof. Dionýz Ilkovič. Ilkovič bol zakladateľom modernej slovenskej fyziky vo všeobecnej rovine a Krempaský jeho dielo rozvetvil vo viacerých špeciálnych a aktuálnych smeroch. Bol to výsledok jeho vedeckej a pedagogickej aktivity, v rámci ktorej obhájil roku 1958 hodnosť CSc. Roku 1963 sa habilitoval a roku 1973, ako prvý z fyzikálnej obce na Slovensku, získal vedeckú hodnosť doktora vied. Po ňom sa stal v roku 1980 profesorom. Roku 1980 bol zvolený za člena korešpondenta Slovenskej akadémie vied, o tri roky neskôr za člena korešpondenta Československej akadémie vied a roku 1995 za člena Európskej akadémie vied a umení so sídlom v Salzburgu. Bol medzinárodne akceptovaným vedcom a do histórie slovenskej fyziky sa zapísal v širšom spektre tém, pričom bol spravidla ich iniciátorom. O čo išlo?

Vďaka Júliusovi Krempaskému sme na Slovensku zachytili nástup polovodičov.

Prof. Krempaský na toto obdobie spomína vo svojej kapitole začlenenej do knihy [1]. Už ako študent sa od prof. Ivana Úlehlu dozvedel, že v Prahe sa vytvorila skupina výskumníkov polovodičov na čele s prof. Janom Taucom. Prof. Úlehla usmernil J. Krempaského, aby po skončení štúdia sa venoval týmto novým materiálom. Priateľ Ladislav Szántó mu zadovážil ruský preklad polovodičovej „biblie“ od jedného z vynálezcov tranzistora, laureáta Nobelovej ceny W. B. Shockleyho *Electrons and holes in semiconductors*. Stal sa s veľkou pravdepodobnosťou prvým Slovákom, ktorý sa s knihou mohol oboznámiť. To ovplyvnilo jeho ďalšie kroky. Po nástupe na katedru k prof. D. Ilkovičovi založili spolu špecializáciu fyzika tuhých látok, ktorá pre tento výskumný a priemyselný smer vychovávala prvých absolventov. Bolo treba zostaviť prednášky, cvičenia a ich experimentálne zabezpečenie, napísať skriptá, organizovať semináre. Polovodičová problematika vďaka tomu prerazila na ďalšie katedry Elektrotechnickej fakulty SVŠT, do ústavov SAV, do Žiliny, Nitry i Košíc. Výrobne zakotvila v TESLA Piešťany, ktorá produkovala súčiastky a integrované obvody vo fázovom posune iba 1 až 4 roky za svetom, ako o tom v knihe [1] píše doc. Ing. Vladimír Áč, CSc., ústredná postava polovodičového výskumu a vývoja v Piešťanoch.

J. Krempaský sa osobne v rámci polovodičov a všeobecne aj iných materiálov orientoval na meranie ich termofyzikálnych veličín novými impulznými metódami. Kniha *Meranie termofyzikálnych veličín*, Bratislava 1969, sa stala jeho doktorskou dizertáciou. Na Katedre fyziky sa v tej dobe točili gramofóny. Z klzných kontaktov na ich tanieroch sa derivovali meracie impulzy. Bolo to lacné a vtipné. Táto téma tvorí dodnes jedno výskumné zameranie vo Fyzikálnom ústave SAV, kde ju na vysokú úroveň rozpracoval a aplikačne zovšeobecnil Krempaského žiak Ing. Ľ. Kubičár, DrSc. a jeho kolektív. Prof. J. Krempaský bol autorom alebo spoluautorom šiestich patentov, medzi ktorými dominuje práve štvorica týkajúca sa termofyzikálnych meraní. Bolo to zariadenie a metóda na meranie koeficienta tepelnej a teplotnej vodivosti materiálov, spôsob komplexného merania elektrických, tepelných a termoelektrických parametrov polovodičov, metóda na meranie Z parametra polovodičov a sonda na meranie termofyzikálnych vlastností stavebných materiálov.

S J. Krempaským som sa po štúdiu znova stretol, ako pracovník Elektrotechnického ústavu SAV, vo výskume amorfných polovodičov. Tento výskum mal dve hlavné línie – solídna teória a základný výskum, ktoré sa opierali hlavne o práce Sira Nevilla Motta a jeho žiakov, ku ktorým sa u nás radí prof. RNDr. Viktor Bezák, DrSc. Druhej línii dominovali aplikačné pokusy využitia týchto materiálov na zhotovenie elektrických prepínačov z vysokoodporového do nízkoodporového stavu a späť. Spínače z amorfného CdTe, ktoré sme vtedy zhotovili, pracovali opakovane celé hodiny, boli však pomalé. J. Krempaského však inšpirovali k matematickej formulácii dynamických procesov s vnútornou tepelnou a elektrickou nestabilitou, čo bol možno jeho prvý krok k synergetike a deterministickému chaosu.

Synergetika ako všeobecná metóda skúmania vzniku nových kvalít v systémoch s nelineárnou dynamikou zapustila u nás korene v polovici 80. rokov 20. st.. Inšpirovaný zahraničnými prácami, najmä priekopníka tejto disciplíny prof. Hermana Hakena zo Stuttgartu, sústredil Krempaský adeptov rozličných disciplín. Boli to fyzici, chemici, biológovia, ekológovia, ekonómi, lekári, ktorí sa schádzali na interdisciplinárnych seminároch pod jeho vedením. Vznikla z toho kniha *Synergetika,* Bratislava 1988. Krempaský v jej úvode pripúšťa, že synergetika nie je autentickou vedeckou disciplínou s teoreticko-axiomatickou bázou. Jej užitočnosť je však nesporná. Princípy synergických dejov objasňoval napr. na vzájomne sa striedajúcich populáciách rysov a zajacov. Keď sa rysy premnožia, skonzumujú zajacov a z nedostatku potravy hynú. Množiť sa začínajú zajace, a tak sa to strieda. Nepripomína nám to vzťah medzi dnešnými milionármi a strednou vrstvou? Nezačína dochádzať k výmene rolí zakódovaných v Krempaského rovniciach?

Vo Fyzikálnom ústave SAV sa J. Krempaský podieľal aj na rozvoji fyziky a technológie kovových skiel, ktorej nositeľom bol Ing. Pavol Duhaj, DrSc. a dnes je ním Ing. Peter Švec, DrSc.. Keď tento výskum kulminoval, stálo Slovensko v popredí svetového progresu. Bolo to aj vďaka jemu, že problematika bola ocenená Československou štátnou cenou.

Prof. J. Krempaský začrel aj do kozmológie a systémové myslenie ho doviedlo k napísaniu knihy *Vesmírne metamorfózy*, Bratislava 1989. Inšpirovali ho Stephen Hawking a Steven Weinberg. Odtiaľ, cez Veľký tresk a provokujúce otázky, čo bolo pred ním, sa prepracoval k synergii vedy a viery ako dvoch aspektov poznania v zmysle encykliky *Fides et Ratio*. pápeža Jána Pavla II. Napísal tu viacero úvah. Povedzme si, že ku komplexnosti procesu poznania sa hlási aj Európska akadémia vied a umení, ktorej bol členom. Jej program je vyjadrený v holej vete: *Die Wucht des Ganzen*, Váha celku.

Prof. J. Krempaský bol obľúbeným pedagógom, ktorý plnil auditória. Musím spomenúť ako nás, ako študentov, upútal matematickým spracovaním procesu čistenia polovodičov zónovou tavbou. Mali sme radi situácie, keď sa na záver na tabuli objavil jednoduchý výraz, ktorý sa dal dvakrát podčiarknuť. Jeho matematický aparát bol jednoduchý.

Použil ho aj v štúdii *Mimozemšťania, kde ste?* Je súčasťou knihy *Slovenské vesmírne odysey*, ktorá práve vyšla. Bolo to zrejme jeho posledné dielo. Nadpis je paralelou Fermiho paradoxu "where is everybody?" Krempaský tu analyzuje možnosť výskytu iných civilizácií vo Vesmíre a prečo sa nám zatiaľ neprihlásili. Spomedzi štyroch interpretácií najjednoduchšia je, že neexistujú, a to je aj posolstvo v duchu "vážme si našu Zem a život na nej".

V posledných rokoch sme u nás považovali prof. J. Krempaského za nestora fyziky. Ako vedec a pedagóg bol zameraný široko a odbornej i laickej verejnosti sprostredkúval svoj štruktúrovaný pohľad na svet, podobný, ako si vo svojej hlave dokázali vytvoriť fyzici typu Richarda Feynmana. Napísal 30 kníh a učebníc a takmer 80 článkov. Vychoval 27 absolventov štúdia CSc. a PhD.

Vyznamenania ho neobchádzali napriek tomu, že ako politicky neangažovaný na to nemal vplyv. Veď aj členom korešpondentom SAV sa stal neplánovane – na základe akéhosi záchvatu demokracie a vzbury na zasadnutí vedeckého kolégia SAV. Roku 1989 mu udelili Národnú cenu SR za založenie vedného odboru termofyzikálne vlastnosti materiálov (spolu so Štefanom Bártom a Jozefom Bielekom), roku 2002 to bola Cena ministra školstva SR za vedu a techniku, roku 2006 Rad Ľudovíta Štúra II. triedy za významné zásluhy v oblasti rozvoja vedy a školstva, roku 2010 prvá novozaložená cena Fides et Ratio a r. 2018 sa stal profesorom h. c. Univerzity manažmentu v Legnici v Poľsku.

Keď začali jeho zdravotné problémy, ujali sa ho naši urológovia na klinike prof. MUDr. Jána Brezu, DrSc., ktorí robili, čo sa dalo. Svoju chorobu znášal vyrovnane. Táto vlastnosť spolu s vysokými morálnymi hodnotami ho sprevádzala na ceste životom. Svojou osobnosťou okolo seba šíril pokoj a súlad. Nech si teraz ten pokoj po 65 ročnej službe národu sám užije.

Štefan Luby[1]

L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s

[1] Š. Luby, editor, Od tranzistora k integrovanému obvodu (kapitoly z dejín česko-slovenskej mikroelektroniky), VEDA, vydavateľstvo SAV, Bratislava 2018, ISBN 978-89-224-1675-7.

[1] Fyzikálny ústav SAV, Dúbravská 9 84511 Bratislava, e-mail: fyziluby@savba.sk

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2019 (48)

Spomíname na profesora Jozefa Komorníka
(1950 – 2019)

Prof. RNDr. Jozef Komorník, DrSc.

Pri príležitosti nedožitých sedemdesiatych narodením spomíname na prof. RNDr. Jozefa Komorníka, DrSc. Prof. Komorník študoval v rokoch 1968 - 1973 na Prírodo-vedeckej fakulte UK v Bratislave. Krátko po skončení štúdia, ešte v roku 1973, obhájil rigoróznu prácu a získal titul RNDr. Nastúpil na internú ašpirantúru (pre našich mladých čitateľov – z internej ašpirantúry sa po niekoľkých reformách vysokoškolského vzdelávania po roku 1989 vytvorilo dnešné doktorandské štúdium) a v roku 1978 obhájil dizertačnú prácu a získal titul CSc. v odbore Pravdepodobnosť a matematická štatistika.

Treba poznamenať, že sedemdesiate roky minulého storočia patrili k neľahkému obdobiu v rozvoji pravdepodobnosti a matematickej štatistiky na Prírodovedeckej fakulte UK, keď sa po roku 1968 (po okupácii Československa a následnej normalizácii) bývalá Katedra teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky rozpadla, a stalo sa z nej oddelenie na Katedre numerickej matematiky a matematickej štatistiky. Vtedy, začiatkom sedemdesiatych rokov, prišli na toto oddelenie také osobnosti z oblasti teórie miery, ako boli profesori Neubrunn a Riečan (v tom čase obaja ešte docenti) a svojim príchodom na dlhé obdobie vytýčili hlavný smer výskumu na oddelení. Súčasne sa starali aj o personálny rast oddelenia. V roku 1978 sa obnovila Katedra teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky.

Prítomnosť profesorov Neubrunna a Riečana na katedre poznamenala aj vedecké zameranie prof. Komorníka. V jeho prácach zo sedemdesiatych a osemdesiatych rokov minulého storočia, popri hlavnom zameraní na dynamické systémy, má práce o entrópii a niekoľko prác aj z iných oblastí.

Prof. Komorník patril od začiatku svojho pôsobenia v kolektíve Katedry teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky k jej výrazným vedeckým osobnostiam. Svedčí o tom aj fakt, že už v roku 1981 sa na novovzniknutej Matematicko-fyzikálnej fakulte UK habilitoval a získal titul docent v odbore Pravdepodobnosť a matematická štatistika.

V roku 1985 sa prof. Komorník pričinil o vznik Katedry aplikovanej matematiky na Matematicko-fyzikálnej fakulte a stal sa vedúcim tejto katedry. Matematický výskum na MFF UK bol silno teoreticky zameraný. Myšlienka „pestovať“ na silno teoreticky zameranej fakulte aplikovanú matematiku potrebovala odvahu. Súčasne to bol čin vizionára. V roku 1988 prof. Komorník obhájil doktorskú dizertáciu a získal titul DrSc. a o rok neskôr sa inauguroval, a stal sa profesorom v odbore Pravdepodobnosť a matematická štatistika.

Z obdobia jeho pôsobenia na Matematicko-fyzikálnej fakulte sú jeho najvýznamnejšie výsledky. Tieto obohatili teóriu dynamických systémov. Výsledky sa týkajú asymptotického rozkladu a asymptotickej periodicity Markovovských operátorov. V literatúre tieto výsledky nesú meno Komorníkova – Lasotova veta a Komorníkova – Kornfeldova – Linova veta. Význam jeho vedeckej osobnosti možno dokumentovať aj mnohými pobytmi na zahraničných univerzitách, kde pôsobil ako hosťujúci profesor. Hosťujúcim profesorom bol napr. na univerzite v Groningene (Holandsko), v Inštitúte Štefana Banacha vo Varšave, na univerzite v Bordeaux, na Katz Graduate School of Business v Pittsburghu, na International Institute for European Studies, a mohli by sme pokračovať vo vymenúvaní ďalšími univerzitami.

V roku 1991 spoluzakladal Fakultu managementu UK. Vedecky sa od svojho príchodu na novú fakultu zameral na finančnú matematiku, štúdium časových radov, najmä z oblasti financií a na európsku integráciu.

Výrazné boli aj organizačné schopnosti prof. Komorníka. Už sme spomenuli, že v rokoch 1985 – 1991 pôsobil ako vedúci Katedry aplikovanej matematiky na MFF UK. Na Fakulte managementu UK pôsobil od roku 1993 ako vedúci Katedry ekonómie a finančníctva. V rokoch 2000 – 2007 a 2011 – 2018 bol dekanom Fakulty managementu UK.

V pedagogickej oblasti mi nedá nespomenúť vytvorenie študijného programu medzinárodný manažment v roku 2008, ktorý aj garantoval. Prof. Komorník bol spoluautorom Zbierky úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky (1986). Táto zbierka sa stala významným pomocníkom vysokoškolských učiteľov pri prednáškach zo základov matematickej štatistiky a stále sa používa. Ďalšou dôležitou knižnou publikáciou, ktorú v spoluautorstve napísal, je anglicko-nemecko-francúzsko-rusko-slovenský prekladový slovník z matematiky.

V roku 2014 získal Rad oficiera akademických paliem (Ordre des Palmex académiques officier), ktorý mu udelilo Ministerstvo školstva Francúzskej republiky za výnimočnú pedagogickú činnosť. Je to najvyššie francúzske pedagogické vyznamenanie.

Dalo by sa pokračovať vo vymenúvaní zásluh. Článok nechcel byť vyčerpávajúcim zdrojom informácií, skôr vykreslením jeho osobnosti očami bývalého študenta. 30 júna 2019 nás náhle opustil.

Martin Kalina [1]

[1] Katedra matematiky a DG, Stavebná fakulta STU, Radlinského 11, 810 05 Bratislava
e-mail: martin.kalina@stuba.sk

RECENZIA

Inšpirujúca zbierka príkladov z fyziky

Recenzia na knihu Pavla Valka: Jednoducho fyzika

Ivan Červeň[1]

V roku 2018 docent Pavol Valko – pôsobiaci na Ústave jadrového a fyzikálneho inžinierstva Fakulty elektrotechniky a informatiky STU vydal zbierku 215 riešených príkladov s názvom *Jednoducho fyzika* (vydalo občianske združenie „My, sme niekto iní", Bratislava 2018, ISBN 978-80-973089-7-1, 415 str.). Kniha má úroveň zodpovedajúcu základnému kurzu fyziky na vysokých školách, ale poslúži aj študentom vyšších tried gymnázií s hlbším záujmom o fyziku. Ide o príklady vhodné na poučenie a zamyslenie nielen pre študentov, ale aj učiteľov fyziky. Vo väčšine príkladov ide o zaujímavé formulácie zadania úlohy, často s originálnym, niekedy aj prekvapujúcim riešením.

Príklady sú zaradené do kapitol, ktorých počet, ani poradie nekopíruje zaužívaný model stredoškolských učebníc. Autor si zvolil vlastný výber kapitol, ako aj ich názvy a usporiadanie. Značný počet príkladov presahuje tematiku jednej kapitoly a vyžaduje znalosti z dvoch, niekedy aj troch kapitol – napríklad kombináciu vzťahov z mechaniky, elektriny či hydromechaniky. Kapitol je 11 a považujem za vhodné uviesť ich názvy (v zátvorkách aj počet príkladov v nich), lebo túto zbierku príkladov charakterizujú:

Rozprávky a príhody (13), *Športu zdar a športovaniu pokoj* (13), *Dopravný servis rádia Jerevan* (9), (*Ne*)*praktická fyzika* (25), *Na historickú tému* (3), *Fyzika okolo nás* (22), *Letí letí, všetko letí, čo má krídla* (14), *Neskúšať doma alebo „Mission impossible"* (9), *Vesmír a my v ňom* (25), *Elektrina magnetizmus a iné huncútstva* (65) a *Príklady bez fantázie* (17).

Originálne sú aj nadpisy, či názvy príkladov. Hneď v prvej kapitole nájdeme príklady s názvami *Princovia kontra škuľavý drak*, *Achilles naháňa korytnačku*, alebo *Murár s talentom na fyziku*. Do druhej kapitoly sú zaradené *Brankárov odkop*, *Jarná lyžovačka*, *Cyklista v zatáčke*, či *Podanie v tenise*. Vo štvrtej kapitole, nájdeme nadpisy *Diera v sude*, *Energia rotujúceho CD nosiča*, *Poskakujúca guľa*, alebo *Hladina rotujúcej kvapaliny*. Aj v ďalších kapitolách nájdeme pozoruhodné názvy, ako *Ťažisko mosta Košická*, *Topenie ľadovcov*, *Gúľanie nádob so sýtenými nápojmi*, *Teória sprchovania*, *Odhad výkonu srdca*, *Maliar na rebríku*, *Fúkanie galusiek*. V kapitole o lietaní sú príklady na témy *Vetrone*, *Modelárska raketa*, *Pevnosť rotorového listu*, či *Optimalizovaná vodná raketa*. V kapitole s názvom

[1] Doc. RNDr. Ivan Červeň, CSc., Púpavová 36, 841 04 Bratislava; e-mail: cerve-nivan@gmail.com

Neskúšať doma sú *Kanón na čierny prach*, *Výbuch vo výške*, *Výťah do vesmíru* aj *Obohacovanie uránu centrifúgou*. V kapitole o vesmíre je rad ďalších zaujímavých príkladov: *Ako dlho trvá let na Mesiac*, *Slnko v priamom prenose*, *Obývateľné planéty a susedia Zeme*, *Stabilita gravitačne viazaných sústav*, *Elektrostatická stabilizácia zotrvačníkov*, *Izotropné rozpínanie vesmíru*, *Meranie vzdialeností vo vesmíre*.

Najrozsiahlejšia kapitola je venovaná príkladom z náuky o elektrine a magnetizme. Väčšinu tvoria štandardné príklady, ale viaceré sú obohatené rozšíreným zadaním a originálnym riešením. Napríklad *Elektrostatické pole kruhovej dosky*, alebo *Tok intenzity medzi dvoma opačnými nábojmi*. Medzi zaujímavé príklady tu patrí *Elektrostatická hojdačka*, *Nabitý mrak*, *Kapacita klasickej dvojlinky*, *Najdrahší kondenzátor*, *Vykurovanie elektrinou a plynom*, *Polárna žiara*, *Magnetrón*, *Tri vodiče v rovine*, ale aj *Elektrostatická pamäťová bunka*, či *Digitálna elektrónka*. V poslednej kapitole sa rozoberá *Abstraktná matematika rotácie*, *Nerovnomerné pohyby*, *Pružná a nepružná zrážka*, *Kmity tyče* – aj *ohnutej*, a *Plávanie kocky*. To pravda nie sú všetky nadpisy, veď príkladov je vyše 200.

Zvláštnu časť zbierky predstavujú príklady týkajúce sa vesmíru a letectva, oblastí, ku ktorým má autor osobitný vzťah – je spoluautorom knihy *Kozmické technológie* (Vydavateľstvo STU Spektrum, Bratislava 2018), do ktorej prispel kapitolami *Elektrické a alternatívne pohonné systémy*, *Vesmírne technológie v bežnom živote* a *Pozorovanie a výskum vesmíru*.

Zbierka neobsahuje príklady zatriedené do štandardných kapitol fyziky, nemá osobitné časti napríklad o teple alebo optike. Cieľom autora zrejme nebolo napísať zbierku bežného typu, išlo mu o netradičný pohľad na riešenie niektorých príkladov; ukázať, že riešeniu aj pomerne nezáživných príkladov možno pridať zaujímavú motiváciu. Sám autor napísal: *Táto publikácia, aj keď má formu riešených príkladov, má ambíciu nielen ukázať ako sa ten ktorý príklad rieši, ale pomocou podrobného návodu na riešenie a pripojených komentárov ponúknuť pochopenie všeobecnejších postupov pri riešení oveľa širšieho okruhu problémov*.

V mnohých príkladoch autor bežné riešenie rozširuje o matematicky náročnejšie, napríklad nekonečným radom v príklade *Achilles a korytnačka*, výpočtom pravdepodobnosti pádu veže z detských kociek a jej súvislosti s presnosťou ich výroby. Týka sa to aj príkladu s plávaním naprieč rieky, skomplikovaným závislosťou rýchlosti prúdu od vzdialenosti od brehu. Podobných príkladov je v knihe veľa.

Komentár o osobitosti by bolo možné uviesť takmer ku každému príkladu, a to ako k textom zadania, tak aj k ich riešeniu. Originalitu možno dokumentovať na zadaniach, preto považujem za vhodné uviesť niektoré z nich.

4.24 Plnenie vagónov násypníkom rudy *Plošinový nákladný vozeň má dĺžku L, vlastnú hmotnosť* m_0 *a povolenú celkovú maximálnu hmotnosť* $m_{\max}$. *Pri jeho* *nakladaní sa používa výkonný sypač, ktorý kolmo zhora dokáže umiestniť na plošinu vagóna* m_s *kilogramov za čas* t_s . *Ak sa počas nakladania vagón pohybuje len zotrvačnosťou, aká musí byť jeho počiatočná rýchlosť* ($v_{\min}$), *aby pri nakladaní nebol preťažený? Ak je jeho počiatočná rýchlosť* $2v_{\min}$, *kde bude po naložení ťažisko naloženého vagóna? Ak by sme chceli vagón naložiť po celej jeho dĺžke rovnomerne na maximálnu nosnosť, akou rýchlosťou sa musí pohybovať pod sypačom a akou silou ho musí lokomotíva pritom tlačiť? Odpor pri valivom pohybe po koľajniciach zanedbajte.* (Riešenie je na troch stranách A4.)

6.4 Cestou na skúšku z fyziky *Študent sa rozhodol, že cestou na opravný termín bude študovať pohyb vlaku pomocou matematického kyvadla, malého pravítka a hodiniek. Na stanici, keď vlak ešte stál, zavesil v kupé závažie na tenkej šnúrke a zistil, že perióda malých kmitov jeho (matematického) kyvadla je T. Kyvadlo zastavil a poznačil si miesto rovnovážnej polohy. Keď sa vlak pohol spozoroval, že kyvadlo sa vychýlilo o* L_x *smerom k nemu (merané v horizontálnej rovine). Táto výchylka sa nemenila po dobu* t_1. *Potom sa kyvadlo vrátilo nad rovnovážnu polohu a zotrvalo tam po dobu* t_2. *Presne po uplynutí* t_2 *sa kyvadlo zasa vychýlilo, tento raz o* L_y *smerom k študentovej ľavej ruke (kolmo na smer výchylky* L_x*). Vypočítajte dĺžku závesu kyvadla, zrýchlenie vlaku pri akcelerácii zo stanice, vzdialenosť prvej zákruty za stanicou a aj jej polomer.*

6.20 Mechanické meranie reakčného času *Zamysleli ste sa niekedy nad skutočnosťou, prečo nedokážeme na prste balansovať ceruzu (hrotom dole), ale metlu alebo dlhú tyč áno? Dá sa postaviť ceruza hrotom dole na podložku tak, aby padala týždeň? Vedeli by ste nájsť súvislosť medzi balansovaním predmetov a reakčným časom experimentátorov?*

8.4 Výbuch vo výške *Vo výške* h *dôjde k explózii sféricky symetrickej nálože. Jednotlivé úlomky obalu sa rozletia všetkými smermi. Celková hmotnosť všetkých úlomkov je* M. *Prvý úlomok dopadne za čas* t_0. *Aká celková energia sa pri výbuchu uvoľnila? Za aký čas dopadne posledný úlomok? Kam dopadne úlomok vymrštený pod uhlom* α *voči horizontálne rovine? Odhadnite, aký je polomer ohrozenej oblasti pod miestom výbuchu, kam môžu dopadnúť niektoré úlomky. Odpor vzduchu, veľkosť aj pevnosť obalu nálože zanedbajte. Energia výbuchu sa rozloží všetkými smermi rovnako, úlomky považujte za rovnaké.*

Originálna je motivácia mnohých príkladov. Vodorovný vrh (príklad 1.2) autor rieši ako prípad nechceného pádu zmrzliny z kolotoča na v blízkosti stojaceho občana. Šikmý vrh v príklade 2.2 sa týka odkopu futbalovej lopty brankárom, v príklade (2.12) blata odfrkujúceho z kolesa bicykla. Odpor vzduchu je súčasťou príkladu 1.11 o murárovi, ktorý čaká na ustálenie kývajúcej sa olovnice. Koeficienty trenia sú predmetom príkladu hromadnej havárie áut v zákrute počas poľadovice. Pohyb po naklonenej rovine pri zohľadnení trenia a odporu vzduchu sa rieši ako prípad jarnej lyžovačky, ale aj preteku cyklistov do vrchu. Aj v ostatných kapitolách nájdeme podobné zaujímavé motivácie.

Viaceré príklady sú motivované aktuálnymi témami. Príklad 6.7 rieši jeden zo súčasných ekologických problémov – ako sa zmení dĺžka dňa po roztopení ľadovcov. Príklad 8.2 rieši úlohu ako odkloniť asteroid hroziaci dopadom na Zem, príklad 8.8 (ne)možnosťou skonštruovať výťah na Mesiac. V zbierke sú príklady aj o obohacovaní uránu centrifúgami, a o jednoduchom odhade energie uvoľnenej pri štiepení jadra uránu. V príklade 7.12 sa autor venuje reálnosti projektu lietadla s elektromotormi zásobovanými energiou zo solárnych panelov.

Deviata kapitola s nadpisom *Vesmír a my v ňom* je z veľkej časti o kozmonautike. Napríklad o pristátí modulu Eagle na Mesiaci, geostacionárnych družiciach, opise zostupu družice z obežnej dráhy – všetko vo forme príkladov. Autor predkladá aj riešenie tvaru trajektórií telies v okolí Zeme. Zaujímavo je spracované gravitačné urýchľovanie vesmírnych sond preletom okolo planét v príklade s názvom *Nebeská mechanika v službách človeka*. Poučný je text o určovaní vzdialeností vo vesmíre, s otázkou *Vedeli by ste jednotlivé metódy určovania vzdialeností fyzikálno-matematicky opísať?* Nasleduje ich matematický opis na štyroch stranách.

V najrozsiahlejšej – desiatej kapitole sú príklady z oblasti elektriny a magnetizmu. Väčšina z nich je známa z iných zbierok, ale autor viaceré rozšíril svojimi doplnkami; obsahuje však aj originálne príklady. Autor rieši nielen abstraktné príklady, ale aj veľmi praktické, ako napríklad porovnanie ceny kúrenia plynom a elektrinou v Bratislave a Smokovci v dôsledku rozdielneho tlaku vzduchu. Z príkladov týkajúcich sa magnetizmu je zaujímavý napríklad problém separácie izotopov uránu v magnetickom poli.

Valkova zbierka príkladov, akoby ani nebola zbierkou príkladov, ale knihou umožňujúcou nahliadnuť z iného zorného uhla na fyziku, a na problémy ktoré fyzika rieši; že vo fyzike ide v podstate o otázky úzko spojené s každodenným životom. Kniha sa vyznačuje netradičným výberom príkladov, netradičným zaradením do kapitol, a vo väčšine prípadov aj netradičnými riešeniami. Ťažko si však viem predstaviť, že by sa autorov zámer – takto sprostredkovať fyziku študentom – pri súčasnom rozsahu prednášok a cvičení na technických univerzitách, dal realizovať. Je tu však vždy reálna možnosť – knihu si kúpiť a čítať v pokoji doma.

Mám aj zopár kritických poznámok, týkajúcich sa najmä už neaktuálnej terminológie; podiskutujem si o nich s autorom osobne. Tie však nemôžu zmenšiť kvalitu a zaujímavosť knihy.

Na obale knihy pod nadpisom *Jednoducho fyzika* je podnadpis *Riešené príklady pre poučenie aj potešenie*. Musím sa priznať, že napriek polstoročnému pôsobeniu ako učiteľ fyziky, som sa čítaním tejto zaujímavej publikácie poučil aj potešil.

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
2/2020 ročník 49

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov s finančným prispením
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková, Ivo Kluvanec
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 550 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: jún 2020

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal “Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences”
OMFI 2/2020 Volume 49
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

CONTENTS